

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



Estudio computacional y experimental de la dinámica de cojinetes hidrodinámicos texturados

Jorge Alberto Palavecino

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO
PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN
DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

sinc(*i*)

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES,
SISTEMAS E INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Tesis de Doctorado **2026**

Doctorado en Ingeniería

Mención mecánica computacional

Título de la obra:

**Estudio Computacional y Experimental
de la Dinámica de Cojinetes
Hidrodinámicos Texturados**

Autor: Jorge Alberto Palavecino

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Clave:

Cojinetes hidrodinámicos, Lubricación

Texturas, Cavitación, Vibraciones, Rotodinámica

Oil Whirl, Oil Whip



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Estudio computacional y experimental de la dinámica de cojinetes hidrodinámicos texturados

Jorge Alberto Palavecino

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

Mención Mecánica Computacional

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2026

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria,
Paraje "El Pozo", S3000, Santa Fe, Argentina.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Estudio Computacional y Experimental de la Dinámica de Cojinetes Hidrodinámicos Texturados

Jorge Alberto Palavecino

Lugar de trabajo:

CIMEC

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

Director:

Dr. Santiago Márquez Damián

CIMEC, CONICET-UNL / FRSF - UTN

Co-director:

Dr. Federico Cavalieri

CIMEC, CONICET-UNL / FRSF - UTN

Jurado Evaluador:

Dr. Mario A. Storti

CIMEC, CONICET - UNL

Dra. Marcela A. Cruchaga

USACH, Chile

Dr. Roberto F. Ausas

USP, Brasil



ACTA DE DEFENSA DE TESIS DE DOCTORADO

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a los treinta y un días del mes de julio del año dos mil veintiséis, se reúnen en forma online sincrónica los miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis de Doctorado en Ingeniería, Mención Mecánica Computacional, titulada ***“Estudio computacional y experimental de la dinámica de cojinetes hidrodinámicos texturados”***, desarrollada por el **Ing. Jorge PALAVECINO, DNI: 37.665.126**, bajo la dirección del Dr. Santiago Márquez Damián y codirección del Dr. Federico Cavalieri. Ellos son: Dr. Mario Storti, la Dra. Marcela Cruchaga, y el Dr. Roberto Ausas.-----

La Presentación oral y defensa de la Tesis se efectúa bajo la modalidad online sincrónica según lo establecido por Resolución CS N° 382/21.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar la Tesis, el Jurado considera:

Que los contenidos desarrollados en la tesis y presentados en la defensa son extensos y representan una contribución al estado del arte del modelado numérico y experimental de problemas de lubricación en cojinetes texturados, que es un tema de gran relevancia científica y tecnológica. La simulación numérica ha sido validada con experimentos reportados en la literatura y propios.

La contribución de esta tesis también se manifiesta en los productos de investigación publicados en revistas científicas y en congresos de la especialidad.

El tesista respondió las preguntas del jurado mostrando un sólido conocimiento y dominio del tema.

El trabajo abre frentes de investigación que podrán ser desarrollados por el grupo de trabajo. Por ello, el Jurado aprueba la Tesis con calificación 10 (Diez) Sobresaliente.

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del Jurado al pie de la presente. -----

Dr. Mario Storti

Dra. Marcela Cruchaga

Dr. Roberto Ausas



[Signature]
Dr. José Luis Macor
Director de Posgrado
FICH - UNL

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 31 de julio de 2026

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada ***“Estudio computacional y experimental de la dinámica de cojinetes hidrodinámicos texturados.”***, desarrollada por el **Ing. Jorge PALAVECINO**, en el marco de la Mención “Mecánica Computacional”, certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de la versión digital final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

Dr. Mario Storti

Dra. Marcela Cruchaga

Dr. Roberto Ausas

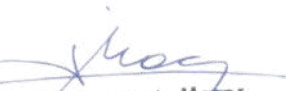
Santa Fe, 31 de julio de 2026

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención “Mecánica Computacional” y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....
Dr. Federico Cavalieri
Codirector de Tesis

.....
Dr. Santiago Márquez Damián
Director de Tesis




Dr. José Luis Macor
Director de Posgrado
FCH - UNL

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

Declaración legal del autor

Esta disertación ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en Repositorio Institucional de Acceso Abierto -RIAA- de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disposición a sus lectores bajo las condiciones estipuladas.

Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concedidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Jorge Alberto Palavecino

*A mis padres, Héctor y Míriam
por su apoyo incondicional
y a mis abuelos, Carlos y Marcelina
que desde algún lugar me acompañan.*

Agradecimientos

A mi director, Santiago Márquez Damián, por su paciencia, sus ganas de ir cada vez más allá en busca de mejores resultados y por estar siempre dispuesto tanto a enseñar como a aprender cosas nuevas. También a su familia, por los momentos compartidos a lo largo de estos años. A Federico Cavalieri, codirector de esta tesis, por el acompañamiento, las charlas y los consejos. A ambos, especialmente, por entender lo que necesitaba para alcanzar este objetivo.

A todos los que han formado parte del grupo dynCav y han contribuido directa o indirectamente a los resultados de esta tesis: Angelo Rattero, Rocío Riveiro, Lucas Donnet, Maximiliano Frutos, Martín Zanatta, Tomás Salvadores, Simón Weber, Franco Cagnolino, Valentina Onyszczyk y Santiago Zamateo. Ha sido un gusto enorme compartir estos años de trabajo con todos ellos.

A mis amigos, siempre presentes de una u otra forma: Valentín Pereyra, Sofía Beraldi, Pablo Barrientos, Nahuel Carrizo, Juli Antieco, Danilo Zorzi, Franco Gasicunas, Sixto Paviotti, Lorenzo Romero, Maximiliano Tortul, Cecilia Demarchi, y al grupo de gordos: Rodrigo, Franco, Nata y Martín por la cantidad de días, tardes y noches compartidas durante estos años que fueron fundamentales para despejar la mente.

A quienes me acompañan en el día a día de la UNPSJB: Rodrigo Sepúlveda, Alexis Soto Agüero, Bruno Hutnik, Santiago Osinaga, Jessica Wainstein y Oscar Battaglia, quienes, entre charlas, mates, consejos, asados y cervezas, hicieron de estos años una etapa mucho más llevadera. Especialmente a Gustavo Vignolo, de quien aprendí la ecuación de Reynolds, quien me motivó a emprender este doctorado allá por 2019 y me acompañó en las revisiones finales de esta tesis.

A Franco Cortés, el gran amigo que este doctorado me deja. Junto con Alondra y Grut me acompañaron, me bancaron y me ayudaron en todo momento. Gracias por ser parte fundamental de mi estadía en Santa Fe y del inolvidable viaje de retorno al sur.

A Federico Verdeal, mi gran amigo y fundamental compañero de laburo. Por bancarme en mis delirios, por las noches de videollamada, por escucharme y, muchas veces, hacerme ver en qué me estaba equivocando. Gracias por ser esa persona de confianza.

A Rodrigo Díaz, mi hermano de la vida, quien siempre me ha acompañado en cada proyecto que emprendí, junto con su esposa, Romina Camard, que también ha estado presente cada vez que hizo falta. Gracias amigos, por estar en todo momento.

A mi familia. A mis padres, Míriam y Héctor, quienes confían en mí, motivan, apoyan y acompañan cada una de mis ocurrencias, las 24 horas del día, donde sea que se me ocurra ir. Y a Reynolds, mi gato, por acompañarme durante la escritura de cada capítulo de esta tesis.

Resumen

Los cojinetes hidrodinámicos son elementos de máquina que permiten el movimiento de un rotor dentro de una carcasa mediante una película de lubricante que evita el contacto metal-metal. No obstante, pueden generarse zonas de baja presión que dan lugar a la formación de burbujas (fenómeno denominado cavitación), cuyo modelado requiere enfoques específicos según el mecanismo dominante. Este fenómeno resulta particularmente relevante en cojinetes con superficies texturadas, en los que se requieren modelos conservativos en masa para caracterizar adecuadamente la región cavitada. Asimismo, estos sistemas pueden presentar inestabilidades dinámicas, como el Oil Whirl, caracterizado por vibraciones subsincrónicas asociadas a la pérdida de capacidad portante, y el Oil Whip, que se manifiesta cuando la frecuencia de vibración se desacopla de la velocidad de giro y se aproxima a la frecuencia natural del sistema, comprometiendo la integridad del rotor.

En este contexto, la presente tesis desarrolla un modelo conservativo bifásico que describe el comportamiento de la película lubricante considerando el fenómeno de cavitación. Asimismo, se presentan los métodos numéricos empleados para el tratamiento acoplado de la mecánica de fluidos y la dinámica de rotores, junto con el desarrollo de un código propio de simulación de cojinetes cavitados que incorpora superficies texturadas, efectos térmicos y su interacción con inestabilidades vinculadas a la elasticidad del rotor. Las herramientas utilizadas incluyen la suite de Mecánica Computacional del Continuo OpenFOAM y el software SAMCEF Field, complementando a los desarrollos propios mencionados. Los resultados obtenidos se validan mediante comparación con mediciones experimentales realizadas en el banco de cojinetes de la UNPSJB y con datos reportados en la literatura de referencia.

Abstract

Hydrodynamic journal bearings are machine elements that enable the rotation of a rotor within a housing by means of a lubricant film that prevents metal-to-metal contact. However, low-pressure regions can develop, leading to the formation of bubbles (a phenomenon known as cavitation), the modeling of which requires specific approaches depending on the dominant mechanism. This phenomenon is particularly relevant in bearings with textured surfaces, where mass-conservative models are required to properly characterize the cavitated region. Additionally, these systems can exhibit dynamic instabilities such as oil whirl, characterized by subsynchronous vibrations associated with the loss of load-carrying capacity, and oil whip, which occurs when the vibration frequency decouples from the rotational speed and approaches the natural frequency of the system, thereby compromising rotor integrity.

In this context, this thesis develops a two-phase mass-conservative model that describes the behavior of the lubricant film while considering the cavitation phenomenon. Furthermore, it presents the numerical methods used for the coupled treatment of fluid mechanics and rotor dynamics, along with the development of in-house simulation codes for cavitated bearings that incorporate textured surfaces, thermal effects, and their interaction with instabilities linked to rotor flexibility. The tools utilized include the OpenFOAM Computational Continuum Mechanics suite and SAMCEF Field software, complementing the aforementioned in-house developments. The results obtained are validated through comparison with experimental measurements conducted on the UNPSJB journal bearing test rig and with data reported in the reference literature.

Índice general

Lista de símbolos	v
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	6
1.3. Antecedentes y estado del arte	7
1.3.1. Regímenes de lubricación	8
1.3.2. Lubricantes	10
1.3.3. Cojinetes hidrodinámicos	12
1.3.4. Evolución del modelado numérico de cojinetes hidrodinámicos	14
1.4. Estructura de la tesis	19
1.5. Contribuciones	21
1.5.1. Publicaciones en revistas indexadas	22
1.5.2. Participación en congresos	22
2. Fundamentos de la lubricación hidrodinámica	25
2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	25
2.2. Ecuación de Reynolds	29
2.3. Soluciones analíticas	34
2.3.1. Cojinete de longitud infinitamente larga	36
2.3.2. Solución de Sommerfeld transitoria	39
2.3.3. Cojinetes de longitud infinitamente corta	42
2.4. Características estáticas	43
2.5. Comportamiento dinámico de cojinetes	45
2.5.1. Linealización de la dinámica del cojinete	46
2.6. Ecuación de Reynolds para un flujo bifásico - dynCav	51
2.7. Modelos de cavitación	57

2.7.1. Modelo de cavitación vaporosa	58
2.7.2. Modelo de pseudo-cavitación	59
2.7.3. Modelo de cavitación gaseosa	59
2.8. Texturas superficiales	61
2.9. Contacto entre superficies	62
2.9.1. Factores de flujo	63
2.9.2. Cálculo de la carga aplicada sobre las asperezas superficiales	69
2.10. Efectos térmicos	71
2.10.1. Análisis integral	72
2.10.2. Análisis termohidrodinámico	73
2.11. Lubricación No-Newtoniana	75
3. Métodos numéricos e implementación.	79
3.1. Método de Volúmenes Finitos (FVM)	80
3.1.1. Discretización de los operadores diferenciales	82
3.1.2. Discretización del término advectivo	84
3.1.3. Discretización del término difusivo	85
3.1.4. Discretización del término temporal	86
3.1.5. Condiciones de borde	87
3.1.6. Esquemas de Alta Resolución	89
3.1.7. Esquemas de Alta Resolución temporales	92
3.2. Código dynCav	96
3.2.1. Discretización espacial	97
3.2.2. Discretización temporal	97
3.3. Implementación en OpenFOAM®	99
3.3.1. Método de Áreas Finitas (FAM)	100
3.3.2. dynCavFlow	102
4. Dinámica de ejes rotantes flexibles	109
4.1. Estabilidad de rotores rígidos soportados por cojinetes lisos	109
4.2. Rotor de Jeffcott	113
4.3. Fenómenos inestables: Oil Whirl y Oil Whip	117
4.4. Método de elementos finitos aplicado a rotores elásticos	120
4.4.1. Matrices elementales para rotores	122
4.4.2. Ensamblaje de la matriz global del rotor: discos y cojinetes	126

4.4.3. Mapeo de frecuencias resonantes	129
4.5. Código rotorDynCav	129
5. Resultados	131
5.1. Validación del campo de presiones y de las regiones de cavitación	131
5.1.1. Caracterización de la región cavitada	136
5.1.2. Convergencia del método propuesto	137
5.1.3. Mediciones propias en el banco de pruebas	138
5.1.4. Simulación con fluidos no-newtonianos	140
5.2. Cojinetes con superficies texturadas	142
5.2.1. Validación del campo de presiones ante la presencia de texturas.	142
5.2.2. Validación del cálculo de la fricción y del modelo térmico	144
5.2.3. Influencia de la temperatura en el análisis de cojinetes texturados	147
5.2.4. Optimización de texturas	151
5.3. Dinámica de rotores soportados por cojinetes lisos	153
5.3.1. Puntos de equilibrio utilizando un modelo de pseudo-cavitación	153
5.3.2. Respuesta dinámica a cargas variables en el tiempo	155
5.3.3. Contacto rotor-carcasa	155
5.3.4. Dinámica de rotores elásticos	157
5.3.5. Velocidad de entrada en Oil Whip	160
5.3.6. Casos de estudio adicionales	162
5.4. Dinámica de rotores texturados	170
5.4.1. Rotores texturados rígidos	170
5.4.2. Rotores texturados elásticos	174
6. Conclusiones y trabajo futuro	179
6.1. Conclusiones de la tesis	179
6.2. Trabajo futuro	183
Bibliografía	185

Lista de Símbolos

- c : Huelgo radial o espacio libre entre el muñón y la carcasa.
- e : Excentricidad (desplazamiento del centro del eje respecto al centro de la carcasa).
- ϵ : Excentricidad relativa, definida como la relación entre la excentricidad y el espacio libre (e/c).
- $\dot{\epsilon}$: Variación temporal de la excentricidad relativa.
- h : Espesor de la película lubricante o huelgo local.
- h_t : Profundidad de las texturas o cavidades superficiales.
- h_T : Espesor local de la película lubricante incluyendo rugosidad superficial.
- $\bar{h}_T$: Separación promedio entre dos superficies rugosas.
- Δh : Profundidad característica de las texturas de fondo plano.
- r_a : Radio interno de la carcasa del cojinete.
- r_b : Radio del eje o muñón.
- r_t : Parámetro de tamaño característico de la textura.
- L : Longitud axial del cojinete.
- D : Diámetro del cojinete ($2 \times r_b$).
- N_θ : Número de texturas en la dirección circunferencial.
- N_y : Número de texturas en la dirección axial.
- x_c, y_c : Coordenadas del centro de una textura.
- p : Presión generada en el fluido lubricante.
- p_v : Presión de vapor del lubricante (umbral de cavitación vaporosa).
- p_s : Presión de saturación para la cavitación gaseosa.
- p_0 : Presión de referencia o de suministro.
- p_b : Presión en el interior de la burbuja.
- μ : Viscosidad dinámica o absoluta del lubricante.
- μ_m : Viscosidad efectiva de la mezcla bifásica (líquido y vapor/gas).
- μ_l : Viscosidad dinámica de la fase líquida.
- μ_v : Viscosidad dinámica de la fase de vapor.
- μ_0 : Viscosidad de referencia a temperatura T_0 (modelo de Vogel).

- ρ : Densidad del fluido lubricante.
- ρ_m : Densidad de la mezcla bifásica.
- ρ_l : Densidad de la fase líquida.
- ρ_v : Densidad de la fase de vapor.
- ρ_g : Densidad del gas no condensable.
- T : Temperatura absoluta del lubricante.
- T_s : Temperatura de suministro del aceite.
- T_0 : Temperatura de referencia (modelo de Vogel).
- T_w : Temperatura de las paredes (superficies sólidas).
- β : Coeficiente de sensibilidad térmica del lubricante (modelo de Vogel).
- C_p : Calor específico a presión constante del lubricante.
- K_f : Conductividad térmica del lubricante.
- m : Consistencia del fluido no-newtoniano (ley de potencia).
- n : Índice de flujo de la ley de potencia para fluidos no-newtonianos.
- θ : Coordenada circunferencial o posición angular.
- ϕ : Ángulo de actitud (define la posición de equilibrio del centro del eje).
- $\dot{\phi}$: Velocidad de precesión del centro del eje.
- ω_b : Velocidad angular de rotación del eje.
- ω_n : Frecuencia natural del sistema rotor-cojinete.
- ω_s : Velocidad angular umbral de inestabilidad.
- Ω_s : Frecuencia de precesión en el umbral de inestabilidad.
- λ_n : Frecuencia natural no amortiguada del rotor de Jeffcott.
- u, v, w : Componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x, y y z .
- U : Velocidad superficial del eje ($U = \omega_b r_b$).
- w_b : Velocidad radial de la superficie del eje (término de compresión o *squeeze*).
- q_x, q_y : Caudales volumétricos por unidad de longitud en las direcciones circunferencial y axial.
- $\dot{\gamma}$: Tasa de corte o gradiente de velocidad de deformación.
- γ : Variable de Sommerfeld.
- Re : Número de Reynolds, relación entre fuerzas inerciales y viscosas ($Re = \rho \omega_b r_b c / \mu$).
- S : Número de Sommerfeld (parámetro adimensional de carga).
- S_s : Número de Sommerfeld modificado para cojinetes cortos.
- P_c : Presión característica del cojinete.
- P_m : Presión media sobre el área proyectada del cojinete.
- $\bar{\omega}$: Velocidad de rotación adimensional umbral de inestabilidad (*whirl frequency ratio*).

- $\hat{m}$: Masa adimensional del rotor.
- W : Carga externa aplicada sobre el eje.
- F_r : Fuerza hidrodinámica en dirección radial.
- F_t : Fuerza hidrodinámica en dirección tangencial.
- F_X, F_Y : Componentes cartesianas de la fuerza hidrodinámica.
- K_{ij} : Coeficientes de rigidez del cojinete ($i, j \in \{X, Y\}$ o $\{r, t\}$).
- C_{ij} : Coeficientes de amortiguamiento del cojinete.
- k_{ij} : Coeficientes de rigidez adimensionales ($k_{ij} = K_{ij} c/W$).
- c_{ij} : Coeficientes de amortiguamiento adimensionales ($c_{ij} = C_{ij} c \omega_b/W$).
- k_{eq} : Coeficiente de rigidez equivalente adimensional.
- $\mathbf{K}_b$: Matriz de rigidez del cojinete.
- $\mathbf{C}_b$: Matriz de amortiguamiento del cojinete.
- T_f : Par de fricción en el muñón.
- Q_{leak} : Caudal axial de fuga del lubricante.
- ΔT : Aumento de temperatura de la película lubricante.
- W_h : Potencia disipada por fricción viscosa en la película lubricante.
- λ : Fracción de la potencia disipada transportada por el lubricante.
- Φ : Función de disipación viscosa.
- k_e : Constante elástica del eje.
- c_e : Constante de amortiguamiento del eje.
- ζ_e : Factor de amortiguamiento adimensional del eje.
- J_Z : Momento de inercia del disco respecto al eje Z .
- δ_u : Módulo del vector desbalance (excentricidad de masa).
- $X(t), Y(t)$: Coordenadas del centro de masa del muñón en el sistema inercial.
- M_Z : Momento externo en dirección axial aplicado sobre el rotor.
- ψ_d : Ángulo de desfase entre el vector desplazamiento y el vector desbalance.
- F_o : Carga estática lateral sobre el rotor.
- R : Radio de la burbuja esférica en modelos de cavitación;
- R : desplazamiento complejo del centro del disco ($R = X + jY$) en dinámica de rotores.
- R_o : Radio inicial de la burbuja en el estado de referencia.
- $\dot{R}$: Velocidad de crecimiento del radio de la burbuja.
- $\ddot{R}$: Aceleración del radio de la burbuja.
- n_{bl} : Número de micronúcleos de burbuja por unidad de volumen.
- S_{α_l} : Término fuente de transferencia de masa entre fases (tasa de evaporación o condensación).

- σ_s : Tensión superficial de la burbuja.
- κ_s : Viscosidad superficial dilatacional.
- k : Coeficiente politrópico para la expansión adiabática del gas.
- f_g : Fracción de masa de gas libre.
- f_{g0} : Fracción de masa inicial de gas libre.
- C_c : Coeficiente de absorción de gas (modelo de cavitación gaseosa de Zhou).
- C_v : Coeficiente de liberación de gas (modelo de cavitación gaseosa de Zhou).
- τ : Tensiones de corte o tangenciales en el fluido.
- τ_c : tiempo característico del proceso difusivo de cavitación gaseosa.
- τ_{ij} : Componentes del tensor de tensiones viscosas.
- α_l : Fracción volumétrica de la fase líquida en el lubricante.
- α_v : Fracción volumétrica de la fase de vapor.
- α_g : Fracción volumétrica de gas no condensable.
- σ_R : Raíz media cuadrática de la rugosidad superficial combinada.
- γ_R : Parámetro de orientación de la rugosidad.
- δ_1, δ_2 : Alturas aleatorias de la rugosidad de cada superficie medidas desde su plano medio.
- ϕ_x, ϕ_y : Factores de flujo por presión en direcciones circunferencial y axial.
- ϕ_s : Factor de flujo por corte debido al movimiento relativo de superficies rugosas.
- H_R : Espesor de película adimensional ($H_R = h/\sigma_R$).
- η_R : Densidad de asperezas por unidad de área nominal.
- β_R : Radio de curvatura de las asperezas superficiales.
- λ_R : Parámetro de separación de Greenwood-Tripp ($\lambda_R = \bar{h}_R/\sigma_R$).
- d_R : Separación respecto al plano de referencia de las rugosidades.
- δ_R : Deformación local en el contacto de asperezas (modelo de penalidad).
- E^* : Módulo elástico equivalente del par de superficies en contacto.
- E_1, E_2 : Módulos de elasticidad de las superficies 1 y 2.
- ν_1, ν_2 : Coeficientes de Poisson de las superficies 1 y 2.
- W_c : Carga total soportada por el contacto de asperezas.
- K_R : Parámetro compuesto de Greenwood-Tripp.
- ψ : Variable escalar genérica de transporte.
- ν : Difusividad genérica en la ecuación de transporte.
- C_ψ : Constante de reacción en la ecuación de transporte.
- Q_ψ : Término fuente en la ecuación de transporte.
- r_f : Relación de gradientes consecutivos en esquemas TVD.

γ_b : Factor de combinación (esquema de Diferencia Combinada).

λ_b : Factor de peso limitador en esquemas de alta resolución.

Co : Número de Courant (condición CFL).

I_D : Segundo invariante del tensor tasa de deformación.

σ : Parámetro de perturbación en el método de perturbación regular.

Índice de figuras

1.1. Geometría básica de un cojinete hidrodinámico.	2
1.2. Coeficiente de fricción en función del régimen de lubricación.	9
1.3. Coeficiente de fricción en función de los tipos de lubricación.	10
1.4. Efecto de la velocidad y de la carga en la selección del lubricante.	11
1.5. Esquema del comportamiento de un fluido newtoniano.	12
2.1. Tensiones de corte actuantes en la cara z del cubo elemental.	26
2.2. Balance de tensiones actuantes en el cubo elemental de fluido.	28
2.3. Geometría de un cojinete hidrodinámico.	30
2.4. Esquema del cojinete hidrodinámico desenrollado.	31
2.5. Detalle de la geometría del huelgo en cojinetes.	34
2.6. Solución Full-Sommerfeld incluyendo la región negativa del campo de presiones. ($\mu = 0.021$ Pa.s, $\omega_b = 314.15$ 1/s; $r_b = 25$ mm; $c = 50$ μ m, $\varepsilon = 0.4/0.6/0.8$) . .	38
2.7. Fuerzas hidrodinámicas que actúan en un cojinete hidrodinámico.	39
2.8. Descomposición de los vectores velocidad del cojinete hidrodinámico.	40
2.9. Conjunto de posiciones de equilibrio teóricas para cojinetes de longitud infinita- mente larga (ILJB) y corta (ISJB).	44
2.10. Esquema de un cojinete hidrodinámico como un sistema masa-resorte-amortiguador.	46
2.11. Descomposición de las fuerzas en cojinetes hidrodinámicos.	48
2.12. Coeficientes en función de la excentricidad relativa para ISJB.	51
2.13. Coeficientes en función de la excentricidad para diferentes relaciones L/D obteni- das de forma numérica.	52
2.14. Efecto de las burbujas en las propiedades de la mezcla	53
2.15. Burbuja esférica en el seno de un líquido.	57
2.16. Posibles configuraciones de un cojinete hidrodinámico texturado.	62
2.17. Referencias geométricas de las texturas.	62
2.18. Esquema de la separación entre dos superficies rugosas.	63

2.19. Modelo utilizado por Patir y Cheng para la estimación por simulación de los factores de flujo.	65
2.20. Orientaciones típicas de la rugosidad y patrones de flujo longitudinales ($\gamma_R > 1$), isotrópicos ($\gamma_R = 1$) y transversales ($\gamma_R < 1$).	66
2.22. Esquema del contacto normal entre dos superficies planas.	69
3.1. Dominio computacional discretizado.	81
3.2. Variación lineal de ψ entre los puntos P y N	85
3.3. Condiciones de borde.	88
3.4. Arreglo de celdas en el dominio computacional.	91
3.5. Región admisible para esquemas TVD de segundo orden.	92
3.6. Proceso de avance temporal en pasos para una ecuación de reacción (R) y advección (A).	94
3.7. Referencia de la geometría de las celdas para FAM.	101
3.8. Esquema del dominio numérico utilizado.	103
4.1. Rotor vertical rígido soportado por cojinetes hidrodinámicos.	110
4.2. Velocidad adimensional umbral de inestabilidad $\bar{\omega}$ en función de la excentricidad relativa.	112
4.3. Rotor de Jeffcott.	114
4.4. Respuesta sincrónica del rotor de Jeffcott.	115
4.5. Respuesta de estado estacionario del rotor de Jeffcott.	116
4.6. Cascada de amplitud de frecuencias según la velocidad de rotación. En línea de trazos se diferencian las frecuencias sincrónicas ($1\times$) y subsincrónicas ($0.5\times$)	118
4.7. Grados de libertad del elemento de viga en un plano $X - Z$	120
4.8. Grados de libertad del elemento de viga en los planos $X - Z$ e $Y - Z$	123
4.9. Discretización del eje rotante.	127
4.10. Acoplamientos de matrices elementales en la matriz global.	128
4.11. Representación de un Diagrama de Campbell.	129
5.1. Perfil de presiones considerando cavitación vaporosa ($p_{ref} = 100$ kPa).	132
5.2. Perfil de presiones considerando cavitación gaseosa ($p_{ref} = 100$ kPa).	133
5.3. Perfil de presiones obtenido a partir del modelo de pseudo-cavitación.	134
5.4. Distribución de α_l obtenido a partir del modelo de pseudo-cavitación.	135
5.5. Comparación de las regiones de cavitación numérica y experimental.	136
5.6. Convergencia del error en condiciones de CFL constante.	138

5.7. Componentes del banco de pruebas.	139
5.8. Ubicación de los sensores del banco de pruebas.	140
5.9. Perfil de presiones obtenido en el plano medio del cojinete.	140
5.10. Perfil de presiones en el plano medio del cojinete.	141
5.11. Dominio fluido utilizado en OpenFOAM® con el solver <code>interPhaseChangeFoam</code> . 143	
5.12. Comparación entre el perfil obtenido mediante <code>dynCav</code> / <code>dynCavFlow</code> y el reportado en la literatura para cojinetes lisos y con texturas SQ.	143
5.13. Perfil de presiones obtenido utilizando los modelos <code>Full</code> CFD y <code>dynCav</code> / <code>dynCavFlow</code> para cojinetes con texturas SQ y CY.	144
5.14. Representación experimental y numérica del cojinete hidrodinámico texturado. .	145
5.15. Coeficiente de Fricción experimental y numérico para una carga externa de 3 kN [73] para cojinetes lisos y texturas SP.	145
5.16. Comparación de la temperatura obtenida mediante los modelos numéricos (<code>dynCav</code> / <code>dynCavFlow</code>) y las mediciones experimentales reportadas por Profito et al. [73] para un cojinete liso ($T_s = 60^\circ\text{C}$).	146
5.17. Representación de la geometría utilizada para los resultados presentados en las Figs. 5.18 y 5.19.	147
5.18. Temperatura, carga portante y torque de fricción para una excentricidad relativa $\varepsilon = 0.3$. La región delimitada por líneas de trazos corresponde a los puntos analizados en las Figuras 5.20 y 5.21 para este mismo valor de excentricidad.	148
5.19. Temperatura, carga portante y torque de fricción para una excentricidad relativa $\varepsilon = 0.6$. La región delimitada por líneas de trazos corresponde a los puntos analizados en las Figuras 5.20 y 5.21 para este mismo valor de excentricidad.	149
5.20. Temperatura, carga portante y torque de fricción a 2000 RPM. Se emplearon texturas triangulares (TR) en la configuración del cojinete hidrodinámico texturado.	150
5.21. Caudal de fuga, carga portante y torque de fricción a 2000 RPM expresados como variación porcentual de las superficies texturadas respecto a las lisas; comparativa entre los modelos térmico e isotérmico.	150
5.22. Implementación geométrica en el solver con individualización de texturas.	152
5.23. Convergencia de la población propuesta para cada parámetro.	153
5.24. Campo de presión y profundidad de texturas para la configuración óptima.	153
5.25. Puntos de equilibrio obtenidos para las diferentes condiciones de operación [7]. .	154
5.26. Respuesta dinámica a cargas variables.	156
5.27. Comparación de resultados obtenidos con los reportados por Cui et al. [135]. . .	157

5.28. Esquema de la geometría del sistema rotor-cojinetes.	157
5.29. Diagrama de Campbell para el rotor analizado por Birembaut y Peigney [83]. . .	158
5.30. Comparación del desplazamiento en X e Y de la trayectoria entre: a modelo Lineal y No lineal (ISJB), b código dynCav y solución ISJB.	159
5.31. Trayectorias obtenidas según las RPM de funcionamiento: a $0.5\omega_n$ (1315 RPM), ω_n (2630 RPM) y $2\omega_n$ (5260 RPM)	159
5.32. Desplazamientos del centro de masa del disco central.	160
5.33. Espectro de vibración a la altura del disco central.	161
5.34. Amplitud del desplazamiento del centro de masa del disco central.	162
5.35. Cascadas de frecuencia para los diferentes masas de desbalance propuestas. . . .	163
5.36. Cascada de frecuencias para la respuesta a una rampa de velocidad hasta 7000 RPM y un desbalance de 2.4 kg·m.	163
5.37. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 1.	165
5.38. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 2.	165
5.39. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 3.	165
5.40. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 4.	166
5.41. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 5.	166
5.42. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 6.	166
5.43. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 7.	167
5.44. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 8.	167
5.45. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 9.	167
5.46. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 10.	168
5.47. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 11.	168
5.48. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 12.	168
5.49. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 13.	169
5.50. Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 14.	169
5.51. Configuraciones de rotores texturados utilizados.	170
5.52. Variación del desplazamiento en el tiempo para los rotores simulados.	172
5.53. Trayectorias del centro de masa del eje en cada caso planteado.	173
5.54. Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados.	173
5.55. Respuesta temporal del desplazamiento vertical en el cojinete bajo condiciones de desbalanceo ($\omega = 2630$ RPM).	174
5.56. Trayectorias obtenidas para los rotores simulados en el cojinete.	175
5.57. Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados en el cojinete.	176

5.58. Desplazamiento vertical obtenido para los rotores simulados en el cojinete. . . .	177
5.59. Trayectorias obtenidas para los rotores simulados en el cojinete.	177
5.60. Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados en el cojinete.	178

Índice de tablas

1.1. Viscosidad dinámica típica de diversos fluidos a 20°C.	11
1.2. Valores de la relación L/D para diferentes aplicaciones [37].	14
2.1. Coeficientes dinámicos para cojinetes de longitud infinitamente larga (ILJB). . .	50
2.2. Coeficientes dinámicos para cojinetes de longitud infinitamente corta (ISJB). . .	51
2.3. Coeficientes C_R y r_R para las ecuaciones (2.146).	67
2.4. Coeficientes para las ecuaciones (2.151)	68
5.1. Condiciones de funcionamiento utilizadas por Jakobsson [67].	132
5.2. Condiciones de funcionamiento utilizadas por Snyder y Jaramillo [7, 69].	134
5.3. Ángulos de entrada y salida de la región de cavitación comparados con los resul- tados publicados por Etsion et al. [132]	136
5.4. Condiciones de funcionamiento y parámetros físicos utilizados por Jang et al. [133].	141
5.5. Condiciones de funcionamiento utilizadas por Manser et al. [74].	142
5.6. Condiciones de operación utilizadas por Profito et al. [73].	146
5.7. Condiciones operativas utilizadas para las Figs. 5.18 y 5.19.	147
5.8. Incremento de la capacidad portante al refinar la cantidad de parámetros	153
5.9. Parámetros utilizados para el estudio del contacto rotor-carcasa.	156
5.10. Parámetros del conjunto eje-cojinetes utilizado [83].	158
5.11. Parámetros del conjunto eje-cojinetes utilizado.	164
5.12. Resumen de los casos de simulación.	164

Capítulo 1

Introducción

El avance tecnológico y la constante búsqueda de una mayor eficiencia energética han impulsado la optimización de la maquinaria rotante en sectores que van desde la generación de energía hasta la industria automotriz [1–4]. En este contexto, los cojinetes hidrodinámicos desempeñan un papel crítico al garantizar el soporte de cargas elevadas y permitir un deslizamiento con mínima fricción entre los componentes móviles, asegurando así la integridad estructural y la durabilidad del sistema [5, 6]. No obstante, el comportamiento de estos elementos está condicionado por fenómenos físicos complejos, tales como la cavitación del lubricante, los efectos térmicos y la interacción dinámica con la elasticidad del eje rotante [7–10].

Si bien el estudio de la lubricación ha evolucionado desde las soluciones analíticas clásicas de finales del siglo XIX, las exigencias operativas actuales demandan modelos de mayor fidelidad que permitan predecir el comportamiento del sistema bajo condiciones más complejas. La introducción de texturas superficiales surge como una estrategia innovadora para mejorar el rendimiento, sin embargo, su implementación requiere un análisis riguroso que considere tanto la conservación de masa en el flujo bifásico como la influencia de estas cavidades en la estabilidad de la dinámica del rotor [11, 12]. A continuación, se presentan los fundamentos que motivan esta investigación, los objetivos planteados y el estado del arte que sustenta los desarrollos de esta tesis.

1.1. Motivación

El estudio de los cojinetes hidrodinámicos constituye un pilar fundamental en la ingeniería mecánica, dado que estos componentes son críticos a la hora de garantizar el funcionamiento apropiado de una máquina rotante. Estos elementos mecánicos tienen la doble función de permitir un deslizamiento con baja fricción entre sus componentes (eje y carcasa) y, al mismo tiempo, soportar las exigencias de su funcionamiento. Los cojinetes utilizados en cigüeñales y bielas de un motor,

por ejemplo, deben funcionar durante miles de kilómetros a altas temperaturas y en condiciones de carga variable [5]. Los beneficios económicos de la investigación sobre cojinetes se justifican por la reducción del tamaño de las máquinas y las pérdidas mecánicas, gracias al uso de piezas cada vez más pequeñas [13]. La denominación de cojinete hidrodinámico se utiliza generalmente para distinguir el caso donde una lámina fina de lubricante mantiene separado el eje rotante de la carcasa fija del cojinete (Fig. 1.1). La capacidad de soportar una carga externa W de estos componentes no depende de un contacto mecánico directo, sino de la presión p generada en el fluido debido al movimiento relativo de las superficies y a la formación de una cuña convergente-divergente originada por la excentricidad del eje [14]. La separación entre ambas superficies, denominada huelgo radial h , es variable a lo largo de la posición circunferencial θ .

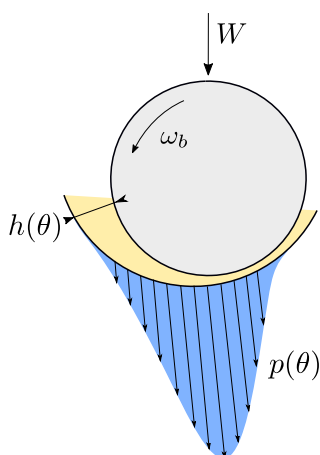


Figura 1.1: Geometría básica de un cojinete hidrodinámico.

A medida que la velocidad de rotación del eje ω_b aumenta, el lubricante es impulsado hacia la región de huelgo mínimo entre el rotor y la carcasa, generando un incremento de la presión y por consecuencia, una fuerza de sustentación que equilibra la carga aplicada. El valor de este huelgo mínimo disminuye con la carga aplicada en el eje y, a su vez, cuando el huelgo es más pequeño, mayor es la presión de sustentación lográndose así el equilibrio [1, 15].

Simultáneamente en la región divergente, es decir donde las superficies del eje y la carcasa se separan luego de haber alcanzado una distancia mínima, se produce una zona de depresión. Cuando la depresión es tal que la presión cae por debajo del umbral dado por la presión de vapor del lubricante se generan burbujas de vapor, dando lugar al fenómeno de cavitación por vaporización. Debido a esto, las burbujas de vapor colapsan al alcanzar zonas de mayor presión produciendo tensiones, temperaturas y velocidades altas y repentinas que afectan las superficies internas del cojinete [16]. Existen otros mecanismos de cavitación como la presencia de moléculas de gas disuelto en el fluido o de microburbujas de gas (principalmente aire) que se encuentran presentes en el lubricante que dan lugar a la cavitación gaseosa y a la pseudo-cavitación respectivamente.

Respecto a lo indicado, todos los estudios numéricos y experimentales confirman la presencia de cavitación en la zona divergente de los cojinetes hidrodinámicos [16].

La cavitación impone un problema único para muchas aplicaciones donde las partes mecánicas sólidas interactúan dinámicamente con líquidos. Respecto a los cojinetes utilizados en la industria automotriz, por ejemplo, la formación e implosión de cavidades de vapor, en el caso de ocurrir cerca de la superficies sólidas, puede resultar en el daño de dichas superficies [5, 17]. En operación, las características de las superficies internas de un cojinete son críticas para el efectivo funcionamiento del sistema y por lo tanto los daños producidos por eventos de cavitación repetidos en el tiempo pueden afectar o detener la operación del sistema. Por otro lado, la cavitación otorga un particular y fundamental beneficio en la estabilidad de la posición de equilibrio del eje rotante dentro de la carcasa [18].

En la actualidad no se dispone de metodologías para detectar y cuantificar el grado de severidad de la cavitación en un cojinete hidrodinámico de maquinaria en operación, lo que resulta en la incapacidad para generar datos en tiempo real que permitan obtener información de utilidad indicando cuando (en términos de condiciones de operación: temperatura, velocidades, cargas, etc) se presenta la cavitación. En su lugar, los métodos actuales se limitan a examinar los cojinetes en estudios de fin de ciclo experimental o de fin de vida útil con el objetivo de determinar los daños asociados a la cavitación. Estos estudios solamente se pueden llevar a cabo recurriendo al desensamblado de los cojinetes. La duración de los ciclos de testeo presentados implica un desafío en los esfuerzos de la industria en el desarrollo de nuevos lubricantes que mitiguen la potencialidad de un aceite para producir cavitación, así como de nuevas geometrías que permitan un funcionamiento más estable [16].

El estudio de la cavitación se ha abordado tradicionalmente mediante el uso de aproximaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes [19], desde donde se puede arribar a la ecuación de Reynolds muy comúnmente utilizada para los flujos de lubricación [20]. En el caso de cojinetes hidrodinámicos, es conocido que pueden obtenerse dos soluciones analíticas extremas de la ecuación de Reynolds, una considerando el cojinete de largo infinito, llamada comúnmente “solución de Sommerfeld” [21], y otra considerando el cojinete de largo infinitamente corto, llamada “solución de Ocvirk” [22]. Ambas expresiones predicen zonas de presiones negativas, con lo cual, una vez realizado el cálculo es necesario utilizar hipótesis posteriores para el uso práctico. Comúnmente, se utilizan las soluciones analíticas considerando las zonas de presión negativa, zonas cavitadas, como de presión nula mediante la llamada “condición de Gumbel” [15, 23]. Los citados enfoques corresponden ya a la teoría clásica [1, 3]. Hoy en día se cuenta con metodologías basadas en el modelo numérico de Elrod-Adams [12, 24] y en la solución directa de las ecuaciones de

Navier-Stokes con la capacidad de computar presiones, velocidades, transferencia de masa y distribución de fases en el caso de cojinetes de longitud real [15, 25, 26]. Dentro de las hipótesis utilizadas en la teoría de lubricación de Reynolds se encuentra la existencia de superficies suaves en el muñón y en la carcasa, y la hipótesis de Stokes respecto del término de aceleración convectiva de Navier-Stokes que lleva a no tener en cuenta efectos inerciales. Estas limitaciones implican que la ecuación de Reynolds es de aplicación parcial en el caso del uso de texturas o cavidades en las superficies internas del cojinete [27].

Uno de los temas de investigación en el campo de la lubricación hidrodinámica es el análisis de la reducción de la fricción y la mejora de la capacidad de carga a velocidades de rotación cada vez más bajas y en geometrías más pequeñas que las de los cojinetes utilizados en la actualidad [27–30]. En este contexto, es aceptado generalmente que el uso de texturas superficiales mejora el rendimiento de la película lubricante [31]. El uso de texturas superficiales consiste en introducir cavidades bien definidas e intencionadas en las superficies del cojinete, ya sea en la carcasa o en el eje giratorio [32, 33]. Esto marca una diferencia notable respecto a la rugosidad superficial que se considera normalmente aleatoria y difícil de caracterizar con precisión. Las texturas corresponden a la alteración de las superficies por medio de oquedades milimétricas o micrométricas de forma esférica o cilíndrica o prismas de distintas bases tales como cuadrados o triángulos. En cuanto a las cavidades, éstas se materializan mediante escalones o canales en alguna de las superficies del cojinete [27, 34]. El mecanismo por el cual las texturas y cavidades mejoran la estabilidad en el funcionamiento dinámico de cojinetes está todavía en discusión. Al día de hoy existen varias interpretaciones al respecto como la cavitación en las oquedades, el efecto colectivo de estas funcionando como pequeños cojinetes, la succión al ingreso de la zona deprimida y efectos inerciales y de cuña. Por otra parte el diseño de estas modificaciones depende fuertemente de las condiciones de funcionamiento y de la geometría del cojinete [31].

Por su parte, la caracterización de la región cavitada para variaciones de superficie no suaves puede ser inexacta si no se emplean los modelos adecuados. Ausas et al. [11] analizaron el impacto del modelo de cavitación en el análisis de cojinetes hidrodinámicos texturizados. El objetivo de su estudio era comparar los resultados obtenidos utilizando la condición de cavitación de Reynolds (sin conservación de masa) con los del modelo $p - \theta$ propuesto por Elrod y Adams [24] (con conservación de masa). Su trabajo demostró que, si bien ambos métodos predicen campos de presión similares para cojinetes lisos, la condición de Reynolds tiende a sobreestimar los valores de presión cuando hay texturas. Esto se debe a una caracterización inexacta de la región de cavitación por parte de este modelo dentro del área texturizada. En consecuencia, Ausas et al. [11] concluyeron que el uso de un modelo conservativo en masa es crucial cuando se analizan cojinetes texturizados.

Sin embargo, los efectos térmicos generalmente no son tenidos en cuenta a la hora de evaluar el comportamiento de la película lubricante en presencia de texturas superficiales. A su vez, el uso de superficies microtexturizadas ($< 100 \mu\text{m}$ de tamaño) requiere de discretizaciones numéricas con refinamientos capaces de captar estas geometrías. El alto costo computacional de estos casos en dominios de película delgada justifica el desarrollo de modelos simplificados y la implementación de métodos específicos, como el Método de Áreas Finitas (FAM) [35], que permitan capturar la física bifásica (líquido-vapor).

En cuanto a la simulación dinámica, es decir la evaluación de la evolución del eje desde su condición de reposo hasta la de equilibrio o bien su respuesta a cargas variables en el tiempo, ésta se basa generalmente en el uso de sistemas linealizados caracterizados por coeficientes hidrodinámicos, que ya son conocidos para los casos analíticos mencionados. Estos conceptos son parte de la teoría clásica y se encuentran en los libros de texto [1, 3]. Últimamente se han desarrollado soluciones teóricas para cojinetes de largo finito. Particularmente, las soluciones obtenidas por Merelli et al. [36, 37] son válidas y precisas en prácticamente todo el rango de uso en ingeniería y permiten ya una transferencia directa del conocimiento para uso en el dimensionamiento. El análisis dinámico de cojinetes en condiciones reales requiere también contemplar la presencia de ejes no alineados para la carcasa y el muñón [34, 38].

Por otro lado, en el análisis dinámico la contribución del cojinete trasciende la de un simple apoyo. La película lubricante introduce coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento que se acoplan directamente con la dinámica del eje, influyendo de manera crítica en su comportamiento estable e inestable [39]. El análisis de vibraciones en sistemas rotatorios es un factor determinante en el diseño de componentes de máquinas, especialmente en ejes soportados por cojinetes hidrodinámicos [1, 3, 5]. De hecho, se ha demostrado que la interacción rotor-cojinete puede generar vibraciones de una magnitud muy superior a la esperada para el eje por sí solo [40]. Este acoplamiento es especialmente problemático bajo condiciones de alta velocidad de rotación y baja carga externa, donde pueden surgir inestabilidades que comprometen la integridad del sistema [41].

Al analizar el comportamiento dinámico del rotor, la respuesta vibratoria sincrónica ($1x$), asociada a la elasticidad del rotor y máxima en cercanías de la frecuencia natural (ω_n), coexiste con fenómenos de inestabilidad subsincrónica originados en la película lubricante. El primero de ellos, el *oil whirl*, se manifiesta como una precesión inestable del centro del eje ($\approx 0.5x$) debido a la pérdida de capacidad portante en condiciones de baja sollicitación; sin embargo, cuando esta velocidad de precesión alcanza la frecuencia de resonancia ($0.5 \omega_b = \omega_n$), el sistema entra en una fase de *oil whip*. En este régimen, la frecuencia de vibración se bloquea cerca del valor de ω_n inde-

pendientemente del aumento de la velocidad de rotación, resultando en niveles vibratorios severos que comprometen la vida útil del rotor [9, 42]. En este contexto, el uso de texturas superficiales en la carcasa o el rotor surge como una estrategia de mitigación y estudio actual; no obstante, el empleo de ejes texturados introduce perturbaciones cíclicas en la fuerza hidrodinámica al transitar las cavidades por el huelgo mínimo, produciendo un fenómeno de excitación, cuyo estudio aún no ha sido explorado en profundidad en la literatura técnica.

1.2. Objetivos

La presente propuesta de tesis tiene como objetivo general el modelado y el desarrollo de técnicas que permitan realizar de forma rápida, eficiente y confiable el estudio de cojinetes hidrodinámicos texturados teniendo en cuenta la evolución del eje rotante bajo sustentación del fluido lubricante y la presencia de dos fases fluidas en el huelgo entre la carcasa y el muñón contemplando el fenómeno de cavitación. Las dos fases presentes corresponden al aceite lubricante, tanto en forma líquida como vaporosa, debido a la cavitación inducida en las regiones de baja presión en la sección divergente del huelgo entre el eje y la carcasa.

Como objetivos específicos se tienen el desarrollo de métodos numéricos para el tratamiento de la mecánica de los fluidos y la dinámica de mecanismos, la generación de un código de simulación para cojinetes cavitados y su aplicación en cojinetes con superficies texturadas, así como un código capaz de incorporar la dinámica del rotor elástico. En paralelo, se busca modelar otras características inherentes a los cojinetes hidrodinámicos como es el cálculo de la fricción, los efectos térmicos o el contacto entre superficies.

Para lograr estos objetivos, en primer lugar se hace uso de la técnica de Volumen de Fluido incorporando la transferencia de masa entre fases y resolviendo en forma directa las ecuaciones de Navier-Stokes y la dinámica de los sólidos involucrados. Las herramientas utilizadas corresponden a la suite de Mecánica Computacional del Continuo OpenFOAM®[43] y el software SAMCEF Field ®[44] para problemas de dinámica de cuerpos elásticos. Posteriormente, se propone una formulación simplificada basada en una adaptación de la ecuación de Reynolds para películas delgadas, acoplada a un modelo de cavitación, con el fin de obtener una herramienta de diseño de alta fidelidad y bajo costo computacional. Mediante el uso del Método de Áreas Finitas [35], esta herramienta es finalmente implementada en la plataforma OpenFOAM®. Los resultados son validados mediante referencias de la literatura así como con resultados obtenidos de la experimentación en un banco de cojinetes.

1.3. Antecedentes y estado del arte

La tribología es la rama de la ciencia que desarrolla teorías y tecnologías para mejorar la funcionalidad, eficiencia y durabilidad de las superficies en contacto y con movimiento relativo. Etimológicamente, proviene del griego *tribos* (“frotar” o “rozar”) y *logia* (“estudio” o “ciencia”). Por lo tanto, en otras palabras, es la ciencia que estudia la fricción entre dos superficies [45]. En 1978, se estimó que más de cuatro millones de Tera-Joules se perdieron en los Estados Unidos debido a la fricción y al desgaste. Esta cantidad es equivalente a lo que gasta la ciudad de New York en un año entero [46]. Según datos presentados por Holmberg y Erdemir en 2017 [47], cerca del 23 % del consumo total de energía en el mundo se origina en contactos tribológicos. De este porcentaje, el 20 % se utiliza exclusivamente para vencer la fricción y el 3 % restante se destina a la reparación de las piezas desgastadas. Estos problemas no están confinados únicamente a las máquinas, también influyen profundamente en otros aspectos de la vida. El funcionamiento de las articulaciones de los animales es claramente una situación tribológica [45].

La zona donde se produce el movimiento relativo se denomina interfaz tribológica. Este sistema comprende generalmente dos cuerpos sólidos cuya interacción puede estar mediada, o no, por un lubricante en fase líquida, sólida, gaseosa o una combinación de estas [48]. Las áreas de contacto en un sistema tribológico se clasifican según su grado de conformidad geométrica. Las superficies no-conformes presentan un contacto localizado en áreas extremadamente pequeñas, lo que deriva en altas presiones; este comportamiento es característico en engranajes, rodamientos y levas. Por el contrario, en las superficies conformes, los cuerpos encajan entre sí distribuyendo la carga en un área significativamente mayor, como ocurre en cojinetes de deslizamiento (ejecasquillo) y en el par pistón-camisa [3].

Algunos investigadores sugieren que los primeros sistemas tribológicos comenzaron en la edad de piedra, con algunos elementos rodantes fabricados en hueso. El uso de lubricantes fue reportado alrededor del 2500 - 3000 AC cuando las pirámides fueron construidas. Durante las primeras civilizaciones el conocimiento empírico sobre la fricción y los mecanismos que involucra fueron gradualmente acumulándose y contribuyendo en las actividades diarias de los humanos. Durante la edad media, la presencia de cada vez más mecanismos móviles (como molinos de viento y de agua, armas de asedio, carretillas, entre otros), requirió de mejorar las tecnologías existentes y disminuir los esfuerzos necesarios para producir las tareas. Algunos de los pioneros en el estudio de la fricción fueron: Leonardo da Vinci (1452-1519), Francis Bacon (1561-1626), Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1642-1727), entre otros [48].

El entendimiento de la lubricación hidrodinámica comienza en los 1883 con el experimento de Petroff [49] donde realizó la medición de fricción en dos superficies rotantes concéntricas. Por

otro lado, el experimento de Tower [50] realizado en 1885 mostró la existencia de una película lubricante mediante la medición de las presiones generadas. Posteriormente, Reynolds [20] fue capaz de describir de forma matemática el comportamiento de la película de lubricante mediante la denominada “Ecuación de Reynolds”. Estas investigaciones tienen en común el hecho de haber analizado el comportamiento del fluido presente entre ambas superficies más allá de la interacción mecánica entre ellas [51]. Por su parte, la interacción entre las superficies puede ser categorizada en función de la geometría, del tipo de movimiento relativo, del medio lubricante utilizado o, como se describe a continuación, en función del estado de la película lubricante [48].

1.3.1. Regímenes de lubricación

La lubricación tiene como objetivo primordial la mitigación del desgaste y la reducción de las pérdidas energéticas por fricción mediante la interposición de un medio fluido. El comportamiento de la interfaz tribológica se ve profundamente alterado por las condiciones operativas y es representado clásicamente mediante la Curva de Stribeck (Fig. 1.2). En esta gráfica, se esquematiza la variación del coeficiente de fricción (f_r) en función del parámetro de Hersey ($\mu N/P_c$) [48], permitiendo distinguir tres regímenes de funcionamiento claramente diferenciados:

- **Lubricación hidrodinámica (HL):** También denominada “lubricación de película completa”, se caracteriza por la existencia de una capa de fluido con un espesor suficiente para prevenir cualquier contacto entre las asperezas de las superficies sólidas. La presión necesaria para soportar la carga se genera de forma pasiva mediante el arrastre del fluido hacia una zona convergente o cuneiforme a una velocidad tal que se produce una sustentación hidrodinámica. En este régimen, la fricción depende exclusivamente de la viscosidad del lubricante y del cizallamiento interno del fluido.
- **Lubricación Mixta (ML):** En este estado, el espesor de la película lubricante es comparable a la rugosidad superficial de los sólidos. Como consecuencia, la carga aplicada es soportada parcialmente por la presión del fluido y parcialmente por el contacto directo entre las asperezas. Este régimen representa una zona de transición crítica donde el coeficiente de fricción comienza a aumentar a medida que disminuye la velocidad o aumenta la carga.
- **Lubricación límite (BL) y contacto seco:** Cuando la película de fluido se reduce a escalas nanométricas, su capacidad para separar las superficies se vuelve nula, resultando en un contacto sólido-sólido predominante. Este comportamiento puede derivar de velocidades de giro extremadamente bajas, cargas excesivas o una degradación térmica que reduzca drásticamente la viscosidad. En este punto, la integridad de las superficies depende más de

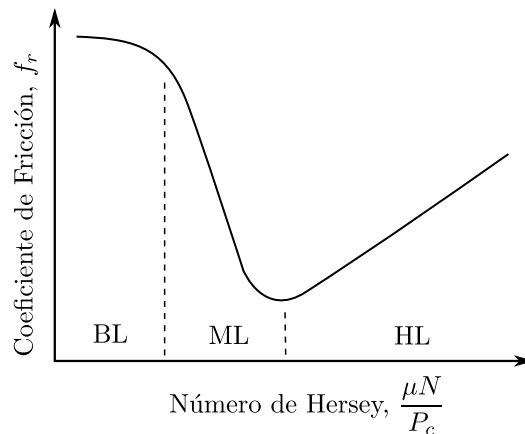


Figura 1.2: Coeficiente de fricción en función del régimen de lubricación.

las propiedades físico-químicas de los materiales y de los aditivos del lubricante que de la hidrodinámica del sistema.

A estos tres comportamientos básicos de la lubricación pueden añadirse diversas variantes y especializaciones que dependen de la naturaleza del fluido, la severidad de las condiciones operativas y la complejidad geométrica del sistema. La Fig. 1.3 [48] ilustra cómo el coeficiente de fricción se comporta frente a estas condiciones particulares:

- **Lubricación termo-hidrodinámica (THD):** Se presenta cuando los gradientes térmicos en la película de fluido afectan significativamente las propiedades locales del lubricante (especialmente la viscosidad), requiriendo la resolución simultánea del balance de energía.
- **Lubricación hidrostática:** En este régimen, la presión necesaria para separar las superficies no se genera por el movimiento relativo (efecto cuña), sino mediante una fuente de bombeo externa que inyecta el fluido a alta presión.
- **Lubricación elasto-hidrodinámica (EHL/EHD):** Característica de contactos no-conformes (como engranajes o rodamientos), donde las presiones son tan elevadas que producen una deformación elástica apreciable de las superficies sólidas.
- **Lubricación termo-elasto-hidrodinámica (TEHD):** Representa el nivel más completo de modelado clásico, integrando simultáneamente las deformaciones elásticas de los sólidos y los efectos térmicos en el fluido.
- **Lubricación sólida:** Empleada en condiciones donde los líquidos no pueden subsistir (altas temperaturas o vacío). Se basa en materiales con estructuras cristalinas laminares, como el grafito o el disulfuro de molibdeno (MoS_2), que presentan bajas tensiones de corte entre sus planos atómicos.

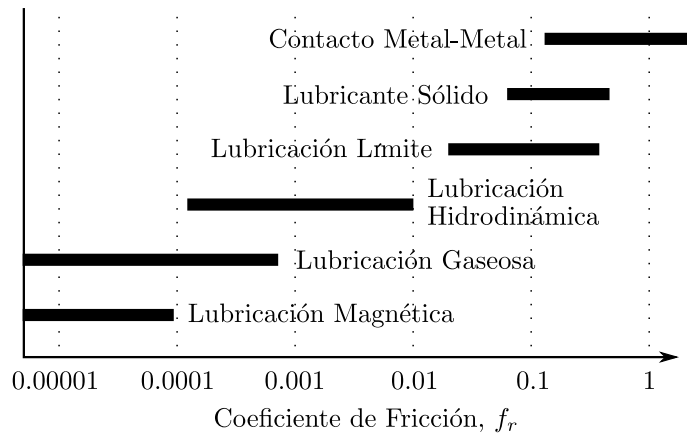


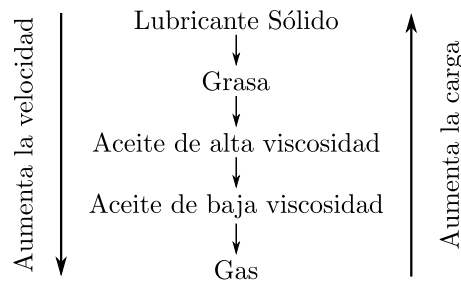
Figura 1.3: Coeficiente de fricción en función de los tipos de lubricación.

- **Lubricación gaseosa:** Utiliza gases como medio separador. Si bien para números de Mach bajos el comportamiento es análogo al de los líquidos, su baja viscosidad exige tolerancias de fabricación extremadamente estrictas (huecos menores a $0.025 \mu\text{m}$) y una alineación casi perfecta, ofreciendo a cambio una estabilidad térmica excepcional.
- **Lubricación magnética:** Se basa en la levitación o suspensión mediante campos electromagnéticos, eliminando el contacto físico y la necesidad de un fluido viscoso. Su aplicación en sistemas de transporte de alta velocidad, como los trenes MAGLEV, demuestra el potencial de esta tecnología para minimizar pérdidas por fricción.

1.3.2. Lubricantes

La selección del lubricante es una etapa crítica que debe responder a las demandas operativas del mecanismo. En condiciones de alta velocidad, el calor generado por el cizallamiento viscoso puede provocar la degradación térmica del fluido y una caída drástica de la viscosidad, comprometiendo el espesor de la película y favoreciendo el contacto sólido-sólido. Por tanto, el lubricante debe poseer una alta capacidad de transferencia de calor para evacuar la energía térmica hacia el exterior del sistema [23]. Por el contrario, en aplicaciones con cargas elevadas, el fluido debe presentar una consistencia tal que garantice su permanencia en la interfase sin ser expulsado por la presión de contacto [5].

La Fig. 1.4 resume los tipos de lubricantes empleados habitualmente en función de estas variables operativas [48]. En el extremo de bajas velocidades y altas cargas predominan las grasas y lubricantes sólidos, mientras que para altas velocidades y bajas cargas se opta por lubricantes gaseosos debido a su baja fricción interna. Los aceites líquidos ocupan el espectro intermedio, siendo los más versátiles para aplicaciones industriales y automotrices [3, 48]. La capa lubricante puede presentarse en estado líquido, sólido o gaseoso, siendo la viscosidad el parámetro más relevante en

**Figura 1.4:** Efecto de la velocidad y de la carga en la selección del lubricante.

Fluido	Viscosidad [mPa·s] o [cP]
Aire	0.018
Agua	1.002
Aceite SAE 10	50 - 100
Aceite SAE 30	150 - 200
Aceite SAE 50	400 - 500
Glicerina	1490
Miel	2000 - 10000

Tabla 1.1: Viscosidad dinámica típica de diversos fluidos a 20°C.

los lubricantes líquidos. Esta propiedad se define cualitativamente como la resistencia interna que presenta un fluido a fluir o a ser deformado por esfuerzos de corte. Como se observa en la Tabla 1.1, los lubricantes líquidos utilizados en cojinetes (generalmente aceites con grados SAE) poseen viscosidades entre dos y tres órdenes de magnitud superiores a la del agua. Esta mayor viscosidad es precisamente la que permite generar las presiones de sustentación necesarias en el huelgo del cojinete sin que el fluido sea expulsado fácilmente de la interfaz. Por otro lado, la comparación con el aire resalta el desafío mencionado en la sección de lubricación gaseosa: al ser la viscosidad del aire tan baja, la capacidad de carga es mínima a menos que las velocidades sean extremadamente altas o los huelgos extremadamente reducidos [4].

Para formalizar este concepto, considérese el fluido contenido entre dos placas planas paralelas separadas una distancia h (Fig. 1.5), donde la placa superior se desplaza con una velocidad constante U mientras la inferior permanece estática. Debido a la interacción molecular en las interfases, el fluido adopta un perfil de velocidades lineal donde la capa en contacto con la superficie móvil adquiere su misma velocidad, mientras que la capa adyacente a la superficie fija permanece en reposo. Esta hipótesis fundamental se denomina condición de no deslizamiento (*no-slip condition*) [19].

Bajo este esquema de flujo, conocido como flujo de Couette, el esfuerzo de corte τ es proporcional al gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$. En fluidos denominados newtonianos, la constante de proporcionalidad es precisamente la viscosidad dinámica μ :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

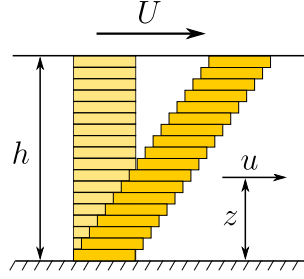


Figura 1.5: Esquema del comportamiento de un fluido newtoniano.

En el Sistema Internacional de Unidades, la viscosidad se mide en Pascal-segundo (Pa·s), cuya equivalencia con el centipoise (cP) es la siguiente:

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1000 \text{ cP}$$

Por otro lado, esta viscosidad exhibe una dependencia significativa con la temperatura, decreciendo de forma exponencial ante incrementos térmicos. Esta sensibilidad es tal que cualquier reporte de viscosidad carece de validez técnica si no se indica la temperatura de medición [3]. Dado que esta variación no es lineal, se han desarrollado diversos modelos empíricos para caracterizarla. La ecuación de Ubbelohde-Walther [52] es ampliamente aceptada y constituye la base de cálculo en normativas internacionales como ISO, ASME y DIN:

$$\log \log(\mu + c) = a - b \log(T) \quad (1.2)$$

donde μ representa la viscosidad dinámica, mientras que a , b y c son constantes intrínsecas del lubricante y T es la temperatura absoluta en Kelvin [48]. Alternativamente, en simulaciones numéricas donde se requiere una evaluación rápida de la viscosidad dinámica μ a una temperatura T , se utiliza con frecuencia la Ecuación de Vogel [53]:

$$\mu = \mu_0 e^{-\frac{T - T_0}{\beta}} \quad (1.3)$$

donde μ_0 es la viscosidad a la temperatura de referencia T_0 y β es el coeficiente de sensibilidad térmica del lubricante. Este modelo es particularmente útil en el marco de esta tesis para acoplar los efectos térmicos con la resolución de las presiones en el cojinete.

1.3.3. Cojinetes hidrodinámicos

Los cojinetes son elementos de máquina diseñados para permitir el movimiento relativo entre dos superficies sólidas, minimizando la fricción y el desgaste [3, 5]. Estos componentes pueden

clasificarse bajo diversos criterios:

- **Según la dirección de la carga:** Se distinguen los cojinetes radiales, que soportan cargas perpendiculares al eje de rotación, y los axiales (o de empuje), diseñados para cargas aplicadas en la dirección del eje.
- **Según su geometría:** Pueden ser de geometría fija, como los cojinetes de casquillos cilíndricos, de lóbulos o de geometría variable, como los cojinetes de zapatas pivotantes (*tilting-pad*).
- **Según su principio de funcionamiento:** Se dividen en cojinetes de elementos rodantes (que utilizan rodillos, agujas o bolillas), de deslizamiento seco (bujes donde predomina el contacto directo) e hidrodinámicos de película completa, donde la sustentación se basa en un lubricante capaz de separar íntegramente las superficies.

Los cojinetes de elementos rodantes son comúnmente utilizados en aplicaciones de baja velocidad con elevadas cargas y en sistemas que requieren una alta precisión en la posición radial del eje [5, 6]. En un sistema correctamente diseñado, el desgaste es mínimo durante su ciclo de vida, siendo la fatiga superficial de los elementos rodantes el principal mecanismo de falla. Por otro lado, los cojinetes hidrodinámicos de película gruesa ofrecen la ventaja de no presentar desgaste apreciable durante su régimen de operación nominal, ya que se evita casi por completo el contacto metal-metal.

No obstante, esta condición ideal presenta excepciones críticas durante los períodos transitorios de arranque (*start-up*) y parada (*shut-down*) [5, 54]. En estas instancias, la baja velocidad de rotación es insuficiente para generar la cuña hidrodinámica necesaria, provocando una caída de la presión en la película y conduciendo al contacto de las superficies bajo regímenes de lubricación mixta o límite, como se observa en la Fig. 1.2. Es en estas fases donde el uso de materiales con bajo coeficiente de fricción o el estudio de texturas superficiales cobra especial relevancia para garantizar la integridad de las superficies internas [27, 54].

La capacidad de carga y la estabilidad de un cojinete hidrodinámico dependen de su diseño geométrico, siendo la relación entre su longitud axial y su diámetro (L/D) uno de los parámetros más influyentes. En el diseño de máquinas moderno, existe una marcada tendencia hacia el uso de cojinetes cortos, con relaciones L/D inferiores a 0.5, debido a que facilitan la evacuación de calor y presentan una mayor tolerancia a las desalineaciones del eje. Por el contrario, los cojinetes largos, con relaciones superiores a 2, permiten alcanzar capacidades de carga elevadas al minimizar el flujo lateral de lubricante, aunque su uso ha disminuido debido al costo que conlleva incrementar mayor cantidad de material en la superficie de apoyo. La Tabla 1.2 [37] resume algunas de las

relaciones utilizadas a nivel industrial, donde la mayoría se sitúan en un rango intermedio con un flujo circunferencial como axial significativos, lo que exige modelos numéricos que superen las simplificaciones de las soluciones analíticas clásicas.

Aplicación	L/D
Turbogeneradores	0.8 - 1.5
Motores a gasolina y diesel	0.3 - 0.8
Generadores y motores eléctricos	1.2 - 2.0
Máquinas herramienta	2.0 - 4.0
Ferrocarriles	1.2 - 1.8

Tabla 1.2: Valores de la relación L/D para diferentes aplicaciones [37].

1.3.4. Evolución del modelado numérico de cojinetes hidrodinámicos

A pesar de que el principio de funcionamiento de los cojinetes hidrodinámicos se basa en leyes físicas bien establecidas desde finales del siglo XIX, la complejidad de los casos de estudio que se busca abordar actualmente ha generado la necesidad de técnicas más sofisticadas para su análisis. La transición desde las soluciones analíticas simplificadas hacia los métodos computacionales modernos no solo ha buscado una mayor precisión en la predicción de la capacidad portante, sino también una comprensión profunda de fenómenos transitorios, tales como las inestabilidades dinámicas y los cambios de fase del lubricante.

Existe una vasta literatura dedicada a identificar las condiciones bajo las cuales se manifiesta la cavitación y las regiones en las que se produce. Desde una perspectiva matemática, la búsqueda de soluciones ha dado lugar a diversos algoritmos predictivos. Gümbel [55] propuso la primera aproximación, conocida como solución de Half-Sommerfeld, que simplemente establece un umbral de presión mínima igual a la presión de saturación. Posteriormente, Swift [56] y Stieber [57] formularon condiciones de contorno que intentaban subsanar la falta de conservación de masa del modelo de Gümbel. Sin embargo, se ha demostrado que estas condiciones (Swift-Stieber, o también llamadas “condiciones de Reynolds”) son insuficientes para predecir la regeneración de la película de fluido y no ofrecen resultados satisfactorios bajo cargas dinámicas [17]. Como respuesta a estas limitaciones, el modelo de Elrod-Adams [58], o formulación $p - \theta$, introdujo el cumplimiento estricto de la conservación de masa, aunque suele presentar inestabilidades numéricas en casos dinámicos [11]. Otras evoluciones de este algoritmo, como las propuestas por Vijayaraghavan et al. [59], permiten predecir automáticamente la ruptura y regeneración de la película. Zuber y Dougherty [60] propusieron un modelo bifásico de la ecuación de Reynolds mediante la integración a través del espesor de la película de fluido, incorporando un término fuente para considerar la transferencia de masa entre los estados líquido y vapor. Sin embargo, este modelo asume que el fluido primario es un gas ideal con gotas de líquido suspendidas, omitiendo las variaciones de

viscosidad y el impacto de la velocidad relativa entre fases.

Para abordar casos donde el lubricante coexiste con pequeñas burbujas, Natsumeda y Someya [61] propusieron el uso de la ecuación de Rayleigh-Plesset. Esta línea de investigación sobre el fenómeno de cambio de fase ha sido profundizada por diversos autores mediante modelos como los de Kunz [62], Merkle [63] o Schnerr-Sauer [64]. No obstante, la implementación de estos esquemas depende fuertemente de parámetros empíricos que requieren una configuración individual para cada caso de estudio [25, 65, 66]. Riedel [25, 67] analizó la sensibilidad de estos modelos en cojinetes con un orificio de alimentación, concluyendo que la densidad inicial de micronúcleos de cavitación y su tamaño original son parámetros determinantes en la distribución de presiones. Por su parte, Concli [15] utilizó el modelo de Schnerr-Sauer disponible en la biblioteca de OpenFOAM® para comparar resultados con los datos experimentales históricos de Jakobsson [68]. Sus hallazgos revelaron dificultades para capturar correctamente el punto de salida de la región de cavitación, una discrepancia atribuida a una dinámica de cavitación insuficientemente desarrollada que no logra estabilizarse. Snyder et al. [7] propusieron el acoplamiento entre la ecuación de Reynolds y la de Rayleigh-Plesset vinculando la presión con el radio de la burbuja (modelo $p - R$). Jaramillo et al. [69] compararon este acoplamiento con el modelo de Elrod-Adams, reportando una severa inestabilidad numérica originada en el término de la derivada temporal de la densidad ($\partial\rho/\partial t$). Este trabajo analizó por primera vez el orden de convergencia, señalando la falta de conservación de masa en el modelo $p - R$ debido a la discretización empleada. Diversos autores, incluidos Ausas [11], Riedel [25] y Snyder [7], han coincidido en señalar que estos problemas de estabilidad están intrínsecamente ligados a la formulación de las ecuaciones de gobierno y su tratamiento temporal.

Los estudios relacionados con el análisis de superficies texturadas se remontan a 1966, cuando Hamilton [70] concluyó que la presencia de cavidades en la superficie influía significativamente en el comportamiento de la película lubricante entre superficies paralelas y, en consecuencia, en la capacidad de carga del sistema. Sin embargo, la presencia de texturas introduce cambios abruptos en la geometría que pueden no estar debidamente tenidos en cuenta en la ecuación de Reynolds, lo que podría dar lugar a una representación incorrecta del comportamiento del fluido. Para analizar la validez de la aplicación, Sahlin et al. [71] comparó las diferencias entre utilizar un enfoque simplificado, como el que propone la ecuación de Reynolds, y un método de dinámica de fluidos computacional que no utilice simplificaciones. De este estudio, se reportó que para elevados números de Reynolds, los efectos inerciales se vuelven dominantes cuando se generan vórtices dentro de la textura, lo que aumenta la capacidad de carga. Estos vórtices no se producen en flujos con números de Reynolds bajos ($Re < 140$), como los típicos de los cojinetes hidrodinámicos.

El impacto del modelo de cavitación en el análisis de cojinetes hidrodinámicos texturados fue analizado exhaustivamente por Ausas et al. [11]. El propósito de su estudio fue comparar los resultados obtenidos mediante la condición de cavitación de Reynolds (no conservativa en masa) frente al modelo $p - \theta$ propuesto por Elrod y Adams [24] (conservativo en masa). Su trabajo demostró que, si bien ambos métodos predicen campos de presión similares para cojinetes lisos, la condición de Reynolds tiende a sobreestimar los valores de presión cuando existen texturas. Esta discrepancia se debe a una caracterización inexacta de la región de cavitación dentro de las oquedades por parte del modelo no conservativo. En consecuencia, Ausas concluyó que el empleo de un modelo con conservación estricta de la masa es crucial para el análisis de superficies texturadas.

En particular, los cojinetes hidrodinámicos presentan una geometría de lubricante convergente-divergente que complejizan el escenario analítico y plantea desafíos adicionales en la caracterización de las texturas. Tala-Ighil et al. [72] empleó el Método de Elementos Finitos para analizar los efectos de superficies texturadas en estado estacionario, utilizando la ecuación de Reynolds con su condición de cavitación asociada. En dicha investigación, se evaluó numéricamente la influencia del tamaño, distribución y cantidad de cavidades sobre la presión máxima, el espesor de película mínimo, el caudal de fuga y la fricción. Posteriormente, este análisis se extendió para contemplar los efectos de la temperatura sobre estos parámetros [8], estimando una temperatura efectiva del lubricante a partir de un balance de flujos en el dominio. A partir de estos estudios, se concluyó que la aplicación de texturas en la totalidad del dominio no siempre resulta en la estrategia más eficaz para mejorar el desempeño del cojinete. Dependiendo de la velocidad de operación, puede ser más apropiado localizar las texturas exclusivamente en las regiones cercanas al espesor de película mínimo para optimizar la sustentación y reducir las pérdidas. Estos estudios no utilizan un modelo conservativo en masa aún cuando la bibliografía disponible indican la necesidad de ellos en el análisis de texturados superficiales [11].

Profito et al. [73] llevó a cabo una investigación combinada, numérica y experimental, para analizar los mecanismos de reducción de fricción en cojinetes texturados. Validó un modelo de lubricación hidrodinámica con efectos térmicos globales mediante datos experimentales de carcasas grabadas con láser. El estudio reveló que la disminución de la fricción es impulsada principalmente por dos mecanismos microscópicos simultáneos: una reducción del esfuerzo cortante del lubricante sobre las texturas y una caída de la viscosidad de la mezcla inducida por la cavitación dentro de estas. Sus hallazgos sugieren que un diseño eficaz para cojinetes texturados debe equilibrar dos funciones: aumentar la presión del fluido para soportar la carga y, simultáneamente, aprovechar la reducción de la fricción derivada de menores esfuerzos de corte y viscosidad. Manser et

al. [31, 74] presentaron un estudio numérico del campo de presiones para diferentes configuraciones de texturas en la superficie de la carcasa, utilizando el modelo de cavitación conservativo Jakobsson-Floberg-Olsson (JFO). El modelo JFO garantiza la conservación de la masa en todo el dominio de lubricación, incluidos la frontera de cavitación, suponiendo una presión uniforme de las burbujas y la ausencia de transferencia de masa. En este trabajo, se analizó el comportamiento del perfil de presiones empleando texturas cuadradas, cilíndricas y triangulares bajo condiciones de desalineación del eje. El perfil de presiones reportado es suave, lo que contrasta notablemente con los perfiles reportados por otros autores, donde cada cavidad genera una perturbación local del campo de presiones [11, 75–77].

Filgueira Filho et al. [78] analizaron la posición de equilibrio de cojinetes con texturas ubicadas en la superficie del rotor. Evaluaron cuatro tipos de patrones (chevron, diente de sierra, hoyuelos oblongos y alineados) y compararon la excentricidad relativa obtenida bajo diferentes condiciones de operación a través del número de Sommerfeld [5]. Este trabajo destaca particularmente la diferencia observada al utilizar texturas tipo chevron según su orientación respecto al movimiento del eje, así como el notable incremento en el torque de fricción para el caso texturado en comparación con el liso. En una línea similar, Dos Anjos et al. [33] realizaron un estudio numérico de texturas tipo chevron en el rotor, analizando la influencia del tamaño y número de cavidades a diferentes velocidades mediante la resolución de la ecuación de Reynolds con un modelo de cavitación $p - \theta$, aunque sin considerar el incremento de temperatura del lubricante.

Por su parte, a pesar de que se ha reportado la relevancia de la temperatura en el comportamiento de estos componentes, este factor suele ser pasado por alto. Dal et al. [79] reevaluaron la influencia de parámetros macro-geométricos en el desempeño termohidrodinámico (THD), demostrando que incluso en cojinetes lisos, los efectos térmicos pueden alterar significativamente las predicciones de presión. Avances recientes en ingeniería de superficies han renovado el interés en el control de la rugosidad y texturizado; por ejemplo, Tauviquirrahman et al. [80] investigaron cómo las irregularidades superficiales pueden diseñarse para reducir niveles de ruido mediante modelos de dinámica de fluidos computacional (CFD), aunque estos requieren un elevado número de celdas y largos tiempos de cálculo.

Mehjardi et al. [81] estudiaron el efecto de la profundidad en texturas cúbicas, cilíndricas y semielipsoidales en cojinetes lobulados, concluyendo que las texturas cúbicas en la zona de alta presión son las más efectivas para aumentar la capacidad de carga y estabilidad, aunque bajo un enfoque isotérmico y no conservativo. Del mismo modo, Kong et al. [82] analizaron la optimización de la topología de texturas con un modelo conservativo, hallando que el diseño óptimo depende fuertemente de las condiciones de operación y que se requieren arreglos de texturas más densos

a altas excentricidades. Las texturas diseñadas para aumentar la capacidad de carga a menudo lo hacen a expensas de un incremento en la fricción [33]. Esta fricción genera calor, lo que reduce la viscosidad del lubricante y, en consecuencia, puede disminuir o incluso revertir las mejoras de desempeño previstas. Por lo tanto, un estudio validado tanto frente a modelos CFD completos como frente a datos experimentales recientes resulta necesario, representando actualmente una brecha en la literatura especializada.

Finalmente, el estudio de la dinámica de ejes elásticos soportados por cojinetes hidrodinámicos se centra en la capacidad de predecir las condiciones de operación bajo las cuales el sistema se vuelve inestable, lo que podría derivar en fallas catastróficas y roturas prematuras. Las inestabilidades asociadas a la interacción entre las velocidades críticas del cojinete y las frecuencias naturales del eje elástico fueron descritas detalladamente por Muszynska [9]. En su trabajo, propuso un modelo matemático para un rotor simétrico apoyado en un cojinete rígido y otro hidrodinámico, utilizando parámetros modales para representar el primer modo de flexión. Este modelo permite identificar tanto las vibraciones sincrónicas por desbalanceo como las vibraciones auto-excitadas conocidas como *oil whirl* y *oil whip*, definiendo además los umbrales de velocidad para la estabilidad del sistema.

Con el objetivo de mejorar la fidelidad de estas simulaciones, diversos investigadores han desarrollado modelos no lineales para el cálculo de la dinámica de los cojinetes. Birembaut [83] presentó programas generales para el análisis de sistemas rotor-cojinete que utilizan el Método de Elementos Finitos para el cálculo de la dinámica del para el eje y resuelven la ecuación de Reynolds para los cojinetes. Mediante métodos de perturbación, este enfoque permitió estudiar la influencia de las características del cojinete sobre el umbral de estabilidad y la respuesta al desbalanceo. El tratamiento del rotor como un elemento de viga flexible es la base sobre la que se sustentan la mayoría de los códigos para cálculo de la dinámica de ejes soportados por cojinetes [10, 84, 85]. Ma [42] estudió las conductas dinámicas no lineales causadas por la inestabilidad de primer y segundo modo en rotores de alta velocidad con discos acoplados a partir de un modelo de masas concentradas (*Lumped Mass Model*, LMM) que considera el efecto giroscópico, acoplándolo a un modelo de fuerzas de película de aceite basado en la hipótesis de cojinete corto. Estos resultados fueron validados mediante el Método de Elementos Finitos, confirmando la precisión del modelo de masas para predecir regímenes críticos.

La suficiencia de los modelos lineales para describir la respuesta sincrónica de rotores es cuestionada cuando aparecen fenómenos de inestabilidad precesional. En este sentido, de Castro [86] destaca que, si bien los coeficientes de rigidez y amortiguamiento son adecuados para un amplio espectro de situaciones, no bastan para caracterizar comportamientos complejos como el *oil whirl*

y el oil whip. Su investigación valida una solución no lineal completa para simular estas inestabilidades inducidas por el fluido durante los transitorios de aceleración y frenado. Mediante el modelado de un rotor flexible con un disco central, el autor demuestra cómo la disposición del rotor y el desbalanceo afectan los umbrales de estabilidad, validando sus resultados tanto en bancos de ensayo horizontales como en plantas de energía verticales.

Complementariamente, Srivastava [87] analiza cómo la distribución de texturas superficiales altera no solo el comportamiento estático, sino también la estabilidad dinámica del sistema. A través de una investigación numérica que compara cojinetes lisos frente a diversas configuraciones de texturizado parcial y total, el autor emplea el método de perturbaciones finitas para evaluar los coeficientes dinámicos. Sus hallazgos subrayan que el posicionamiento estratégico de las texturas, particularmente en la región cercana a la presión máxima, incrementa significativamente la velocidad umbral de inestabilidad. Este estudio refuerza la idea de que la optimización de un cojinete requiere un análisis integral que considere la ubicación de las texturas como una variable crítica para mejorar la estabilidad del conjunto rotor-cojinete.

Tal como se mencionó, investigaciones más recientes han comenzado a desplazar el interés desde el texturizado de la carcasa fija hacia el texturizado de la superficie rotante del muñón. En estos casos, a diferencia de los casos donde la superficie texturada es la carcasa, la posición de las texturas varía continuamente respecto al huelgo mínimo con la velocidad de giro del rotor. Esta variación cíclica de la geometría provoca que el campo de presiones presente oscilaciones que se repiten periódicamente con la frecuencia de giro multiplicada por la cantidad de texturas que hayan en la periferia. Dichas perturbaciones tienen el potencial de modificar los umbrales de velocidad en los que se manifiesta el oil whirl, invalidando en muchos casos las predicciones obtenidas bajo la suposición de un eje rígido o una carcasa texturada estática. Hasta la fecha, el comportamiento dinámico de ejes texturados y su interacción con la flexibilidad del rotor no han sido estudiados en profundidad, lo que representa una brecha en el conocimiento que esta tesis pretende abordar mediante el desarrollo de herramientas numéricas de alta eficiencia.

1.4. Estructura de la tesis

La presente tesis se organiza en capítulos que progresan desde los fundamentos teóricos y la revisión del estado del arte hasta la implementación numérica y el análisis de resultados. La estructura se detalla a continuación:

- **Capítulo 1: Introducción.** Presenta la motivación del trabajo y el estado del arte del estudio de cojinetes hidrodinámicos texturados. Se definen los objetivos generales y específicos, así

como las contribuciones originales de esta investigación.

- **Capítulo 2: Fundamentos de la lubricación hidrodinámica.** En este capítulo se desarrollan las ecuaciones de gobierno del flujo de lubricación, partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes hasta arribar a la ecuación de Reynolds. Se presenta la formulación propuesta para el cálculo de la película lubricante considerando los efectos de un cambio de fase. Se establecen las bases de los modelos de cavitación y las hipótesis necesarias para el tratamiento de películas delgadas. Se describen las ecuaciones necesarias para el cálculo de los efectos térmicos, el contacto y la dinámica del eje rígido.
- **Capítulo 3: Métodos numéricos e implementación.** Fundamenta la metodología seguida para el desarrollo de la tesis. Se describe el Método de Volúmenes Finitos, los esquemas de discretización convencionales y los esquemas de alta resolución utilizados para elevar el grado de convergencia. Se describe el Método de Áreas Finitas (FAM) como alternativa eficiente a los Volúmenes Finitos (FVM) tradicionales. Se describe la implementación en la plataforma OpenFOAM® del modelo físico propuesto.
- **Capítulo 4: Dinámica de ejes flexibles.** Se aborda la teoría necesaria para integrar la respuesta estructural del rotor con las fuerzas hidrodinámicas. Se describen las matrices utilizadas y los métodos de acoplamiento para simular la interacción fluido-estructura en condiciones transitorias.
- **Capítulo 5: Resultados y discusión.** Se exponen las simulaciones realizadas y las validaciones del código desarrollado frente a casos de referencia de la literatura. Se presenta un análisis exhaustivo que abarca desde configuraciones clásicas de cojinetes lisos hasta escenarios complejos con carcasas y ejes texturados. Se presentan validaciones experimentales realizadas en el banco de pruebas de cojinetes del Lab. de Mecánica de los Fluidos de la UNPSJB. Se discute en detalle el impacto de las superficies texturadas en la distribución de presiones, la generación de cavitación y la respuesta dinámica, evaluando cómo estas modificaciones geométricas pueden optimizar el desempeño del sistema.
- **Capítulo 6: Conclusiones y trabajos futuros.** Se sintetizan los hallazgos principales, evaluando el cumplimiento de los objetivos planteados y proponiendo nuevas líneas de investigación.

1.5. Contribuciones

Esta tesis proporciona un conjunto de herramientas computacionales que permiten resolver de forma eficiente cojinetes hidrodinámicos texturados considerando los efectos de la cavitación, la temperatura y la elasticidad del eje rotante. Todas las herramientas que se proponen cuentan con su correspondiente validación contra resultados numéricos y/o experimentales disponibles en la bibliografía. Los hallazgos derivados de esta tesis no solo mejoran la capacidad predictiva de los modelos actuales, sino que también aportan un análisis sobre la estabilidad dinámica inducida por el fluido bajo condiciones de operación complejas. A continuación, se describen de manera detallada las principales contribuciones originales que constituyen el núcleo de este trabajo:

- Se presenta una formulación novedosa basada en la dinámica de la burbuja que garantiza la conservación estricta de la masa y la estabilidad numérica mediante un tratamiento especial de la derivada temporal de la densidad de la mezcla. Este modelo supera las limitaciones de propuestas clásicas al considerar variaciones de viscosidad y densidad en la mezcla de forma independiente.
- El trabajo aporta un modelo original para la cavitación gaseosa basado en la difusión de gas del líquido al exterior. A diferencia de los modelos tradicionales, este enfoque permite capturar los tiempos característicos del fenómeno, factor decisivo para predecir correctamente la estabilidad dinámica del sistema.
- La formulación es lo suficientemente robusta como para ser aplicada a fluidos newtonianos y no-newtonianos, acoplando efectos térmicos globales y la dinámica no lineal del rotor.
- Se demuestra una convergencia de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo para el campo de presiones, la fracción de líquido y la trayectoria. Esto se logra mediante la implementación de esquemas de alta resolución (HRS) y una técnica de partición tipo Strang para el acoplamiento de las ecuaciones.
- Se desarrolló un solver original en la plataforma OpenFOAM® utilizando el Método de Áreas Finitas (FAM). Este enfoque permite tratar el dominio de fluido tridimensional en una superficie a través de un campo escalar, capturando la física completa de la película delgada con un costo computacional drásticamente menor al de los modelos 3D tradicionales.
- Se desarrolló una herramienta de optimización automática que acopla el algoritmo evolutivo CMA-ES con el solver termohidrodinámico. Esta permite optimizar de forma individual la profundidad de cada textura para maximizar la capacidad de carga, revelando configuraciones óptimas que no son evidentes en análisis isotérmicos.

- Se han creado y validado los códigos dynCav y rotorDynCav. Este último permite simular la dinámica no lineal de rotores elásticos mediante elementos de viga, integrando las fuerzas hidrodinámicas calculadas en tiempo real.
- Se realizó una contribución técnica al banco de pruebas del Laboratorio de Mecánica de Fluidos (UNPSJB) mediante la incorporación de sensores de vacío. Esto permitió generar una base de datos experimentales de alta fidelidad para validar las presiones en las regiones cavitadas, contrastando exitosamente con los modelos numéricos desarrollados.
- Se analizó el comportamiento de la dinámica de ejes ante la presencia de cojinetes texturados y sus diferencias respecto a la consideración de cojinete liso.

1.5.1. Publicaciones en revistas indexadas

- Jorge A. Palavecino, Federico J. Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **A second-order in time and space model to solve the coupled Reynolds–Rayleigh–Plesset equations for the dynamics of cavitated hydrodynamic journal bearings**, Tribology International, Volume 192, 2024, 109206, ISSN 0301-679X, <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2023.109206>
- Jorge A. Palavecino, Francisco J. Profito, Federico J. Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Coupled effects of surface texture and temperature-induced viscosity changes on journal bearing performance**, Surface Topography: Metrology and Properties, Volume 14, 2026, 015013, ISSN 2051-672X, <https://doi.org/10.1088/2051-672X/ae41d5>

1.5.2. Participación en congresos

- Presentación: Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Uso del Método de Áreas Finitas para la resolución de cojinetes hidrodinámicos texturados en OpenFOAM**, MECOM 2025, Lugar: CABA, Año: 2025.
- Poster: Santiago Zamateo, Franco Cragnolino, Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Optimización de texturas en cojinetes hidrodinámicos utilizando estrategias evolutivas**, MECOM 2025, Lugar: CABA, Año: 2025.
- Presentación: Jorge Palavecino, Santiago Manuel Osinaga, Santiago Márquez Damián, Gustavo Gabriel Vignolo, **Modelado numérico de cojinetes hidrodinámicos con lubricación no-Newtoniana**, Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica - CAIM IX, Lugar: Buenos Aires, Año: 2025.

- Presentación: Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Influencia de la Temperatura en Cojinetes Hidrodinámicos Texturados**, MECOM 2024, Lugar: Rosario, Año: 2024.
- Presentación: Jorge Palavecino, Martin Zanatta, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Estudio Numérico del Fenómeno de Oil Whip en Ejes Elásticos Soportados por Cojinetes Hidrodinámicos**, MECOM 2024, Lugar: Rosario, Año: 2024.
- Poster: Valentina Onyszczyk, Franco Cragolino, Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Estudio del Efecto de Texturas en Cojinetes Hidrodinámicos**, MECOM 2024, Lugar: Rosario, Año: 2024.
- Presentación: Jorge Palavecino, Matías Bórquez, Claudio Merelli, Gustavo Vignolo, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Simulación numérica y validación experimental de cojinetes hidrodinámicos**, Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica - CAIM VIII, Lugar: Santa Fe, Año: 2023.
- Presentación: Jorge Palavecino; Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Un modelo de segundo orden en tiempo y espacio para la dinámica de cojinetes hidrodinámicos con cavitación**, MECOM 2023, Lugar: Concordia, Año: 2023.
- Poster: Martin Zanatta, Tomás Salvadores, Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Determinación Numérica de Velocidad Crítica en Cojinetes Hidrodinámicos de Longitud Finita**, MECOM 2023, Lugar: Concordia, Año: 2023.
- Presentación: Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Un modelo p-alpha para la dinámica de cojinetes hidrodinámicos texturados con cavitación**, MECOM 2022, Lugar: Bahía Blanca, Año: 2022.
- Poster: Lucas Donnet, Martin Zanatta, Maximiliano Frutos, Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Simulación numérica del transitorio inicial de funcionamiento en cojinetes hidrodinámicos**, MECOM 2022, Lugar: Bahía Blanca, Año: 2022.
- Poster: Lucas Donnet, Maximiliano Frutos, Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Simulación numérica de transitorios de funcionamiento en cojinetes hidrodinámicos**, MECOM 2021, Lugar: Resistencia, Año: 2021.
- Presentación: Jorge Palavecino, Federico Cavalieri, Santiago Márquez Damián, **Evaluación**

de herramientas numéricas para el estudio de la cavitación en cojinetes hidrodinámicos texturados, MECOM 2021, Lugar: Resistencia - Chaco; Año: 2021.

Capítulo 2

Fundamentos de la lubricación hidrodinámica

El estudio de la lubricación hidrodinámica es, desde un punto de vista matemático, un caso particular que deriva de las ecuaciones de Navier-Stokes [88]. La ecuación diferencial que permite este análisis fue formulada por Osborne Reynolds en 1886 [20] motivado por los experimentos realizados por Beauchamp Tower. La llamada Ecuación de Reynolds contiene a la viscosidad, la velocidad de giro y el espesor de película como parámetros principales y puede adecuarse al sistema tribológico que se requiera. Aunque, tal como se comentó previamente, en ciertas circunstancias es necesario considerar un modelo térmico o elástico en simultáneo para poder representar adecuadamente el comportamiento de la película lubricante.

En este capítulo se realiza en un primer lugar la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes y, consecuentemente a partir de las simplificaciones necesarias se reducirán hasta obtener la ecuación de Reynolds generalizada. En las siguientes secciones, se desarrolla el modelo propuesto para la resolución de un fluido a dos fases así como los modelos de cavitación, térmicos y de contacto que se tienen en cuenta. Por último, se desarrolla la formulación de la ecuación de Reynolds adaptada para fluidos no-newtonianos.

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Si se considera una porción cúbica infinitesimal de fluido, en cada una de sus caras se manifiestan tres tensiones dando un total de nueve pares de componentes (Fig. 2.1). El primer subíndice de cada tensión indica sobre que superficie está actuando esta tensión, mientras que el segundo subíndice indica su dirección. Para mantener el equilibrio, las tensiones deben cumplir con una determinada simetría ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$), por tanto, siendo $\mathbf{T}$ el tensor de tensiones

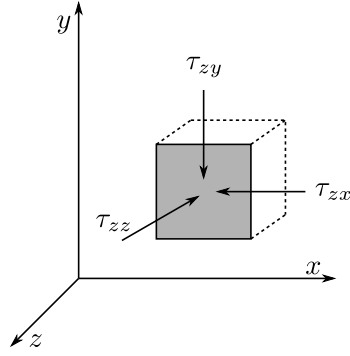


Figura 2.1: Tensiones de corte actuantes en la cara z del cubo elemental.

aplicado en el cubo diferencial:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Las tensiones τ_{xy} , τ_{xz} y τ_{yz} actúan de forma tangencial a las superficies del cubo elemental. Por otro lado, el promedio de las tensiones pertenecientes a la diagonal del tensor, es considerada la presión hidrostática p del fluido:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = -3p$$

donde el signo negativo está determinado por el sentido de la acción de la presión en compresión. La magnitud de las tensiones depende de la tasa de deformación a la que está sometido el fluido. Para la mayoría de los fluidos [2], esta dependencia es:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} p$$

en donde $\vec{V}$ es el vector velocidad con componentes u , v y w para las direcciones x , y , z respectivamente. Tal como se comentó anteriormente, esta relación indica que las tensiones son proporcionales a la distorsión del fluido a través de la constante μ denominada viscosidad del fluido. Para las tensiones normales, la introducción del delta de Kronecker δ_{ij} indica que esta magnitud solo se aplica en los casos donde los subíndices son iguales [2, 3]. Para las tres tensiones cortantes, resulta:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

Por su parte, las tensiones normales quedan expresadas como:

$$\tau_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2)$$

Si se suman estas tres componentes, se obtiene:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = -3p + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

El término entre paréntesis refiere a la divergencia del vector velocidad conocido como dilatación del fluido. Este término mide la tasa de cambio con la que el fluido se expande desde un punto determinado. Considerando al fluido como incompresible este término es despreciable dado que, a partir de la ecuación de conservación de masa se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Considerando la derivada total de las tres componentes de la velocidad como variables dependientes de las direcciones x, y, z así como del tiempo t , con x, y y z también dependientes de t se obtiene la aceleración. Para la velocidad u , esta expresión resulta:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.4)$$

De forma análoga para v y w se obtienen las expresiones para las aceleraciones de cada componente de la velocidad. La masa de un elemento diferencial de fluido está determinada por su densidad, ρ y sus dimensiones dx, dy, dz . Por lo tanto, la fuerza requerida para acelerar el elemento es:

$$F_x = \rho \frac{Du}{Dt} dx dy dz \quad F_y = \rho \frac{Dv}{Dt} dx dy dz \quad F_z = \rho \frac{Dw}{Dt} dx dy dz \quad (2.5)$$

Las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial pueden ser producidas por acción de la gravedad, la presión o los gradientes de tensiones dentro del fluido. La influencia de la presión puede considerarse a partir de su acción sobre las caras del cubo elemental. En la Fig. 2.2a se muestran las presiones actuantes en las caras en dirección x consideradas a partir del valor del centro de la celda, p y aproximadas mediante la expansión de Taylor de primer orden. Realizando la sumatoria de fuerzas resulta:

$$\sum F_x = \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.6)$$

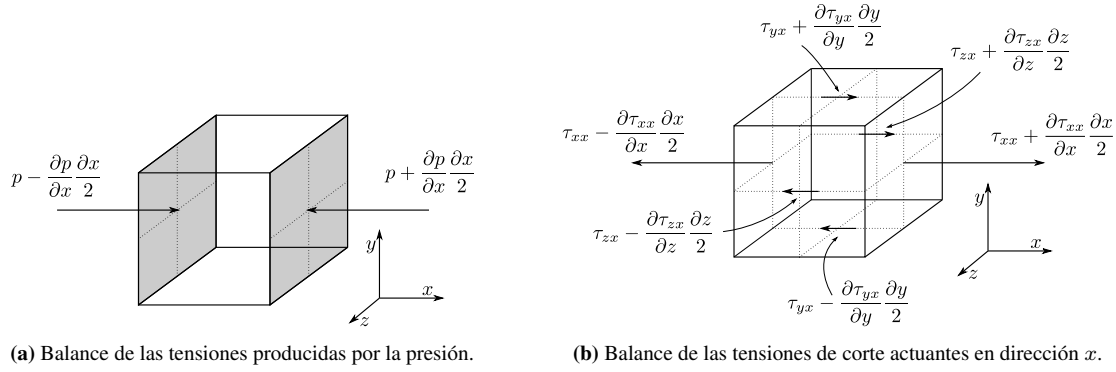


Figura 2.2: Balance de tensiones actuantes en el cubo elemental de fluido.

Mientras que en las otras direcciones se obtiene:

$$\sum F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz, \text{ y } \sum F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \quad (2.7)$$

Realizando la sumatoria de fuerzas de las tensiones tangenciales expandidas a primer orden tal como se muestran en la Fig. 2.2b, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \left[\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\partial x}{2} - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{2} \right] dy dz \\ &\quad + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\partial y}{2} - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{2} \right] dx dz \\ &\quad + \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\partial z}{2} - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{2} \right] dx dy \\ &= \frac{\tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

Igualando las expresiones obtenidas en la Ec. (2.5),

$$\rho \frac{Du}{Dt} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.9)$$

dividiendo por el volumen del elemento de fluido y expandiendo la expresión de la derivada total, se obtienen las expresiones conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes para coordenadas cartesianas:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (2.10)$$

Utilizando las Ecs. (2.1) y (2.2), la expresión se expande a:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Reordenando esta expresión, y recordando que por la hipótesis de fluido incompresible:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

Reescribiendo el lado izquierdo, considerando la densidad constante, el sistema de ecuaciones obtenido para las tres direcciones resulta:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

Este conjunto de ecuaciones en particular se puede aplicar a fluidos Newtonianos, incompresibles e isotérmicos. Sin embargo, aun con las simplificaciones realizadas, resultan imposibles de resolver de forma analítica y se requieren métodos aproximados o de hipótesis adicionales que permitan adecuar el sistema de ecuaciones al caso de estudio que se desea analizar.

2.2. Ecuación de Reynolds

En 1886, el profesor Osborne Reynolds [20] publica su análisis teórico sobre lubricación basado en los experimentos previamente realizados por Beauchamp Tower (1883, 1885) en cojinetes hidrodinámicos. En un principio, Reynolds planteó el acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento y de conservación de masa para un fluido viscoso. Por otra parte, despreció los efectos inerciales y gravitacionales dado que su influencia no era significativa respecto a la contribución de los efectos viscosos y restringió su análisis a un flujo incompresible.

En esta sección se describe la derivación de la ecuación general de Reynolds basada en las siguientes suposiciones claves:

- El fluido es Newtoniano
- El radio de curvatura de las superficies que contienen al fluido es mucho más grande que el espesor de la película lubricante, por lo que los efectos de curvatura pueden ser despreciados.
- Las fuerzas inerciales y de cuerpo son despreciables.
- El espesor de película es muy pequeño por lo que el flujo puede considerarse unidireccional.

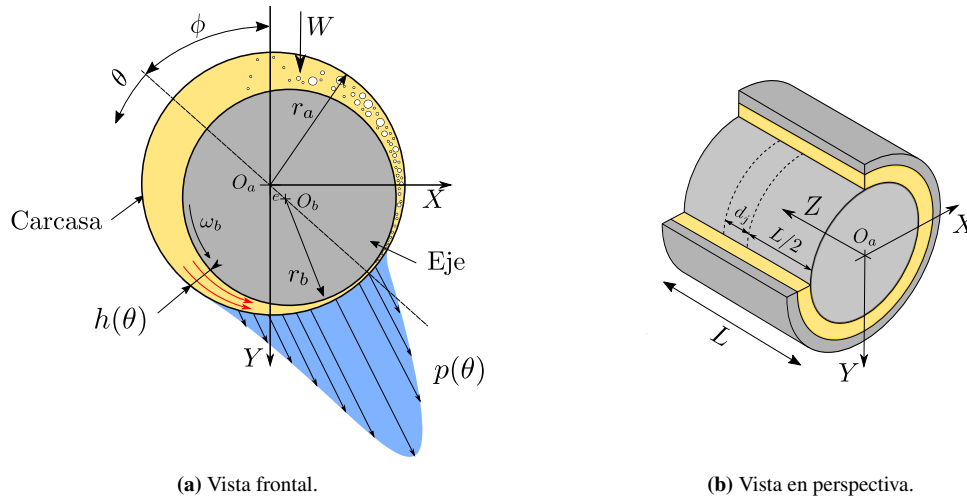


Figura 2.3: Geometría de un cojinete hidrodinámico.

- La presión del lubricante a través del espesor de película puede considerarse constante.
- El flujo es laminar y no hay deslizamiento entre las superficies y el lubricante.

En la Fig. 2.3a y 2.3b se muestra un cojinete hidrodinámico típico con sus parámetros geométricos. El eje rotante tiene un radio r_b y gira con una velocidad angular ω_b . La carcasa es fija y tiene un radio r_a . El huelgo medio c es determinado por la diferencia entre los radios de la carcasa y el muñón, $c = r_a - r_b$. El desplazamiento del centro del eje O_b con respecto a la posición concéntrica O_a se denomina excentricidad e . La superficie sólida del eje y la carcasa del cojinete forman un volumen convergente-divergente de espesor $h(\theta)$ y longitud L , lo que genera un aumento de la presión debido a la resistencia del fluido a fluir por una sección transversal cada vez más reducida.

Generalmente, la relación entre el huelgo medio y el radio en este tipo de cojinetes es del orden de 0.001 y, por lo tanto, tal como se mencionó anteriormente, el efecto de la curvatura es despreciable y puede considerarse un sistema de coordenadas cartesianas (O_a, x, y, z) para la solución de las ecuaciones (Fig. 2.3) [1–3]. Por otro lado, el sistema de coordenadas (O_a, X, Y, Z) se utiliza para describir la posición del centro de masa del muñón con respecto a un sistema inercial situado en el centro de la carcasa.

Para evaluar los términos de las ecuaciones de Navier-Stokes que pueden despreciarse en el caso de cojinetes hidrodinámicos, se requiere de un análisis dimensional del conjunto de ecuaciones utilizando las suposiciones planteadas al comienzo de esta Sección. Recordando que el balance de masa para un flujo incompresible (Ec.(2.3)) se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Las coordenadas espaciales pueden ser adimensionalizadas por medio de las siguientes igual-

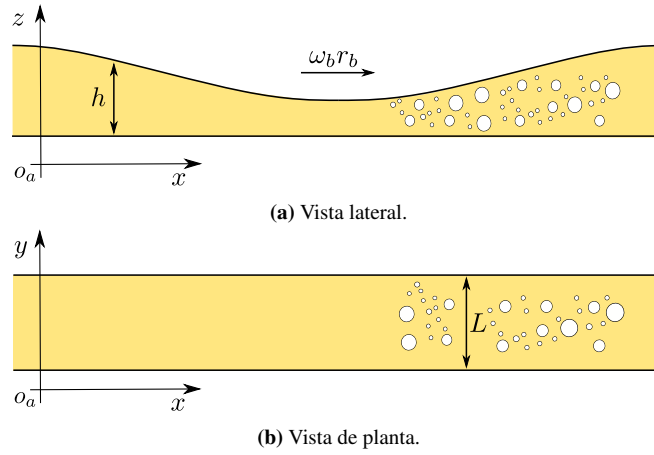


Figura 2.4: Esquema del cojinete hidrodinámico desenrollado.

dades:

$$\bar{x} = \frac{x}{r_b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r_b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{c} \quad (2.14)$$

La velocidad circunferencial u y axial v también pueden ser adimensionalizadas en términos de la velocidad superficial, $\omega_b r_b$ del rotor:

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega_b r_b}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega_b r_b} \quad (2.15)$$

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{r_b}{c}\right) \frac{1}{\omega_b r_b} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.16)$$

La adimensionalización se completa para la velocidad radial w , la presión p , el tiempo t y con la introducción del denominado Número de Reynolds Re que define la relación entre los efectos inerciales y los viscosos:

$$\bar{w} = \left(\frac{r_b}{c}\right) \frac{w}{\omega_b r_b}, \quad \bar{p} = Re \left(\frac{c}{r_b}\right) \frac{p}{\rho(\omega_b r_b)^2}, \quad \bar{t} = \omega_b t, \quad Re = \frac{\rho \omega_b r_b c}{\mu} \quad (2.17)$$

Sustituyendo las variables adimensionalizadas en las Ecs. (2.11)-(2.13) resulta:

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{c}{r_b}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} + \left(\frac{c}{r_b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ Re \left(\frac{c}{r_b}\right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} + \left(\frac{c}{r_b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ \left(\frac{c}{r_b}\right)^2 \left[\frac{c^2 \omega_b \rho}{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + Re \frac{c}{r_b} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} - \left(\frac{c}{r_b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Los términos inerciales toman relevancia cuando Re es mayor a 1000. En general, el estudio de cojinetes hidrodinámicos permite simplificar estos términos siempre y cuando se asegure que el valor del Re es suficientemente bajo. A su vez, los términos multiplicados por el cociente $(c/r_b)^2$ pueden ser claramente despreciados. De esta forma, las ecuaciones planteadas se reducen a:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}$$

A partir de estas expresiones se observa que cuando la relación entre el huelgo medio c y el radio del muñón r_b resulta muy chica, el gradiente de presiones en el espesor de la película lubricante se puede considerar despreciable, tal como se planteó en las hipótesis iniciales. Integrando las expresiones obtenidas en su forma dimensional a lo largo del eje z , se obtienen las ecuaciones que describen el perfil de velocidades:

$$u = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + A \frac{z}{\mu} + B \quad (2.18)$$

$$v = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{z}{\mu} + D \quad (2.19)$$

donde A, B, C y D corresponden a constantes de integración que se determinan según el problema planteado. Para esta situación, según lo mostrado por la Fig. 2.4, las condiciones de borde a ser utilizadas son las que se muestran a continuación:

$$\text{en } z = 0, \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{en } z = h, \begin{cases} u = \omega_b r_b \\ v = 0 \\ w = w_b \end{cases} \quad (2.20)$$

Se asume también que las superficies no experimentan un movimiento deslizante en la dirección y (axial). Evaluando las constantes de integración, surge la siguiente distribución de velocidad:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + \frac{z}{h} \omega_b r_b \quad (2.21)$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \quad (2.22)$$

En la Ec. (2.21) el perfil de velocidad en la dirección del movimiento contiene un término de

Poiseuille, que se debe al gradiente de presión en la dirección circunferencial x , y un término de Couette, que se debe enteramente al movimiento de las superficies, con un gradiente de presión nulo [3]. Por otro lado, la Ec. (2.22) representa la velocidad de flujo en la dirección axial y , o en otras palabras, representa el perfil de velocidad del líquido que se escapa por los laterales producto de una diferencia de presiones entre el interior y el exterior del cojinete. En ausencia de movimiento deslizante en esa dirección, este perfil de velocidad contiene solo un término tipo Poiseuille y ningún término dependiente de las velocidades. Sustituyendo en la Ec. (2.3), los perfiles de velocidad expresados en las Ecs. (2.21) y (2.22), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + \frac{z}{h} \omega_b r_b \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \right] + w_b = 0 \quad (2.23)$$

Integrando la Ec. (2.23) a lo largo del espesor de la película, se obtienen los caudales volumétricos en la dirección del deslizamiento y los caudales de fuga:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz = 0 \quad (2.24)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + \frac{z}{h} \omega_b r_b \right] dz + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \right] dz + \int_0^h w_b dz = 0 \quad (2.25)$$

Aplicando la regla de integración de Leibnitz [3] para la derivación de integrales:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dz = -f(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h f(x, y, z) dz \quad (2.26)$$

a las integrales de la Ec. (2.25), se tiene:

$$- \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - h^2) + \frac{h}{h} \omega_b r_b + \frac{\partial}{\partial x} q_x \right] - \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (h^2 - h^2) + \frac{\partial}{\partial x} q_y \right] + w_b = 0 \quad (2.27)$$

donde q_x y q_y , corresponden a los caudales volumétricos que circulan en dirección circunferencial y axial respectivamente y se calculan de la siguiente forma:

$$q_x = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + \frac{z}{h} \omega_b r_b dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} \omega_b r_b \quad (2.28)$$

$$q_y = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.29)$$

De esta manera resulta:

$$-\omega_b r_b \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} \omega_b r_b \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + w_b = 0 \quad (2.30)$$

Reordenando los términos se obtiene la expresión correspondiente a la Ecuación de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{\omega_b r_b}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + w_b \quad (2.31)$$

Esta expresión describe el campo de presiones p en la película lubricante para un cojinete hidrodinámico. El primer término del lado derecho de esta ecuación se denomina “*physical wedge*” y describe cómo se verá afectada la presión debido al efecto de arrastre del fluido en un volumen cuyo espesor de película es variable. El segundo término se refiere al efecto de “*squeeze*” producido por el acercamiento entre ambas superficies sólidas. Cuando estas superficies se encuentran acercándose, la presión aumenta debido al efecto de querer desplazar el fluido que está ocupando dicho espacio.

Las hipótesis planteadas para la obtención de esta expresión pueden ser expandidas para abarcar otras aplicaciones en particular, por ejemplo, considerar un fluido no-Newtoniano, efectos inerciales o rugosidad superficial. Puede observarse que la ecuación de Reynolds gobierna la presión generada en un fluido en un dominio confinado con una geometría determinada. Una vez que la presión es correctamente caracterizada, los otros parámetros: capacidad de carga, pérdidas por fricción y caudales, pueden ser predichos como consecuencia.

2.3. Soluciones analíticas

Para aplicar la Ecuación de Reynolds a la geometría de un cojinete hidrodinámico en un primer lugar es necesario describir el espesor de la película lubricante a través de alguna expresión que relacione este valor con la posición circunferencial. La Fig. 2.5, muestra esquemáticamente las relaciones geométricas que pueden plantearse si se analiza una vista en dirección axial considerando

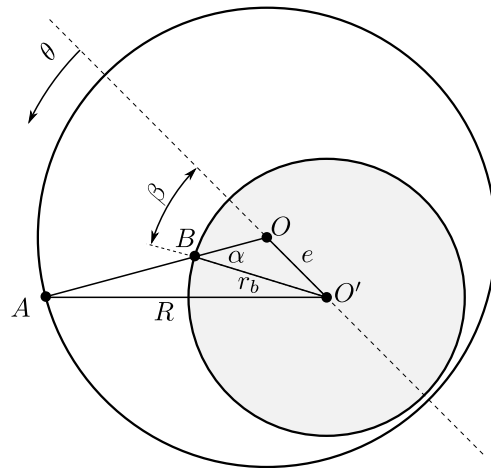


Figura 2.5: Detalle de la geometría del huelgo en cojinetes.

los radios de la carcasa y del rotor.

Considerando la regla de los senos en el triángulo $O'BO$ se obtiene:

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R}{\sin \theta} \quad (2.32)$$

Por lo tanto:

$$\sin \alpha = \frac{e}{R} \sin \theta \rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{e}{R} \sin \theta \right) \quad (2.33)$$

y, observando que $\beta = \theta - \alpha$, se puede despejar:

$$\overline{OB} = \frac{r_b}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha) = \frac{r_b}{\sin \theta} (\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha) \quad (2.34)$$

$$= r_b \left[\cos \alpha - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin^{-1} \left(\frac{e}{r_b} \sin \theta \right) \right] \quad (2.35)$$

$$= r_b \left[\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} - \frac{e}{r_b} \cos \theta \right] \quad (2.36)$$

$$= r_b \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{r_b} \right)^2 (\cos \theta)^2} - \frac{e}{r_b} \cos \theta \right] \quad (2.37)$$

Por otro lado, considerando:

$$h = \overline{OA} - \overline{OB} = (r_b + c) - \overline{OB} \quad (2.38)$$

$$= (r_b + c) - r_b \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{r_b} \right)^2 (\cos \theta)^2} - \frac{e}{r_b} \cos \theta \right] \quad (2.39)$$

Dado que el cociente e/r_b resulta muy pequeño, este término puede ser despreciado. Finalmente se obtiene:

$$h = r_b + c - r_b + e \cos \theta = c + e \cos \theta \quad (2.40)$$

$$h = c (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (2.41)$$

donde ε corresponde con la excentricidad relativa y se define como la relación entre la excentricidad e y el hueglo radial medio c . Cuanto más cerca se encuentre el muñón de la posición concéntrica, más cercano a 0 será el valor de ε , mientras que cuanto más cercano al contacto con la carcasa esté, más tenderá a 1. Este parámetro resultará fundamental para caracterizar el comportamiento del cojinete hidrodinámico.

2.3.1. Cojinete de longitud infinitamente larga

Analíticamente, la ecuación de Reynolds (Ec. (2.31)) presenta dos únicas soluciones aplicables a cojinetes ideales. La primera de ellas fue desarrollada por Sommerfeld en 1904 [21] para cojinetes de longitud infinitamente larga (*Infinite Long Journal Bearing* - ILJB). En este análisis se desprecia el efecto de la longitud real del cojinete de forma que se omiten los caudales de fuga laterales. En la práctica, esta condición teórica de funcionamiento puede describir aproximadamente bien en aquellos cojinetes cuya relación L/D sea mayor a 2. Considerando el estado estacionario ($w_b = 0$) y un cambio de coordenadas de forma que $x = r_b \theta$, se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\omega_b}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.42)$$

Integrando con respecto a θ y reorganizando:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu \omega_b r_b^2 \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -6\mu \omega_b r_b^2 c \varepsilon \frac{h - h_n}{h^3} \quad (2.44)$$

donde h_n es una constante de integración por determinar que cumple con la siguiente condición: $h = h_n$ donde $\partial p / \partial \theta = 0$. Sustituyendo el valor de h en el resultado anterior, y luego integrando nuevamente con respecto a θ , se obtiene:

$$p = 6\mu \omega_b \frac{r_b^2}{c^2} \int \left\{ \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h_n}{c} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right\} d\theta + C_1 \quad (2.45)$$

donde C_1 es también una constante de integración que debe ser determinada. Para la resolución de estas integrales, Sommerfeld [21] introdujo las siguientes relaciones mediante lo que es conocido como “variable de Sommerfeld” γ :

$$\cos \theta = \frac{\cos \gamma - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (2.46)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \gamma}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (2.47)$$

$$h = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \gamma} \quad (2.48)$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \gamma} d\gamma \quad (2.49)$$

Por lo tanto, las integrales pueden ser calculadas de la siguiente manera:

$$\int \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = \frac{(\gamma - \varepsilon \sin \gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{1.5}} \quad (2.50)$$

$$\int \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} d\theta = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{2.5}} \left(\gamma - 2\varepsilon \sin \gamma + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\gamma \right) \quad (2.51)$$

De esta forma se obtiene una distribución de presiones $p(\gamma)$ que resulta:

$$p(\gamma) = \frac{6\mu\omega_b r_b^2}{c^2} \left[\frac{\gamma - \varepsilon \sin \gamma}{(1 - \varepsilon^2)^{1.5}} - \frac{h_n}{c(1 - \varepsilon^2)^{2.5}} \left(\gamma - 2\varepsilon \sin \gamma + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\gamma \right) \right] + C_1$$

Las constantes de integración h_n y C_1 se determinan aplicando las condiciones de borde $p(0) = p_0$ y $p(\pi) = p_0$ con p_0 como presión de referencia. También, puede considerarse las siguientes condiciones de borde $p(0) = p_0$ y $p(2\pi) = p_0$ obteniéndose indistintos resultados. Por lo tanto,

$$C_1 = p_0 \quad (2.52)$$

$$h_m = \frac{2c(1 - \varepsilon^2)}{2 + \varepsilon^2} \quad (2.53)$$

Finalmente, la distribución de presiones como función de θ es:

$$p(\theta) = p_0 + \frac{12\mu\omega_b r_b^2}{c^2} \frac{\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (2.54)$$

Esta expresión se conocida como “Solución Full-Sommerfeld”. Cuando el valor de p_0 es diferente de 0, esta ecuación describe el comportamiento correspondiente a un lubricante presurizado de forma externa. Por otra parte, esta expresión describe un perfil de presiones antisimétrico respecto al punto de huelgo mínimo (Fig. 2.6) describiendo una región con presiones negativas, aún por debajo de la presión de vapor del lubricante, lo que resulta en una solución físicamente imposible.

Si se integran el campo de presiones sobre el área de contacto con el muñón (Fig. 2.7), se obtienen los valores de fuerza hidrodinámica en direcciones radial F_r y tangencial F_t , según la recta que une ambos centros del muñón y la carcasa (Ec. (2.55) y (2.56)).

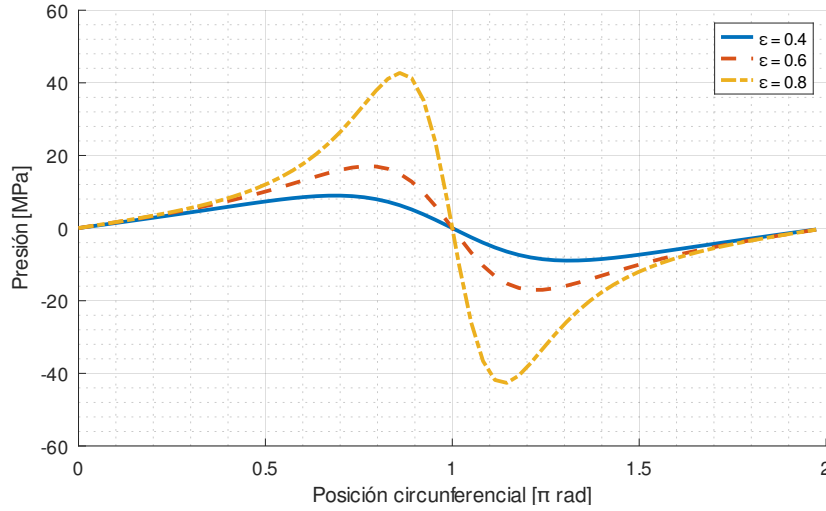


Figura 2.6: Solución Full-Sommerfeld incluyendo la región negativa del campo de presiones. ($\mu = 0.021$ Pa.s, $\omega_b = 314.15$ 1/s; $r_b = 25$ mm; $c = 50$ μ m, $\varepsilon = 0.4/0.6/0.8$)

$$F_r = r_b L \int_0^\theta p(\theta) \cos \theta d\theta \quad (2.55)$$

$$F_t = r_b L \int_0^\theta p(\theta) \sin \theta d\theta \quad (2.56)$$

Más allá de que la distribución de presiones utiliza condiciones de borde Sommerfeld, la integración de la presión puede volver a considerar dos situaciones diferentes. Integrando entre $0 < \theta < 2\pi$ se obtienen las expresiones de las fuerzas radial y tangencial para la condición Full-Sommerfeld (FS):

$$F_t = \frac{12\mu L \omega_b r_b^3}{c^2} \left[\frac{\varepsilon \pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad (2.57)$$

$$F_r = 0 \quad (2.58)$$

Puede observarse que en bajo esta condición, el cojinete responderá ante una carga externa con una fuerza hidrodinámica en dirección perpendicular a la de interés. Esto no es verdad en la realidad, dado que la presión de vapor del lubricante evita la formación del perfil de presiones antisimétrico que produce este comportamiento incorrecto.

Planteando de manera análoga, pero esta vez considerando únicamente la región positiva del campo de presiones entre $0 < \theta < \pi$ se obtienen las fuerzas para la denominada condición Half-Sommerfeld (HS). Este modelo es una primera aproximación al cálculo de un cojinete bajo efectos de cavitación de fluido. Integrando el perfil de presiones obtenido según las expresiones (2.55) y

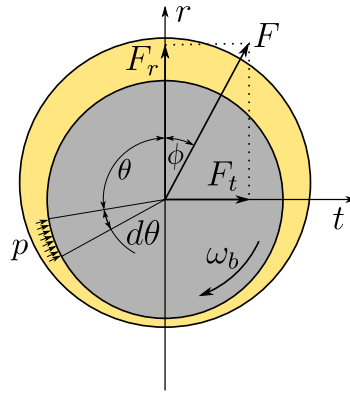


Figura 2.7: Fuerzas hidrodinámicas que actúan en un cojinete hidrodinámico.

(2.56) se obtiene:

$$F_t = \frac{12\mu r_b^3 L \omega_b}{c^2} \left[\frac{\varepsilon \pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad (2.59)$$

$$F_r = \frac{12\mu r_b^3 L \omega_b}{c^2} \left[\frac{2\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)} \right] \quad (2.60)$$

2.3.2. Solución de Sommerfeld transitoria

Si a diferencia del caso anterior se considera el movimiento del muñón dentro de la carcasa, deben considerarse los términos dinámicos en la deducción de las expresiones de la presión p y de la fuerza hidrodinámica resultante. La Fig. 2.8 esquematiza las velocidades que intervienen en el movimiento del muñón dentro de la carcasa con $\dot{\varepsilon}$ como la variación de la excentricidad en el tiempo. La posición angular del muñón con respecto al eje X se representa mediante el ángulo β y $\dot{\beta}$ es la velocidad de precesión alrededor del centro de la carcasa. A partir de estas relaciones, pueden obtenerse las siguientes expresiones para la velocidad del centro de masa del rotor O' :

$$u_b = r_b \omega_b \cos \alpha + \dot{\varepsilon} \sin \theta - e \frac{\partial \beta}{\partial t} \cos \theta \quad (2.61)$$

$$w_b = -r_b \omega_b \sin \alpha + \dot{\varepsilon} \cos \theta + e \frac{\partial \beta}{\partial t} \sin \theta \quad (2.62)$$

A partir de analizar la geometría:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{e \sin \theta}{r_a + \cos \theta} \quad (2.63)$$

dado que $r_a \approx r_b$ y $r_b \gg e \cos \theta$:

$$\sin \alpha = \frac{e}{r_a} \sin \theta \quad (2.64)$$

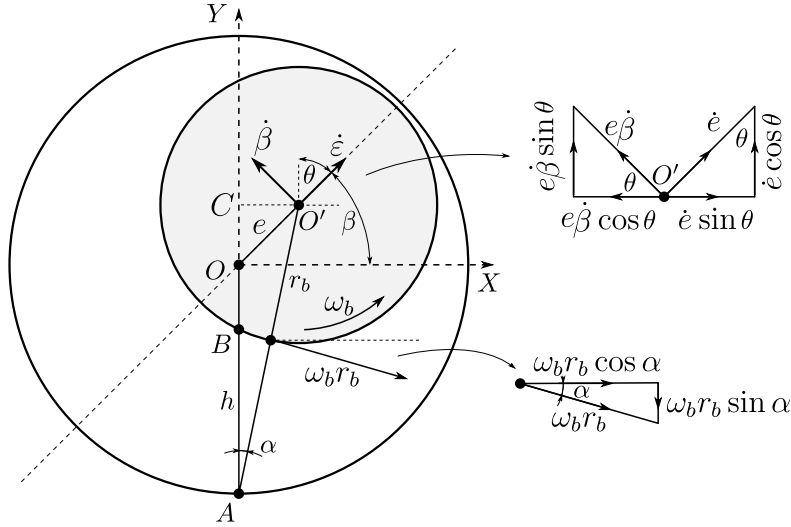


Figura 2.8: Descomposición de los vectores velocidad del cojinete hidrodinámico.

por lo tanto,

$$u_b = r_b \omega_b + \dot{e} \sin \theta - e \frac{\partial \beta}{\partial t} \cos \theta \quad (2.65)$$

$$w_b = -r_b \omega_b \frac{e}{r_b} \sin \theta + \dot{e} \cos \theta + e \frac{\partial \beta}{\partial t} \sin \theta \quad (2.66)$$

Reemplazando en la Ec. (2.31) y realizando el cambio de coordenadas $x = r_b \theta$ y $dx = r_b d\theta$:

$$\frac{1}{r_b^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{u_b}{2r_b} \frac{\partial h}{\partial \theta} + w_b \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + r_b^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = & -6\mu r_b \left(r_b \omega_b + \dot{e} \sin \theta - e \dot{\phi} \cos \theta \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \dots \\ & 12\mu r_b^2 \left(-\omega_b e \sin \theta + \dot{e} \cos \theta + e \dot{\phi} \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Analizando los términos del lado derecho, únicamente el primer, quinto y sexto término son de orden h , mientras que los demás son de orden h^2 y pueden ser despreciados. Por lo tanto, la expresión resultante es:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + r_b^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -6\mu r_b^2 \omega_b \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu r_b^2 \left(-\omega_b e \sin \theta + \dot{e} \cos \theta + e \dot{\phi} \sin \theta \right) \quad (2.69)$$

Reemplazando la derivada de h y reorganizando la expresión, se obtiene la Ecuación de Reynolds para cojinetes con efectos dinámicos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + r_b^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\mu r_b^2 c \left[\dot{e} \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega_b}{2} \right) \sin \theta \right] \quad (2.70)$$

A partir de integrar esta expresión al igual que en la sección anterior, el campo de presiones para la condición Full-Sommerfeld resulta:

$$p(\theta) = \frac{6\mu r^2}{c^2} \left[\frac{\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta) (2\dot{\phi} - \omega_b)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) \right] \quad (2.71)$$

y las consecuentes fuerzas radiales y tangenciales:

$$F_r = -\frac{12\mu L r^3}{c^2} \left[\frac{\dot{\varepsilon} \pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \quad (2.72)$$

$$F_t = \frac{12\mu L r^3}{c^2} \left[\frac{\varepsilon \pi (\dot{\phi} - \omega_b)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad (2.73)$$

Puede observarse que para la componente radial de la fuerza es dependiente de la variación temporal de la excentricidad $\dot{\varepsilon}$, mientras que la componente tangencial está relacionada con la velocidad de precesión $\dot{\phi}$. Para el caso de carga estática en condiciones de equilibrio ($\dot{\varepsilon} = 0$ y $F_r = 0$) y la expresión se reduce a la mostrada en la Ec. (2.58).

Las expresiones calculadas anteriormente, resultan de integrar el perfil de presiones considerando únicamente la región donde este es positivo y nulo en las regiones donde es igual a la presión de referencia con límites de integración entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$. Sin embargo, cuando se consideran los efectos transitorios, la expresión que se obtiene de la integración del campo de presiones depende de los límites de integración. Las fuerzas calculadas a través del criterio Half-Sommerfeld (Ecs. (2.60) y (2.59)) puede no resultar ser el indicado para situaciones donde $\varepsilon \rightarrow 1$ [89]. Si se utilizan las condiciones de borde de Gumbel, $p(0) = p(\pi)$, $p \geq 0$, y se integra en todo el dominio ($0 < \theta < 2\pi$) aparece un término adicional del lado derecho de la expresión, tal como mostró Trumpler [89].

Realizando las sustituciones e integrales correspondientes en la Ec. (2.54) para estas nuevas definiciones se obtiene:

$$p = \frac{6\mu r^2}{c^2} \left\{ \frac{\varepsilon (2\dot{\phi} - \omega_b)}{2(2 + \varepsilon^2)} \frac{\sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \dot{\varepsilon} \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{\varepsilon (4 + 3\varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{3/2}(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \cdots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \arccos \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) \right] \right\}$$

Realizando la integración del campo de presiones presente en la película fluida según las Ecs. (2.55) y (2.56), se obtienen las llamadas fuerzas hidrodinámicas para la condición de borde de

Gümbel:

$$F_r = -\frac{6\mu r^3 L}{c^2} \left[\frac{2\varepsilon^2(\omega_b - 2\dot{\phi})}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{2\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right) \right] \quad (2.74)$$

$$F_t = \frac{6\mu r^3 L}{c^2} \left[\frac{\pi\varepsilon(\omega_b - 2\dot{\phi})}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} + \frac{4\dot{\varepsilon}}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} \right] \quad (2.75)$$

Cabe destacar que, bajo estas condiciones de borde planteadas por Trumpler, la principal diferencia se obtiene con un término adicional que aparece en la respuesta dinámica de la Ec. (2.74). Esto conduce a que en condiciones de equilibrio, el campo de presiones resultantes es idéntico, pero difieren cuando hay presencia del movimiento del centro de masa del eje.

2.3.3. Cojinetes de longitud infinitamente corta

La teoría de cojinetes cortos (*Infinite Short Journal Bearing*, ISJB) fue desarrollada en 1952 por Ocvirk [22] principalmente para cojinetes con una relación $L/D < 0.25$. Esta solución entrega resultados más que satisfactorios desde un punto de vista ingenieril y es ampliamente utilizada para el diseño de estos componentes de máquina.

Básicamente, cuando la relación L/D es muy pequeña, el cojinete puede aproximarse a una geometría infinitamente corta en la cuál el flujo lateral debido al gradiente de presiones axial se vuelve predominante, frente a un flujo circunferencial que pierde relevancia. Por lo tanto, la ecuación de Reynolds dinámica (2.70) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\mu c \left[\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega_b}{2} \right) \sin \theta \right] \quad (2.76)$$

Integrando con respecto a y , se obtiene:

$$h^3 \frac{\partial p}{\partial y} = 12\mu c \left[\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega_b}{2} \right) \sin \theta \right] z + A \quad (2.77)$$

Integrando nuevamente,

$$p = \frac{12\mu c}{h^3} \left[\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon \left(\dot{\phi} - \frac{\omega_b}{2} \right) \sin \theta \right] \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{h^3} y + C_2 \quad (2.78)$$

Aplicando como condiciones de borde $p = p_0$ en $y = \pm b/2$, las constantes adoptan los siguientes valores $C_1 = b^2/4$ y $C_2 = p_0$.

$$p = p_0 + \frac{6\mu}{c^2} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\left(\frac{\omega_b}{2} - \dot{\phi} \right) \varepsilon \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] \quad (2.79)$$

Para el caso estático, donde $\dot{\phi} = 0$ y $\dot{\varepsilon} = 0$ la expresión se reduce a:

$$p = p_0 + \frac{3\mu\omega_b}{c^2} \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] \quad (2.80)$$

Realizando la integración del campo de presiones sobre la superficie del muñón tal como se mostró en las Ecs. (2.55) y (2.56), se obtienen las fuerzas en dirección radial y tangencial:

$$F_r = -\frac{\mu r_b L^3}{c^2} \left[\frac{(\omega_b - 2\dot{\phi})\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)\dot{\varepsilon}}{2(1 - \varepsilon^2)^{2.5}} \right] \quad (2.81)$$

$$F_t = \frac{\mu r_b L^3}{c^2} \left[\frac{(\omega_b - 2\dot{\phi})\pi\varepsilon}{4(1 - \varepsilon^2)^{1.5}} + \frac{2\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right] \quad (2.82)$$

2.4. Características estáticas

El punto de equilibrio de un cojinete hidrodinámico se alcanza cuando las fuerzas hidrodinámicas logran equiparar a las cargas externas y la velocidad de movimiento del rotor dentro de la carcasa puede considerarse despreciable. Para definir el punto de equilibrio, se puede asumir que existe una carga externa aplicada en dirección vertical a lo largo del eje $-Y$ (Recordar el sistema de referencia O_aXYZ , de la Fig. 2.3). Por lo tanto, la resultante de la reacción está directamente colocada en $+Y$ y la posición de equilibrio viene definida por una excentricidad relativa ε y un ángulo de elevación ϕ , que es coincidente con la posición del espesor mínimo de película. La excentricidad relativa de equilibrio será aquella donde la resultante de la sumatoria de las fuerzas radial y tangencial sea igual a la carga externa aplicada W .

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = W \quad (2.83)$$

Por su parte, el ángulo de elevación vendrá definido por la siguiente expresión:

$$\tan \phi = -\frac{F_t}{F_r} \quad (2.84)$$

De estas relaciones y las expresiones obtenidas en las secciones anteriores para calcular el valor de las fuerzas, puede demostrarse que a cada valor de ε , le corresponderá un único ángulo de elevación tal como se muestra en la Fig. 2.9. Para cojinetes infinitamente largos, el ángulo de elevación se calcula tal como se muestra en la Ec. (2.85), mientras que para cojinetes infinitamente

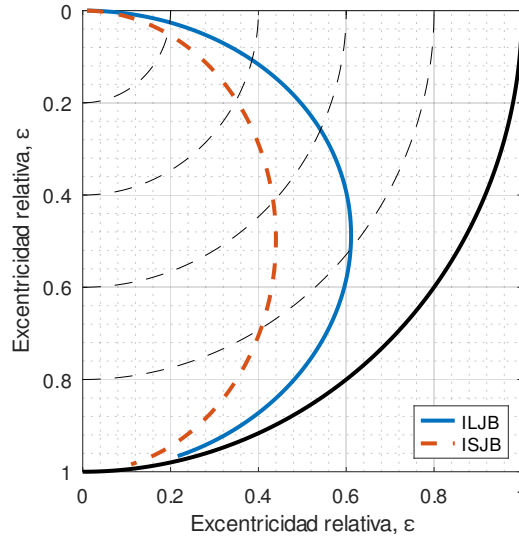


Figura 2.9: Conjunto de posiciones de equilibrio teóricas para cojinetes de longitud infinitamente larga (ILJB) y corta (ISJB).

cortos se calcula como se muestra en la Ec. (2.86) [1, 3].

$$\phi_{ILJB} = \arctan \left(\frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2 \varepsilon} \right) \quad (2.85)$$

$$\phi_{ISJB} = \arctan \left(\frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{4 \varepsilon} \right) \quad (2.86)$$

La línea que une todos los posibles puntos de equilibrio de un cojinete se denomina “Journal Locus” y muestra que en operación con elevadas cargas, bajas velocidades de rotación o lubricantes de baja viscosidad, el ángulo de elevación tiende a 0. Para cargas pequeñas, elevadas velocidades de giro o fluidos de alta viscosidad, el muñón se desplaza hacia el centro del cojinete y su posición es ortogonal a la carga aplicada ($\phi = 90^\circ$) [90]. Este comportamiento peculiar es la causa de la inestabilidad rotodinámica, como se discutirá en secciones posteriores.

Por otro lado, puede definirse un número adimensional característico para un cojinete hidrodinámico en un determinado régimen de funcionamiento. Este parámetro es denominado “número de Sommerfeld” S y es muy importante en el análisis de la lubricación, porque permite simplificar múltiples condiciones de funcionamiento en un único valor comparable entre cojinetes. El parámetro S (Ec. (2.89)) mide la importancia de la presión característica del cojinete P_c (Ec. (2.87)), respecto de la presión promedio P_m , que se obtiene al considerar la carga externa actuando sobre el área proyectada del cojinete (Ec. (2.88)). Un menor valor de S señala, por lo tanto, no

solo mayor carga externa W para una dada P_c , si no también una mayor excentricidad [23].

$$P_c = N\mu \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 = \frac{\omega_b \mu}{2\pi} \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \quad (2.87)$$

$$P_m = \frac{W}{2r_b L} \quad (2.88)$$

$$S = \frac{\mu \omega_b}{2\pi P_m} \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 = \frac{\mu \omega_b r_b L}{\pi W} \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \quad (2.89)$$

En cojinetes cortos, la utilización de un número de Sommerfeld modificado S_s es físicamente más apropiado dado que considera la influencia de la longitud L [91]. Este parámetro corregido es definido como:

$$S_s = S \left(\frac{L}{D}\right)^2 = \frac{\mu \omega_b r_b L}{4\pi W} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \quad (2.90)$$

Por otra parte, a partir de conocer los valores de las componentes de la fuerza en función de la excentricidad relativa para los cojinetes de longitud infinitamente larga (ILJB) y corta (ISJB) también pueden obtenerse las siguientes relaciones [1, 4]:

$$S = \frac{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon\sqrt{4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}} \quad (2.91)$$

$$S_s = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\pi\varepsilon\sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}} \quad (2.92)$$

2.5. Comportamiento dinámico de cojinetes

La respuesta dinámica de un cojinete hidrodinámico puede evaluarse mediante dos enfoques: lineal y no lineal. En el análisis lineal, las fuerzas hidrodinámicas se expresan mediante coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenidos alrededor de una posición de equilibrio, lo que permite describir el comportamiento del sistema mediante ecuaciones linealizadas válidas únicamente para pequeñas perturbaciones [92]. En contraste, el análisis no lineal considera la dependencia completa de las fuerzas hidrodinámicas con la posición y velocidad del rotor, resolviendo en cada instante la ecuación de Reynolds y las ecuaciones del movimiento. Este enfoque captura efectos transitorios, grandes desplazamientos y fenómenos inestables que no pueden representarse adecuadamente con una formulación linealizada.

Para calcular el movimiento del eje, se emplea la dinámica del centro de masa. En este enfoque, la aceleración del centro de masa del rotor queda determinada por la suma de las fuerzas que actúan

sobre él:

$$F_X = m\ddot{X} \quad (2.93)$$

$$F_Y + W = m\ddot{Y} \quad (2.94)$$

donde m es la masa del rotor, W es la carga externa aplicada y F_X , F_Y , $\ddot{X}$ y $\ddot{Y}$ se corresponden con la fuerza hidrodinámica y la aceleración respectivamente teniendo como referencia un sistema inercial fijo (O_a, X, Y, Z) tal como se mencionó en la Fig. 2.3.

2.5.1. Linealización de la dinámica del cojinete

El comportamiento dinámico de los cojinetes hidrodinámicos puede abordarse desde una mirada simplificada considerando su efecto a través de constantes elásticas K y de amortiguamiento C (Fig. 2.10). El valor de estas constantes dependerá de los parámetros de funcionamiento del rotor y de las propiedades físicas del lubricante [1]. Para realizar la linealización es necesario considerar pequeños desplazamientos del eje rotante respecto de un punto de equilibrio definido por ε_o , ϕ_o , las fuerzas producidas por la película de fluido pueden ser expandidas en series de Taylor [1] obteniéndose las relaciones que se muestran en las Ecs. (2.95) y (2.96).

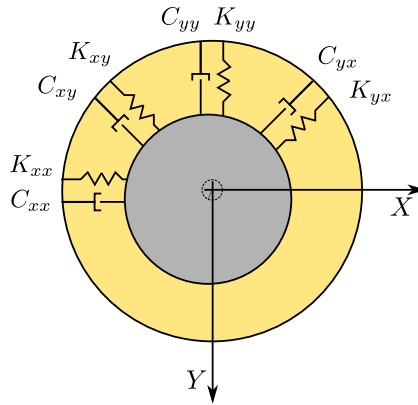


Figura 2.10: Esquema de un cojinete hidrodinámico como un sistema masa-resorte-amortiguador.

$$F_X = \frac{\partial F_X}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_X}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} + \frac{\partial F_X}{\partial \ddot{X}} \Delta \ddot{X} + \frac{\partial F_X}{\partial \ddot{Y}} \Delta \ddot{Y} \quad (2.95)$$

$$F_Y = \frac{\partial F_Y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_Y}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} + \frac{\partial F_Y}{\partial \ddot{X}} \Delta \ddot{X} + \frac{\partial F_Y}{\partial \ddot{Y}} \Delta \ddot{Y} \quad (2.96)$$

donde se desprecian los diferenciales de orden superior y se definen a los coeficientes elásticos K

y de amortiguamiento C como:

$$\begin{aligned} K_{xx} &= -\frac{\partial F_X}{\partial X} & K_{xy} &= -\frac{\partial F_X}{\partial Y} & K_{yx} &= -\frac{\partial F_Y}{\partial X} & K_{yy} &= -\frac{\partial F_Y}{\partial Y} \\ C_{xx} &= -\frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} & C_{xy} &= -\frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} & C_{yx} &= -\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} & C_{yy} &= -\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \end{aligned}$$

De esta forma, el sistema linealizado para las fuerzas hidrodinámicas queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \mathbf{X} - \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{K}_b \mathbf{X} - \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{X}}$$

donde $\mathbf{K}_b$ y $\mathbf{C}_b$ representan las matrices de rigidez y amortiguamiento del cojinete, respectivamente, mientras que $\mathbf{X}$ y $\dot{\mathbf{X}}$ se corresponden con el vector de posición y de velocidad del centro de masa del muñón. Los coeficientes K_{XX} , K_{YY} son conocidos como coeficientes de rigidez directos, mientras que los coeficientes K_{XY} y K_{YX} son referenciados como coeficientes de rigidez cruzados. Debe señalarse que los coeficientes de fuerza definidos permiten expresar las fuerzas dinámicas del cojinete de película fluida en términos de los parámetros mecánicos fundamentales: K , C . Sin embargo, esto no implica que dichos coeficientes deban ajustarse al comportamiento habitualmente esperado. Por ejemplo, los coeficientes de amortiguamiento “viscoso” pueden ser negativos, es decir, no disipativos, y los coeficientes de rigidez pueden ser no restaurativos o no conservativos [90].

Para determinar analíticamente los valores de estos coeficientes es necesario realizar un análisis de la variación de las fuerzas en las direcciones radial y tangencial a través de una perturbación infinitesimal. En la Fig. 2.11 se observa el cojinete en su posición de equilibrio O' con su correspondiente excentricidad ε_o y ángulo de elevación ϕ_o . Las componentes de la fuerza hidrodinámica en dirección radial y tangencial para la posición de equilibrio se representan como F_{ro} y F_{to} respectivamente.

Al introducirse una perturbación, la nueva posición de equilibrio se corresponde con $\phi = \phi_o + \Delta\phi$ y $\varepsilon = \varepsilon_o + \Delta\varepsilon$. Esta nueva posición implica la aparición de una velocidad del centro de masa en dirección radial $\dot{\varepsilon}$ y tangencial $\varepsilon\dot{\phi}$. Las componentes instantáneas de la fuerza hidrodinámica respecto al nuevo sistema de referencia perturbado se referencian como F^* . Por lo tanto, se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} F_r^* \\ F_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\phi & -\sin \Delta\phi \\ \sin \Delta\phi & \cos \Delta\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ F_t \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Para pequeños desplazamientos se obtiene que: $\cos \Delta\phi = 1$ y $\sin \Delta\phi = \Delta\phi$. Por ende, la

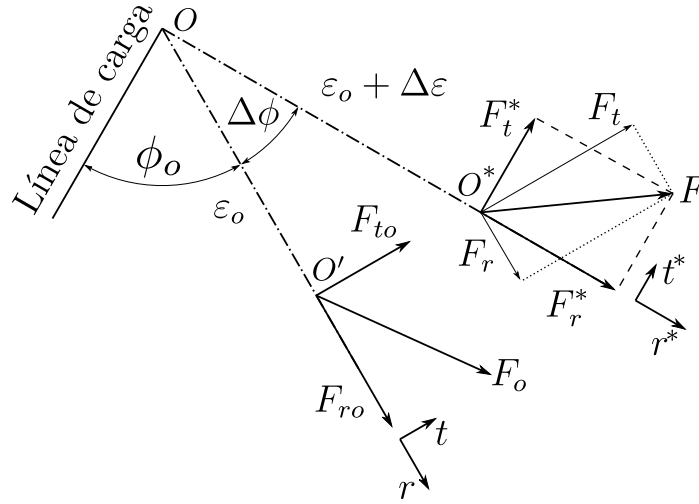


Figura 2.11: Descomposición de las fuerzas en cojinetes hidrodinámicos.

relación mostrada en (2.97) se reduce a:

$$F_r^* = F_r - F_t \Delta\phi \quad (2.98)$$

$$F_t^* = F_t + F_r \Delta\phi \quad (2.99)$$

Dado que se busca analizar la variación de la fuerza respecto del punto de equilibrio, es necesario realizar la siguiente consideración:

$$\Delta F_r = F_r^* - F_{ro} = F_r - F_t \Delta\phi - F_{ro} \quad (2.100)$$

$$\Delta F_t = F_t^* - F_{to} = F_t + F_r \Delta\phi - F_{to} \quad (2.101)$$

Para determinar el valor de la fuerza instantánea en la posición perturbada, de la misma forma que para el análisis en coordenadas cartesianas, se realiza una expansión en series de Taylor. En consecuencia, se obtienen las siguientes expresiones:

$$F_r^* = F_{ro} + \frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \varepsilon \Delta\phi + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta\dot{\varepsilon} + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{\phi}} \varepsilon \Delta\dot{\phi} \quad (2.102)$$

$$F_t^* = F_{to} + \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{\partial F_t}{\partial \phi} \varepsilon \Delta\phi + \frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta\dot{\varepsilon} + \frac{\partial F_t}{\partial \dot{\phi}} \varepsilon \Delta\dot{\phi} \quad (2.103)$$

Reemplazando (2.102) en (2.100) y (2.103) en (2.100), se obtienen las expresiones de la fuerza hidrodinámica para un punto en cercanías del punto de equilibrio en coordenadas radiales y

tangenciales, tal como se muestra a continuación:

$$F_r = \frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \left(\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \phi} - \frac{F_t}{\varepsilon} \right) \varepsilon \Delta \phi + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\phi}} \varepsilon \Delta \dot{\phi} \quad (2.104)$$

$$= K_{rr} \Delta \varepsilon + K_{rt} \varepsilon \Delta \phi + C_{rr} \Delta \dot{\varepsilon} + C_{rt} \varepsilon \Delta \dot{\phi}$$

$$F_t = \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \Delta \varepsilon + \left(\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \phi} + \frac{F_r}{\varepsilon} \right) \varepsilon \Delta \phi + \frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}} \Delta \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\phi}} \varepsilon \Delta \dot{\phi} \quad (2.105)$$

$$= K_{tr} \Delta \varepsilon + K_{tt} \varepsilon \Delta \phi + C_{tr} \Delta \dot{\varepsilon} + C_{tt} \varepsilon \Delta \dot{\phi}$$

Finalmente, la relación entre las expresiones en el sistemas de coordenadas fijo (O, X, Y, Z) y el relativo a la posición del centro del cojinete con orientación radial y tangencial (O, r, t, Z) se obtiene a través de la siguiente matriz de rotación:

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_o & -\sin \phi_o \\ \sin \phi_o & \cos \phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rt} \\ K_{tr} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_o & \sin \phi_o \\ -\sin \phi_o & \cos \phi_o \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$= \mathbf{Q} \mathbf{K}_{(r, t)} \mathbf{Q}'$$

$$\begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_o & -\sin \phi_o \\ \sin \phi_o & \cos \phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_o & \sin \phi_o \\ -\sin \phi_o & \cos \phi_o \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$= \mathbf{Q} \mathbf{C}_{(r, t)} \mathbf{Q}'$$

Considerando las soluciones del campo de presiones presentadas previamente para cojinetes infinitamente largos, y teniendo en cuenta las condiciones de borde de Full-Sommerfeld (Ecs. (2.57) y (2.58)), Half-Sommerfeld (Ecs. (2.59) y (2.60)) y Gumbel (Ecs. (2.74) y (2.75)), se procede al cálculo de los coeficientes dinámicos. Aplicando las derivadas indicadas en las definiciones de dichos coeficientes, se obtienen expresiones analíticas cuyos resultados se resumen en la Tabla 2.1.

En la literatura de referencia en el tema, es común expresar los coeficientes en su forma adimensional. Para ello, se consideran las siguientes relaciones:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij} c}{W} \quad (2.108)$$

$$c_{ij} = \frac{C_{ij} c \omega_b}{W} \quad (2.109)$$

donde i, j se corresponden con los índices referidos a las direcciones r, t . A partir de lo planteado en la Ec. (2.89), puede obtenerse una expresión únicamente dependiente de la excentricidad

Coeficientes	Full-Sommerfeld	Half-Sommerfeld	Gümbel
$k_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon}$	0	$\frac{-24\varepsilon(\varepsilon^4 + 2)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^2}$	$\frac{-24\varepsilon(\varepsilon^4 + 2)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^2}$
$k_{rt} = -\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\phi}} + \frac{F_t}{\varepsilon}$	$\frac{-12\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$	$\frac{-6\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$	$\frac{-6\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$
$k_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon}$	$\frac{-12\pi(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)}{(2 + \varepsilon^2)^2(1 - \varepsilon^2)^{1.5}}$	$\frac{6\pi(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)}{(2 + \varepsilon^2)^2(1 - \varepsilon^2)^{1.5}}$	$\frac{6\pi(2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4)}{(2 + \varepsilon^2)^2(1 - \varepsilon^2)^{1.5}}$
$k_{tt} = -\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\phi}} - \frac{F_r}{\varepsilon}$	0	$\frac{-12\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}$	$\frac{-12\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}$
$c_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}}$	$\frac{-12\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{1.5}}$	$\frac{-6\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{1.5}}$	$\frac{-12}{(1 - \varepsilon^2)^{1.5}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \varepsilon^2)} \right]$
$c_{rt} = -\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\phi}}$	0	$\frac{24\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}$	$\frac{24\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}$
$c_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}}$	0	$\frac{8}{(\varepsilon - 1)(1 - \varepsilon^2)^2}$	$\frac{24\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}$
$c_{tt} = -\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\phi}}$	$\frac{-24\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$	$\frac{-12\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$	$\frac{-12\pi}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{0.5}}$

Tabla 2.1: Coeficientes dinámicos para cojinetes de longitud infinitamente larga (ILJB).

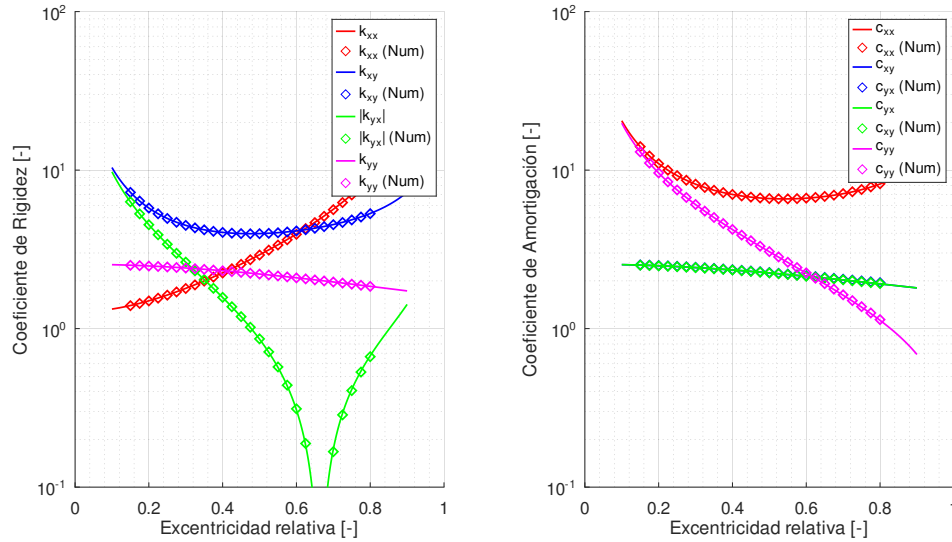
relativa a través de utilizar el Número de Sommerfeld correspondiente a cada tipo de cojinete.

Se observa que los coeficientes de rigidez dependen tanto de la viscosidad del lubricante como de la velocidad de rotación, mientras que los coeficientes de amortiguamiento no presentan dependencia con la velocidad de rotación. En consecuencia, en ausencia de rotación, el cojinete no desarrolla rigidez. Por otro lado, los coeficientes obtenidos bajo la condición de borde Gümbel únicamente difieren de los obtenidos mediante la condición de borde Half-Sommerfeld en el término c_{rr} . Los coeficientes mostrados en la Tabla 2.1 fueron calculados para el desarrollo de esta tesis, debido a que en la bibliografía de referencia utilizada se encontraban con errores.

De la misma forma se pueden obtener los coeficientes dinámicos para cojinetes de longitud infinitamente corta los cuales se detallan en la Tabla 2.2. La Fig. 2.12 muestra la dependencia de estos coeficientes con la excentricidad.

La Fig. 2.12 muestra la variación de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para coordenadas cartesianas fijas $OXYZ$ considerando un cojinete de longitud infinitamente corta. A su vez, se indican con rombos los valores de coeficientes obtenidos a través de simulación numérica. Por otro lado, la Fig. 2.13 muestra los coeficientes K y C para diferentes relaciones L/D obteni-

Coeficientes	Ocvirk-Gümbel	Coeficientes	Ocvirk-Gümbel
$k_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon}$	$\frac{2\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$c_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varepsilon}}$	$\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{2.5}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$k_{rt} = -\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \phi} + \frac{F_t}{\varepsilon}$	$\frac{\pi}{4(1-\varepsilon^2)^{1.5}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$c_{rt} = -\frac{\partial F_r}{\varepsilon \partial \dot{\phi}}$	$\frac{-2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$k_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon}$	$-\frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{4(1-\varepsilon^2)^{2.5}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$c_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial \dot{\varepsilon}}$	$\frac{-2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$
$k_{tt} = -\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \phi} - \frac{F_r}{\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2$	$c_{tt} = -\frac{\partial F_t}{\varepsilon \partial \dot{\phi}}$	$\frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{1.5}} \left(\frac{L}{D}\right)^2$

Tabla 2.2: Coeficientes dinámicos para cojinetes de longitud infinitamente corta (ISJB).**Figura 2.12:** Coeficientes en función de la excentricidad relativa para ISJB.

dos de forma numérica y como tienden a los valores predichos por las expresiones analíticas de la teoría ILJB cuando $L/D \rightarrow \infty$ y a ISJB cuando $L/D \rightarrow 0$.

2.6. Ecuación de Reynolds para un flujo bifásico - dynCav

Tal como se ha comentado previamente, la conservación de la masa en los resolvedores numéricos es un tema que ha sido discutido en la literatura, y que tiene una importancia fundamental para la estabilidad numérica de las herramientas típicas de flujo bifásico. Especialmente en flujos cavitados y análisis de cojinetes hidrodinámicos bajo cargas dinámicas o con superficies texturizadas como es el caso de análisis de esta tesis [8, 27, 33, 93]. Además, los modelos numéricos disponibles se basan predominantemente en métodos numéricos de primer orden y hay una falta de

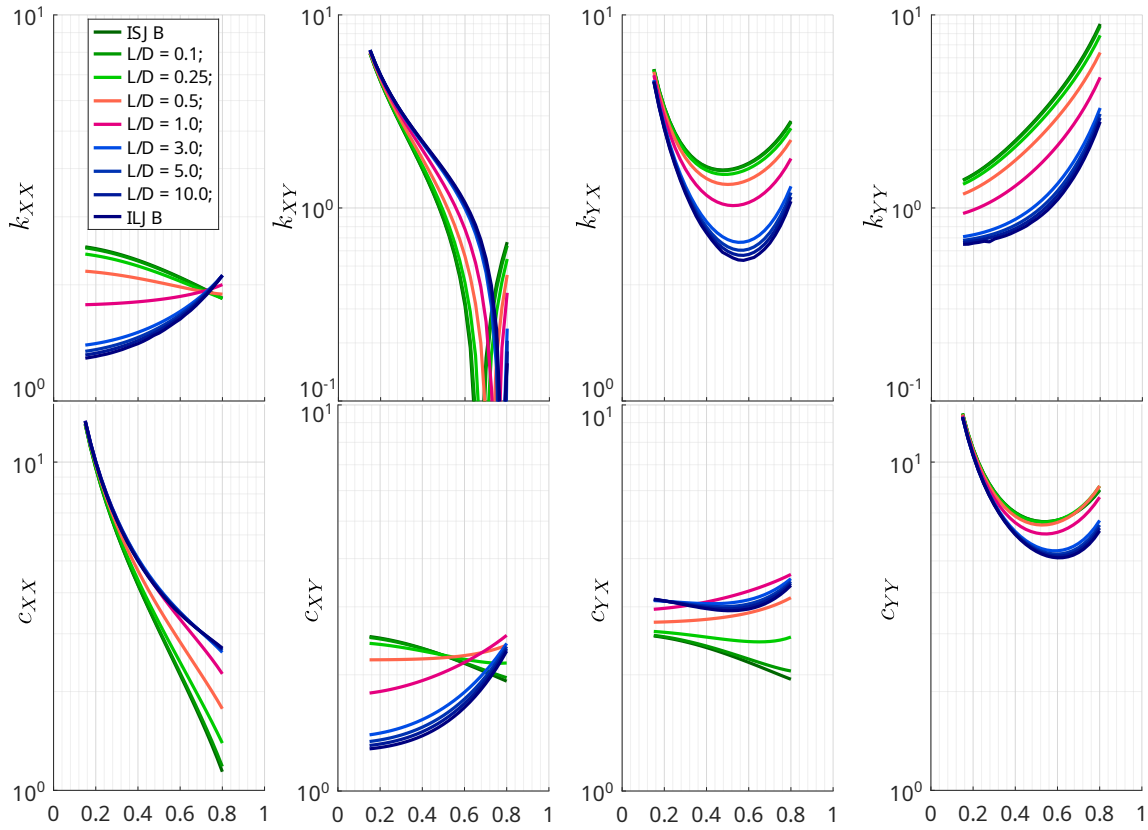


Figura 2.13: Coeficientes en función de la excentricidad para diferentes relaciones L/D obtenidas de forma numérica.

análisis sobre la convergencia de los métodos empleados. Es por ello que se consideró la necesidad de desarrollar un modelo físico capaz de asegurar la conservación de la masa a partir de los principios básicos de la lubricación hidrodinámica incluyendo un término de cambio de fase derivado a partir de la ecuación de Rayleigh-Plesset.

El modelo propuesto considera la película lubricante como un medio continuo, utilizando las hipótesis clásicas del flujo de lubricación. Dada la presencia de vapor y/o burbujas de aire dentro del lubricante, como resultado de la cavitación o de gases preexistentes, es necesario formular ecuaciones para el flujo que tengan en cuenta ambas fases y el intercambio de masa entre ellas. La cavitación se considera como el crecimiento y la desintegración de un número constante n_b de microburbujas de gas o vapor ya existentes en el lubricante [64]. Estas burbujas, idealmente esféricas, también se consideran un medio continuo y se dispersan de manera homogénea por todo el dominio de interés, dando lugar así a un modelo interpenetrado de dos fases.

En la Fig. 2.14 se observa que el crecimiento de las burbujas se aproxima como un cambio en la fracción volumétrica de líquido α_l en la celda. De esta manera, las propiedades del fluido en la celda se ven afectadas a través del parámetro α sin necesidad de considerar un límite físico entre las fases, como es habitual en los modelos de mezcla [94]. La cantidad de líquido, vapor y/o gas se considera a través de las fracciones volumétricas α_l y $\alpha_{v,g}$ respectivamente, y su distribución

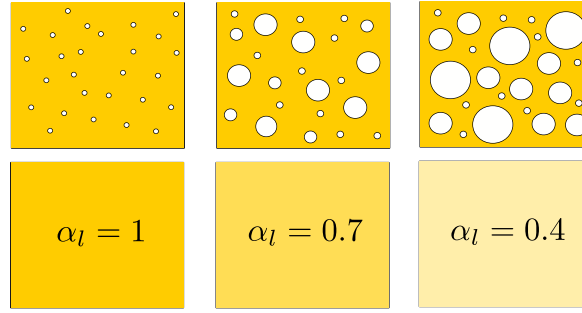


Figura 2.14: Efecto de las burbujas en las propiedades de la mezcla

se calcula utilizando una ecuación de transporte para α_l así como una ley de cierre, $\alpha_l + \alpha_{v,g} = 1$. Dado que se conoce el volumen total de cada fase y el número de burbujas existentes, se puede determinar el radio de cada una de ellas. De esta manera, un radio de burbuja único R corresponde a un determinado valor de α_l . El modelo se propone como isotérmico e incompresible, por lo que las propiedades de cada fluido son constantes. Las ecuaciones necesarias para el modelo de mezcla propuesto se escriben siguiendo la nomenclatura presentada en la Fig. 2.3a y la Fig. 2.3b, que muestran un cojinete hidrodinámico típico con sus referencias geométricas.

De igual manera que la ecuación de Reynolds previamente desarrollada es necesario considerar inicialmente el balance de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.110)$$

Al plantear esta ecuación para la fase líquida (indicada con el subíndice l) y para la fase de vapor o gas (indicada con el subíndice v o g) y teniendo en cuenta el intercambio de masa, se obtienen expresiones que incluyen un término fuente que corresponde a las tasas de evaporación S_{α_l} y condensación S_{α_v} . Se considera a su vez que la velocidad relativa entre fases es nula [60].

$$\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_l \rho_l \vec{V}) = S_{\alpha_l} \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \alpha_v \rho_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_v \rho_v \vec{V}) = S_{\alpha_v} = -S_{\alpha_l} \quad (2.112)$$

Dividiendo ambas expresiones por la correspondiente densidad y sumando resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha_l + \alpha_v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_l \vec{V} + \alpha_v \vec{V}) &= \left(\frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} - \frac{S_{\alpha_l}}{\rho_v} \right) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_m &= \left(\frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} - \frac{S_{\alpha_l}}{\rho_v} \right) \end{aligned}$$

con $\vec{V}_m$ como la velocidad de la mezcla (o velocidad del centro del volumen). Integrando la ecua-

ción anterior en la dirección z , es decir, a lo largo del espacio h , se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_0^h \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_m dz = \int_0^h \left(\frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} - \frac{S_{\alpha_v}}{\rho_v} \right) dz$$

Nuevamente, considerando la regla de integración de Leibnitz (Ec. (2.26)) y considerando $\vec{V} = [u, v, w]$, con h como variable independiente en la dirección z , se obtiene:

$$-u \Big|_0^h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz - v \Big|_0^h \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz + w \Big|_0^h = \int_0^h S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) dz$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno $\vec{V}(0) = [0, 0, 0]$ para la superficie de la carcasa ($z = 0$) y $\vec{V}(h) = [u_s, v_s, w_s]$ para la superficie del eje rotante ($z = h$), la expresión se reduce a:

$$-u_s \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz - v_s \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz + w_s = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h \quad (2.113)$$

Para resolver las integrales de la ecuación (2.113), es necesario conocer e integrar los perfiles de velocidad para u y v a lo largo del espesor de película tal como se realizó previamente. Cabe recordar que no se considera movimiento relativo entre las superficies en la dirección axial, por lo tanto, $v_s = 0$. Sustituyendo las ecuaciones (2.28) y (2.29) en (2.113) se obtiene:

$$-u_s \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_s}{2} h \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + w_s = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h \quad (2.114)$$

donde la viscosidad de la mezcla μ_m se define como:

$$\mu_m = \alpha_l \mu_l + (1 - \alpha_l) \mu_v \quad (2.115)$$

La elección de la ecuación constitutiva para la viscosidad de la mezcla depende del tipo de fluidos involucrados. En el caso del presente estudio, que se centra en los lubricantes líquidos y su fase de vapor o aire preexistente, la regla presentada es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales. Es necesario definir esta regla específicamente en el caso de los cojinetes lubricados por gas en equilibrio con su fase líquida [60] o en el caso de las mezclas líquidas. Si el análisis anterior se lleva a cabo por fases, es posible demostrar que la expresión de la viscosidad de la mezcla es equivalente a la media armónica de las viscosidades de cada fase. Sin embargo, los resultados obtenidos pueden no corresponder a los experimentos, lo que demuestra que la viscosidad de la mezcla no se deriva de los equilibrios de masa y momento, sino de efectos reológicos que deben definirse empíricamente.

Reorganizando la Ecuación (2.114) se obtiene la ecuación de Reynolds para dos fases con un

término fuente dependiente de la transferencia de masa:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_s}{2} h \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h - w_s$$

La ecuación obtenida en términos de derivadas parciales con respecto a la dirección circunferencial (x) y la dirección axial (y), tras integrar en la dirección radial (z), conduce a un modelo bidimensional que considera la tercera dimensión a través del espesor del muñón, $h(x)$, y puede describirse como un modelo 2.5D. El término w_s debe ser considerado al igual que el caso dinámico presentado en la Ec. (2.66). Es posible expresar estas ecuaciones utilizando operadores vectoriales,

$$\vec{\nabla}_{xy} \cdot \left[-\frac{h^3}{12\mu_m} \vec{\nabla}_{xy} p - \vec{u}_s \frac{h}{2} \right] = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h - w_s \quad (2.116)$$

Definiendo,

$$\vec{V}_{xy} = -\frac{h^3}{12\mu_m} \vec{\nabla}_{xy} p - \vec{u}_s \frac{h}{2}$$

La expresión a resolver finalmente queda:

$$\vec{\nabla}_{xy} \cdot \vec{V}_{xy} = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h - w_s \quad (2.117)$$

donde $\vec{\nabla}_{xy}$ corresponde al operador de divergencia bidimensional y $\vec{V}_{xy}$ es el flujo conservativo que se utiliza posteriormente para la advección de la fracción volumétrica α , garantizando la conservación de la masa. De manera similar, al integrar la ecuación de transporte para la variable α_l (Ec. (2.111)) a lo largo del espacio,

$$\int_0^h \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} dz + \int_0^h \vec{\nabla} \cdot (\alpha_l \vec{V}) dz = \int_0^h \frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} dz$$

se obtiene,

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} h + \vec{\nabla}_{xy} \cdot (\alpha_l \vec{V}_{xy}) + \alpha_l w_s = \frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} h \quad (2.118)$$

A partir de las Ecs. (2.111) y (2.112) se puede derivar el balance de masa de la mezcla:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{V}) = 0 \quad (2.119)$$

donde la densidad de la mezcla ρ_m es definida como:

$$\rho_m = \alpha_l \rho_l + (1 - \alpha_l) \rho_v \quad (2.120)$$

Realizando las operaciones algebraicas correspondientes,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(\rho_m) + \rho_m \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\
 \frac{D\rho_m}{Dt} + \rho_m \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= -\frac{1}{\rho_m} \frac{D\rho_m}{Dt} = -\frac{(\rho_v - \rho_l)}{\rho_m} \frac{D\alpha_v}{Dt}
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

La definición utilizada para la densidad sigue el mismo análisis realizado para la viscosidad en lo que respecta a las relaciones empíricas. Utilizando el resultado de la ecuación (2.121) y reorganizando las ecuaciones (2.111) y (2.112), se obtiene la siguiente relación para el término fuente S_{α_l} :

$$S_{\alpha_l} = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_m} \frac{D\alpha_v}{Dt} \tag{2.122}$$

Debe tenerse en cuenta que μ_m , ρ_m , S_{α_l} dependen de la variable α_l a través de las Ecuaciones (2.117) y (2.118). Ambas ecuaciones están acopladas y no pueden resolverse independientemente una de otra [69]. En el caso de utilizar métodos segregados, como se presentará más adelante, es necesario lograr un acoplamiento suficiente para garantizar el orden de convergencia deseado.

El modelo obtenido en la ecuación (2.117) y la ecuación (2.118) presenta similitudes con el presentado por Zuber y Dougherty (ZD) [60], ya que se trata de un modelo mixto. Ambos consideran la suma ponderada de las fases para obtener una única expresión similar a la ecuación de Reynolds para el conjunto, incluyendo un término fuente/sumidero que tiene en cuenta el cambio de fase del fluido lubricante. A pesar de las similitudes, hay que aclarar que en el modelo ZD el lubricante corresponde a un gas con una fracción mínima de condensado, que no se tiene en cuenta en el cálculo de la viscosidad y la densidad. Además, la distribución de esta fase líquida no se describe mediante ecuaciones de transporte. En el caso del modelo presentado, la fase primaria es un lubricante líquido con presencia de gases en su interior. Durante la cavitación, el cambio de fase produce vapores que se incorporan a la fase gaseosa en concentraciones de hasta más del 50 %, por lo que el efecto sobre las propiedades del lubricante no es insignificante. Del mismo modo, el transporte de la fase cavitada influye considerablemente en el perfil de presión [95], por lo que es necesario conocer la distribución de las burbujas dentro del cojinete, que se rige por la ecuación (2.118) y que no se trata en el modelo ZD. Otra diferencia fundamental entre los dos enfoques es que el modelo ZD considera un flujo compresible, por lo que la formulación en densidad o presiones es equivalente utilizando una ecuación de estado. Sobre la base en lo anterior es que este modelo presentado es original y cubre áreas aún sin resolver en la literatura [96].

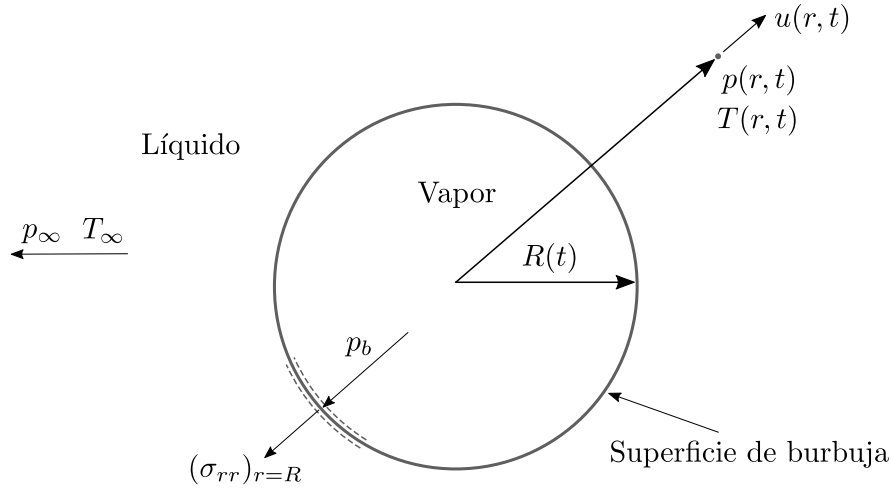


Figura 2.15: Burbuja esférica en el seno de un líquido.

2.7. Modelos de cavitación

Como se mencionó anteriormente, la fase dispersa está compuesta por burbujas de gas y/o vapor lubricante preexistentes, para lo cual es necesario definir un modelo para su dinámica. Este modelo debe permitir la caracterización del cambio de fase y su término fuente/sumidero asociado. A continuación, se propone el uso de la Ec. (2.123), denominada ecuación de Rayleigh-Plesset donde se considera que las burbujas son esferas perfectas de radio $R(t)$ en función del tiempo, tal como se muestra en la Fig. 2.15. En esta expresión, los términos del lado izquierdo corresponden a los términos inerciales [97]. En el lado derecho, el primero modela el comportamiento viscoso de la burbuja, siendo ρ_l la densidad del líquido, μ_l la viscosidad del líquido y κ_s la viscosidad superficial dilatacional [7]. El segundo considera el efecto de la tensión superficial de la burbuja σ_s , y finalmente el último término corresponde a la diferencia entre la presión dentro de la burbuja p_b y la presión, p , del líquido circundante. Por simplificación, se considera $R(t) = R$.

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{4}{\rho_l R} \left(\mu_l + \frac{\kappa_s}{R} \right) \dot{R} - \frac{2\sigma_s}{\rho_l R} + \frac{p_b - p}{\rho_l} \quad (2.123)$$

Considerando un número constante n_{bl} de micronúcleos de burbujas de vapor por unidad de volumen en un líquido incompresible [69], α_v se puede expresar como:

$$\alpha_v = \frac{\frac{4}{3}\pi n_{bl} R^3}{1 + \frac{4}{3}\pi n_{bl} R^3} \quad (2.124)$$

A partir de esta expresión, también se puede obtener el valor del tamaño de la burbuja, R , como:

$$R^3 = \frac{3}{4\pi n_{bl}} \left(\frac{\alpha_v}{1 - \alpha_v} \right) \quad (2.125)$$

La aproximación de que las burbujas son esféricas cuando el orden de magnitud de su tamaño es similar al espesor de la película de fluido es una suposición idealizada que no representa la física real del problema, especialmente en los casos en que la relación de aspecto de la celda computacional es grande. Sin embargo, esta aproximación se utiliza de todos modos dado que resulta práctica y concuerda bien con los resultados experimentales [7]. Al derivar la Ec. (2.124), se determina el modelo de transferencia de masa entre las fases líquida y gaseosa S_{α_l} :

$$S_{\alpha_l} = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_m} \frac{D\alpha_v}{Dt} = 3 \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_m} \alpha_l (1 - \alpha_l) \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.126)$$

El valor de $\dot{R}$ depende del modelo de crecimiento de burbujas adoptado para el fenómeno en estudio [64, 69]. Los modelos para caracterizar $\dot{R}$ se presentan en las siguientes subsecciones.

2.7.1. Modelo de cavitación vaporosa

Para modelar la cavitación vaporosa, se utiliza el modelo de Schnerr-Sauer [64], en el que se considera el crecimiento y la desintegración de las burbujas de vapor a partir de núcleos de cavitación ya formados. Este modelo ha demostrado ser fiable en una amplia gama de aplicaciones prácticas y puede aplicarse en diversas condiciones de funcionamiento en las que hay una gran presencia de burbujas [98]. Para este modelo, se considera que la presión dentro de la burbuja es constante e igual a la presión de vapor del lubricante ($p_b = p_v$) y se desprecia la presencia de gases no condensables. El término de segundo orden de la Ec. (2.123) puede evitarse porque solo es relevante en los momentos iniciales del crecimiento de la burbuja. Además, a partir de un análisis de orden de magnitud, se puede determinar que cuando la burbuja es mucho más grande que el núcleo original, los términos de tensión superficial y viscosidad son insignificantes [99], por lo tanto:

$$\dot{R} \approx \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (2.127)$$

$$S_{\alpha_l} = \frac{3}{R} \frac{\rho_l \rho_v}{\rho} \alpha_l (1 - \alpha_l) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_v - p|}{\rho_l}}$$

donde S_{α_l} corresponde a la tasa de condensación S_c cuando $p > p_v$ y a la tasa de vaporización S_v cuando $p < p_v$. Si la presión aplicada p es igual a la presión de vapor p_v , la burbuja estará en equilibrio. Sin embargo, si $p < p_v$, la burbuja crecerá según la Ec. (2.127). Esta ecuación es válida siempre que la burbuja sea al menos tres veces más grande que el núcleo inicial. El error en la estimación de la velocidad de crecimiento del límite utilizando esta aproximación es inferior al 2 % [99].

2.7.2. Modelo de pseudo-cavitación

Si se considera la presencia de gases no condensables a partir de burbujas preexistentes con radio R_o , se puede suponer que el comportamiento de la presión dentro de la burbuja p_b sigue un proceso adiabático en virtud de la ley de presiones parciales de Dalton a través del coeficiente de expansión k . Esta hipótesis se considera debido a que debido a la rapidez del proceso de cambio de volumen de la burbuja pueden despreciarse los efectos térmicos y a que no hay gas adicional difundiendo hacia el interior de la burbuja [17, 97]. Del mismo modo que en el modelo de cavitación vaporosa, se desprecian los términos inerciales de la ecuación (2.123). Aunque el análisis del orden de magnitud indica que los efectos viscosos son insignificantes, el término se mantiene para mejorar la estabilidad numérica en la implementación [7], por lo tanto:

$$\dot{R} \approx \frac{R}{4} \left(\mu_l + \frac{\kappa_s}{R} \right)^{-1} \left[p_o \left(\frac{R_o}{R} \right)^{3k} - \frac{2\sigma_s}{R} - p \right] \quad (2.128)$$

En este caso concreto, dado que la masa contenida en la burbuja es constante mientras que su volumen varía desde su radio inicial R_o a la presión inicial p_o , la densidad del interior debe recalcularse como:

$$\rho_b = \rho_g \left(\frac{R}{R_o} \right)^3$$

2.7.3. Modelo de cavitación gaseosa

La cavitación gaseosa se caracteriza por el modelo propuesto por Zhou [100], que considera la dinámica del gas cuando es liberado y absorbido por el líquido a través de un proceso de difusión. Este modelo presenta una buena predicción de los cambios en la densidad y elasticidad del fluido al considerar la presencia de una fracción de masa de gas libre f_g que es el producto de un cambio en la solubilidad del gas en el líquido. El modelo permite resolver las limitaciones que surgen al utilizar la ley de Henry en estados transitorios, ya que dicha modelación considera la liberación y absorción de gas como procesos instantáneos. Para la aplicación del modelo, también se considera que las burbujas formadas cumplen con la ecuación de Rayleigh-Plesset y que la cantidad de masa de gas que puede disolverse en un líquido f_{gh} a una presión dada tiende al valor predicho por la ley de Henry en estado estacionario. La presión de saturación p_s por debajo de la cual se genera la liberación de gas disuelto en el líquido se considera la presión atmosférica. La fracción de gas dentro del líquido es máxima (e igual a la fracción de masa inicial f_{g0}) para presiones superiores a la presión de referencia ($p > p_s$) y es cero cuando la presión disminuye por debajo de la presión

de vapor ($p < p_v$). Para presiones intermedias, se propone una interpolación lineal,

$$f_{gh} = \begin{cases} 0 & p < p_v \\ f_{g0} \left(1 - \frac{p - p_v}{p_s - p_v} \right) & p_v < p < p_s \\ f_{g0} & p > p_s \end{cases}$$

Dado que el modelo de Zhou se basa en fracciones de masa, es necesario formular las relaciones con fracciones de volumen. La Ec. (2.129) expresa la equivalencia entre la fracción de masa f_g y la fracción volumétrica α_g para el gas. A partir de la ley de Dalton (Ec. (2.130)), la variación local en la densidad del gas se expresa en términos de la densidad de equilibrio ρ_{g0} , la presión de equilibrio p_0 , el campo de presión p y el coeficiente politrópico del gas k . La Ec. (2.131) formula la variación en la densidad del fluido considerando el módulo elástico del líquido E , que a su vez depende de la fracción de gas libre presente f_g , el coeficiente politrópico k y el módulo elástico del líquido puro E_0 .

$$\alpha_g = f_g \frac{\rho_l}{\rho_g} \quad (2.129)$$

$$\rho_g = \rho_{g0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/k} \quad (2.130)$$

$$\rho_l = \rho_{l0} \exp((p - p_0)/E_0) \quad (2.131)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la expresión simplificada para la tasa de formación de burbujas debido a un proceso difusivo propuesta por Zhou se calcula como:

$$S_{\alpha_l} = \begin{cases} \frac{C_c}{\tau} \alpha_g (\alpha_{gh} - \alpha_g) \sqrt{|p - p_s|} & f_g > f_{gh} \\ \frac{C_v}{\tau} \alpha_g (\alpha_{gh} - \alpha_g) \sqrt{|p - p_s|} & f_g \leq f_{gh} \end{cases} \quad (2.132)$$

En esta expresión, el término impulsor es la diferencia entre la presión del líquido y la presión de equilibrio, pero el factor determinante de si se produce o no la difusión es la concentración másica del gas. La fracción másica del gas se compara con la fracción másica máxima que puede disolverse en el líquido según la ley de Henry para esa condición de presión. Los parámetros C_c y C_v son coeficientes que representan parámetros físicos del fluido que deben identificarse para cada caso particular y que no pueden caracterizarse analíticamente. Estos coeficientes dependen de las propiedades del fluido, así como del comportamiento macroscópico de la burbuja. En este caso, se considera $C_c = 2000$ para la absorción y $C_v = 0.01$ para la liberación de gas. Para el análisis de los cojinetes hidrodinámicos, se toma como tiempo característico τ_c el tiempo que tarda una

burbuja en recorrer todo el dominio [99]. El modelado de la dinámica de la cavitación gaseosa es un aspecto que generalmente no se encuentra en la literatura.

2.8. Texturas superficiales

Uno de los temas de investigación actuales en el campo de la lubricación hidrodinámica es el análisis de la reducción de la fricción y el aumento de la capacidad de carga a velocidades de rotación cada vez menores y en geometrías más pequeñas que las de los cojinetes utilizados habitualmente [27, 29, 30, 101]. En este contexto, existe un consenso general respecto a que el texturizado superficial puede mejorar el desempeño de la película lubricante [31]. El texturizado implica la introducción intencional de cavidades bien definidas en una de las superficies del cojinete [32], a diferencia de la rugosidad superficial, que generalmente se considera aleatoria y difícil de caracterizar con precisión. La literatura sugiere que estas texturas pueden cumplir diversas funciones: aumentar la capacidad de carga, reducir la fricción, retener partículas de desgaste, mejorar la rigidez de la película o actuar como concentradores de cavitación [27].

En los cojinetes hidrodinámicos sin texturizado superficial, el campo de presiones es suave (Fig. 2.16a) y no presenta cambios abruptos en sus valores. Sin embargo, la presencia de texturas da lugar a un perfil de presión que depende de la posición de las cavidades y del huelgo mínimo. Las texturas pueden ubicarse en la superficie de la carcasa en posiciones fijas, independientemente del tiempo o de la velocidad angular del eje (Fig. 2.16b). En cambio, si las texturas se sitúan sobre el eje, las cavidades se desplazan con la rotación de este (Fig. 2.16c). En este último caso, la posición de las texturas cambia con el tiempo y rota con la velocidad angular ω_b ; por lo tanto, la influencia de estas sobre el campo de presiones rota con ω_b , generando un efecto dependiente del tiempo y lleva a que el rotor nunca encuentre un estado estacionario, oscilando continuamente alrededor de su posición de equilibrio.

La presencia de texturas superficiales en el plano xy (Fig. 2.4b) se incorpora sumando la profundidad local de la textura $h_t(x, y)$ a la ecuación del espesor nominal de la película, de la siguiente manera [33]:

$$h(x, y) = c(1 - \varepsilon \cos x) + h_t(x, y) \quad (2.133)$$

El número de texturas en las direcciones circunferencial y axial se define mediante N_θ y N_y , respectivamente. La Fig. 2.17 ilustra las formas geométricas consideradas en este estudio. En general, el tamaño de la textura puede caracterizarse por un único parámetro r_t , mientras que el perfil de profundidad depende de la geometría específica. Para texturas de fondo plano, como las de forma cuadrada (SQ), cilíndrica (CY), triangular (TR) o Chevron (CH), la profundidad h_t

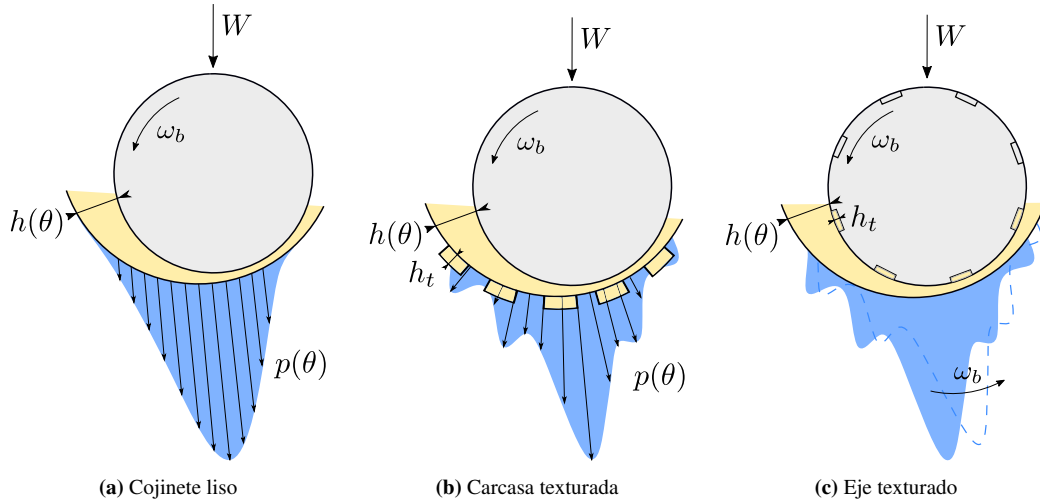


Figura 2.16: Posibles configuraciones de un cojinete hidrodinámico texturado.

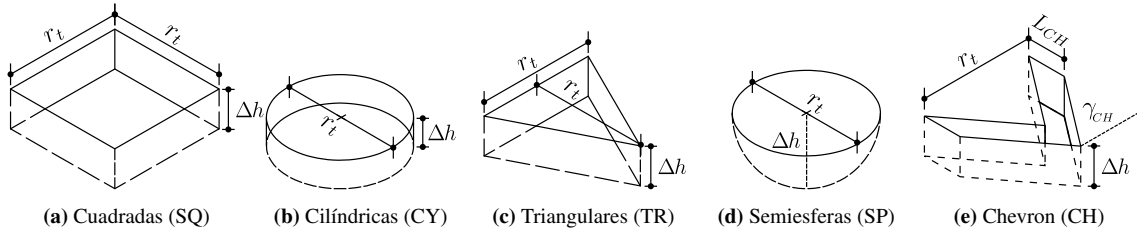


Figura 2.17: Referencias geométricas de las texturas.

permanece constante e igual a la profundidad característica Δh dentro del dominio texturado Γ_t . Por el contrario, para texturas con forma de cavidad esférica (SP), h_t varía localmente sobre el área de esta. La función de profundidad para cada caso se define de la siguiente manera:

$$h_t(x, y) = \begin{cases} \Delta h & \text{para SQ, CY, TR y CH} \\ \frac{\Delta h}{r_t^2} \sqrt{r_t^2 - ((x - x_c)^2 + (y - y_c)^2)} & \text{para SP} \\ 0 & \text{cualquier otro} \end{cases} \quad \text{si } (x, y) \in \Gamma_t \quad (2.134)$$

donde x_c e y_c denotan las coordenadas del centro de la textura.

2.9. Contacto entre superficies

Los desarrollos convencionales sobre la teoría de lubricación consideran las superficies del cojinete como idealmente lisas. En la realidad, sin embargo, la rugosidad superficial en elementos de máquina es del mismo orden de magnitud que el espesor de película lubricante. Incluso puede ser mayor en los casos donde comienza a haber contacto entre ambas superficies [48].

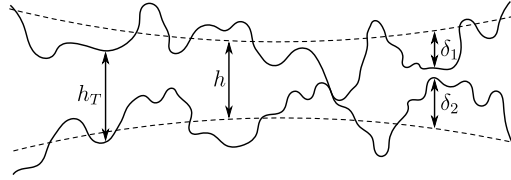


Figura 2.18: Esquema de la separación entre dos superficies rugosas.

Resumidamente, el contacto entre superficies puede resolverse a partir de formas: un modelo estocástico o un modelo determinístico. Los primeros estudios se enfocaron en el modelo estocástico usando parámetros estadísticos para representar la rugosidad de la superficie y su lubricación. Dentro de estos estudios se encuentra el realizado por Patir y Cheng [102] donde presentan coeficientes que afectan al flujo calculado por la ecuación de Reynolds y que son ampliamente aceptados por la comunidad. Estos modelos simulan globalmente el efecto de la rugosidad y predicen tendencias generales y valores promedio de la presión en la película hidrodinámica.

Los análisis determinísticos son generalmente complicados y requieren de un excesivo tiempo de cálculo. Al día de hoy, los modelos estocásticos son ampliamente utilizados debido a su relativa simpleza y eficiencia. En esta sección, se desarrolla la denominada ecuación de Reynolds promediada propuesta por Patir y Cheng la cuál resulta una herramienta fundamental para los análisis estocásticos de lubricación. Luego, se comentan las implicancias del modelo estocástico de contacto propuesto por Greenwood-Williamson.

2.9.1. Factores de flujo

La ecuación promediada de Reynolds permite calcular la generación de presión hidrodinámica en una película lubricante contenida entre dos superficies rugosas. El huelgo local o espesor local de la película lubricante h_T , es definido de la siguiente forma:

$$h_T(\theta, y) = h(\theta, y) + \delta_1(\theta, y) + \delta_2(\theta, y) \quad (2.135)$$

donde h es el huelgo definido por la distancia entre el nivel medio de las dos superficies rugosas, tal como se muestra en la Fig. 2.18, y δ_1 y δ_2 son las alturas aleatorias de las rugosidades superficiales medidas desde el nivel medio de la superficie correspondiente. Este tipo de rugosidades se consideran muy pequeñas y con una pendiente suave de forma de poder calcularse con las hipótesis planteadas en la ecuación de Reynolds.

En el punto de contacto $h_T = 0$, la separación promedio $\bar{h}_T$ es definida como:

$$\bar{h}_T = \int_{-h}^{\infty} (h + \delta) f(\delta) d\delta \quad (2.136)$$

en donde $\delta = \delta_1 + \delta_2$ es la rugosidad combinada y $f(\delta)$ es la función densidad de probabilidad de δ . Recordando la ecuación de Reynolds para un flujo a dos fases isotérmico e incompresible, pero considerando el huelgo local h_T , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{u_s}{2} h_T \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h_T - w_s$$

Se pueden redefinir los caudales volumétricos en dirección x e y calculados en (2.28) y (2.29), como:

$$q_x = -\frac{h_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\omega_b r_b}{2} h_T \quad (2.137)$$

$$q_y = -\frac{h_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.138)$$

Introduciendo los factores de flujo debido a la presión ϕ_x y ϕ_y , y el factor de flujo debido al corte ϕ_s , podemos obtener flujos promediados expresados como:

$$\bar{q}_x = -\phi_x \frac{\bar{h}_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\omega_b r_b}{2} \bar{h}_T + \sigma_R \phi_s \frac{\omega_b r_b}{2} \quad (2.139)$$

$$\bar{q}_y = -\phi_y \frac{\bar{h}_T^3}{12\mu_m} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (2.140)$$

donde $\bar{p}$ es la presión media, ϕ_x y ϕ_y son definidos como la relación entre los flujos impulsados por la presión con respecto a dos superficies lisas en las direcciones x e y respectivamente (por lo tanto, en superficies lisas $\phi_x = \phi_y = 1$). Por otra parte, σ_R corresponde con la raíz media cuadrática de la rugosidad, el término adicional que aparece en la Ec. (2.139) representa el flujo arrastrado y que, junto con ϕ_s , determinan el flujo por corte adicional debido al movimiento relativo entre ambas superficies.

Finalmente, sustituyendo nuevamente en la ecuación de Reynolds a dos fases se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\phi_x \frac{\bar{h}_T^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\omega_b r_b}{2} \bar{h}_T + \sigma_R \phi_s \frac{\omega_b r_b}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\phi_y \frac{\bar{h}_T^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right] = \dots \\ S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h_T - w_s \end{aligned} \quad (2.141)$$

Para determinar el valor de los factores de flujo ϕ_x , ϕ_y y ϕ_s es necesario realizar un análisis comparativo del comportamiento de la película lubricante cuando está contenida entre dos superficies lisas frente a cuando se encuentra entre superficies rugosas. Para algunas superficies con irregularidades simples, es posible encontrar expresiones analíticas, pero en la mayoría de los casos, con rugosidades aleatorias esto no es posible. Patir y Cheng [103] realizaron simulaciones

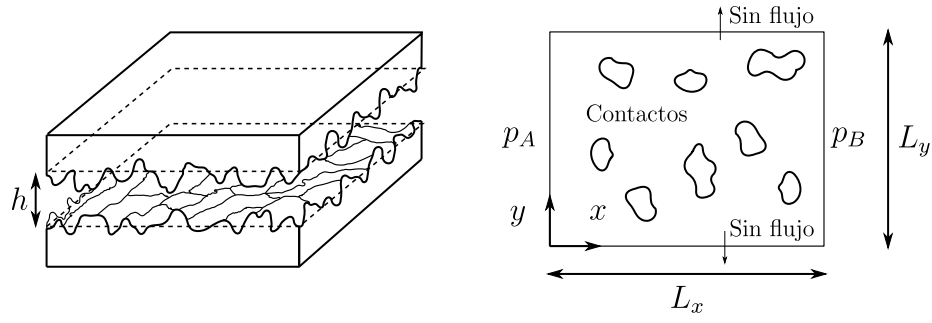


Figura 2.19: Modelo utilizado por Patir y Cheng para la estimación por simulación de los factores de flujo.

para un elemento rectangular de dimensiones $L_x \times L_y$ como el que se muestra en la Fig. 2.19. Este elemento es muy pequeño comparado con el tamaño del cojinete completo, pero es suficientemente grande para ser estadísticamente representativo del comportamiento de las asperezas superficiales.

Para ambas superficies rugosas, cada una con su topografía y un determinado huelgo nominal constante, la ecuación de Reynolds puede resolverse para las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} p &= p_A \quad \text{para} \quad x = 0; \\ p &= p_B \quad \text{para} \quad x = L_x; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{para} \quad y = 0, y, y = L_y \end{aligned} \quad (2.142)$$

Dado que ambas superficies se encuentran fijas ($u_s = w_s = 0$), la Ec. (2.139) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.143)$$

Esta expresión puede resolverse numéricamente para las superficies rugosas y, posteriormente, conociendo el valor de la distribución de presiones, puede calcularse el flujo promedio por unidad de área, $\bar{q}_x$. Luego, el factor de flujo debido a los efectos de la presión se calcula como:

$$\phi_x = \frac{\bar{q}_x}{q_x} = \left[\frac{1}{L_y} \int_0^{L_x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy \right] \frac{1}{q_x} \quad (2.144)$$

en la cuál, q_x puede ser fácilmente calculado dado que:

$$q_x = \frac{h^3}{12\mu} \frac{p_B - p_A}{L_x} \quad (2.145)$$

Resulta evidente que ϕ_x dependerá de la distribución de las rugosidades y del espesor de la película lubricante. Para describir las principales características de la topografía Patir y Cheng [103] definieron dos parámetros fundamentales: la raíz cuadrática media de la distribución (σ_R)

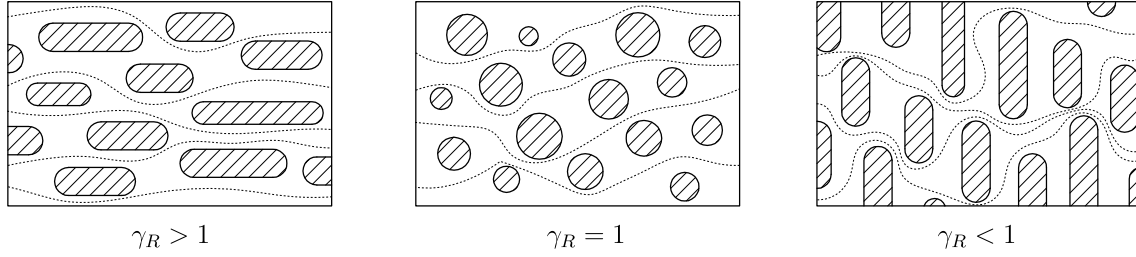


Figura 2.20: Orientaciones típicas de la rugosidad y patrones de flujo longitudinales ($\gamma_R > 1$), isotrópicos ($\gamma_R = 1$) y transversales ($\gamma_R < 1$).

y el parámetro de orientación γ_R . El subíndice R se utiliza en ambos casos para diferenciar las variables utilizadas en el contexto de la estimación de los efectos de la rugosidad respecto de otras variables similares en las demás secciones de esta tesis.

La Fig. 2.20 muestra las típicas orientaciones de la rugosidad con diferentes valores de γ_R , así como también, sus correspondientes patrones de flujo. La simulación computacional empleada por Patir y Cheng [104] generaba superficies rugosas aleatorias para dos de estos parámetros bien definidos bajo la suposición de una distribución Gaussiana de las alturas de la rugosidad. Usando las superficies generadas, se puede resolver numéricamente el flujo que circula y determinar el valor del coeficiente ϕ_x .

Para minimizar el efecto de los valores aleatorios, el cálculo fue repetido unas diez veces por cada caso estadísticamente idéntico y luego promediado entre todos los resultados. Basados en estos datos, Patir y Cheng [103] derivaron expresiones que ajustan con los resultados obtenidos y permiten evaluar el factor de flujo ϕ_x . El mismo procedimiento puede aplicarse para analizar el valor de ϕ_y . Las expresiones obtenidas son:

$$\begin{cases} \phi_x = 1 - C_R e^{-r_R H_R} & \text{para } \gamma_R \leq 1 \\ \phi_x = 1 + C_R H_R^{-r} & \text{para } \gamma_R > 1 \end{cases} \quad (2.146)$$

$$\phi_x(\gamma_R) = \phi(1/\gamma_R) \quad (2.147)$$

donde $H_R = h/\sigma_R$ y los coeficientes de ajuste de la correlación C_R y r_R se encuentran descriptos en la Tabla 2.3.

Por su parte, el factor de flujo por corte ϕ_s se puede determinar a través de simulaciones bajo un gradiente de presiones nulo sobre el elemento rugoso simulado ($p_A = p_B$). Sin embargo, se prescribe un movimiento relativo entre las superficies sin que se produzca arrastre (por ejemplo, imponiendo velocidades de igual magnitud pero sentido contrario a cada superficie). Bajo estas circunstancias, se puede resolver la ecuación (2.143) en busca de obtener el campo de presiones. Si ambas superficies fuesen lisas, la Ecuación (2.143) daría un valor constante P_A y no habría

γ_R	C_R	r_R	Rango
1/9	1.48	0.42	$h/\sigma_R > 1$
1/6	1.38	0.42	$h/\sigma_R > 1$
1/3	1.18	0.42	$h/\sigma_R > 0.75$
1	0.90	0.56	$h/\sigma_R > 0.5$
3	0.225	1.50	$h/\sigma_R > 0.5$
6	0.52	1.50	$h/\sigma_R > 0.5$
9	0.87	1.50	$h/\sigma_R > 0.5$

Tabla 2.3: Coeficientes C_R y r_R para las ecuaciones (2.146).

flujo neto. En cambio, los efectos combinados de la rugosidad y del movimiento deslizante pueden producir variaciones locales de la presión y un flujo neto puede ser calculado de acuerdo con la Ec. (2.137), como:

$$\bar{q}_x = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} q_x dx dy = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(-\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy = E_R \left(-\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.148)$$

donde el operador E_R representa el valor esperado de la variable aleatoria y es una media ponderada de todos los resultados posibles dentro del elemento $L_x \times L_y$. Dado que el gradiente medio de presiones es nulo, al igual que la velocidad de arrastre, a partir de la Ec. (2.139) puede obtenerse:

$$\bar{q}_x = \frac{u_1 - u_2}{2} \sigma_R \phi_s \quad (2.149)$$

Por lo tanto, el factor de flujo por corte puede ser evaluado como:

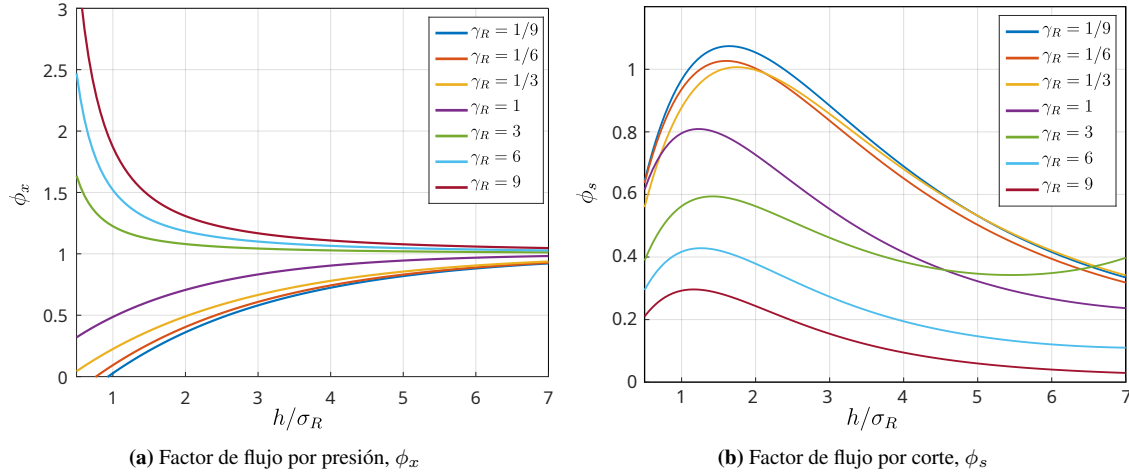
$$\phi_x = \frac{2}{\sigma_R(u_1 - u_2)} E_R \left(-\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.150)$$

Basados en un gran número de simulaciones numéricas, la curva de ajuste propuesta por Patir y Cheng [96] para el factor ϕ_s resulta:

$$\begin{cases} \Phi_s = A_1 \left(\frac{h}{\sigma_R} \right)^{\alpha_1} e^{-\alpha_2(h/\sigma_R) + \alpha_3(h/\sigma_R)^2} & \text{para } h/\sigma_R \leq 5 \\ \Phi_s = A_2 e^{-0.25(h/\sigma_R)} & \text{para } h/\sigma_R > 5 \end{cases} \quad (2.151)$$

donde Φ_s es el factor de flujo por corte asociado a una única superficie y los coeficientes A_1 , A_2 , α_1 , α_2 y α_3 puede encontrarse en la Tabla 2.4.

De forma similar a los factores de flujo por presión, el factor por corte es una función únicamente dependiente del espesor de la película lubricante y de los parámetros de la rugosidad σ_R y γ_R . Sin embargo, a diferencia de los factores ϕ_x que dependían de la estadística de la combi-



nación de las rugosidades ($\delta = \delta_1 + \delta_2$), los factores de flujo por corte se relacionan de forma independiente con cada superficie. Por lo tanto, el factor de flujo por corte ϕ_s será función de h , σ_{R1} , σ_{R2} , γ_{R1} y γ_{R2} . A través de experimentos numéricos, se encuentra que ϕ_s puede tomar la siguiente forma:

$$\phi_s = \left(\frac{\sigma_{R1}}{\sigma_R} \right)^2 \Phi_{s1} - \left(\frac{\sigma_{R2}}{\sigma_R} \right)^2 \Phi_{s2} \quad (2.152)$$

Puede observarse que cuando ambas superficies tienen el mismo valor de σ_R , y el mismo patrón γ_R , el factor de flujo ϕ_s se vuelve nulo, y no hay flujo neto como resultado del movimiento deslizante. Si la Superficie 2 es lisa, y la Superficie 1 es rugosa, ϕ_s tendrá un valor positivo, mientras que si se presenta la situación inversa, el factor ϕ_s será negativo.

Las Figs. 2.21a y 2.21b muestran la variación de los factores de flujo de presión y de corte con respecto al parámetro h/σ_R para diferentes valores de γ_R . Se observa que para relaciones de h/σ_R mayores a 7, independientemente del valor de γ_R , el factor de flujo ϕ_x tiende a 1, siendo entonces un flujo indistinguible del caso liso. Respecto al factor de flujo por corte ϕ_s , la influencia de la relación h/σ_R se mantiene aún siendo relevante para valores mayores a 7, y es muy dependiente del valor de γ_R .

γ_R	A_1	α_1	α_2	α_3	A_2
1/9	2.046	1.12	0.78	0.03	1.856
1/6	1.962	1.08	0.77	0.03	1.754
1/3	1.858	1.01	0.76	0.03	1.561
1	1.899	0.98	0.92	0.05	1.126
3	1.560	0.85	1.13	0.08	0.556
6	1.290	0.62	1.09	0.08	0.388
9	1.011	0.54	1.07	0.08	0.295

Tabla 2.4: Coeficientes para las ecuaciones (2.151)

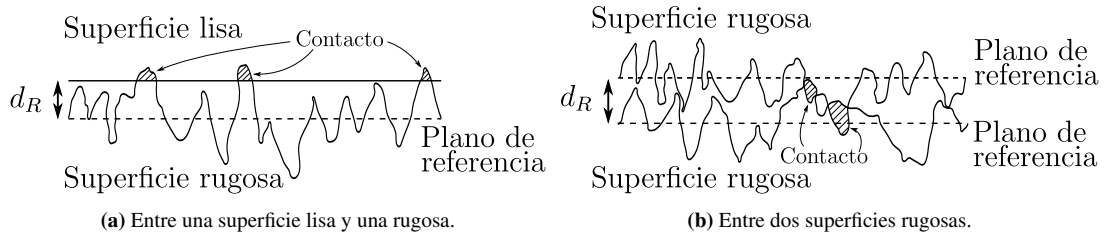


Figura 2.22: Esquema del contacto normal entre dos superficies planas.

2.9.2. Cálculo de la carga aplicada sobre las asperezas superficiales

Las dificultades que se presentan a la hora de resolver el contacto entre las asperezas de la superficie requiere de que se utilicen simplificaciones y aproximaciones aún cuando estos picos sean modelados de forma suave. El contacto entre dos superficies rugosas puede ser visto de forma simplificada como el contacto entre las cumbres de las asperezas superficiales. Greenwood y Williamson [105] fueron pioneros en el estudio del contacto entre superficies. El modelo representativo propuesto asume las siguientes simplificaciones:

- La superficie rugosa es representada por un gran número de asperezas que tienen idéntica forma esférica pero que difieren en su altura respecto del plano de referencia.
- Cada par de asperezas en contacto no se encuentran alineadas por lo que el contacto ocurre en las laderas de estas cumbres.
- Estadísticamente la altura h_R de las asperezas tiene una función de probabilidad, $\phi(h_R)$ que cumple con una distribución Gaussiana.
- Cada par de asperezas en contacto actúa independientemente y la interacción entre diferentes pares de asperezas no es considerada.

Basándose en estas suposiciones, cada contacto entre asperezas puede ser analizada individualmente usando las formulas de contacto Hertzianas que describen la deformación y las tensiones en el contacto de cuerpos elásticos [48, 105]. Previo al análisis, es necesario realizar algunas definiciones sobre los parámetros geométricos que caracterizan a las asperezas superficiales y al contacto. La Fig. 2.22a muestra el contacto entre una superficie lisa y una rugosa, donde la separación d_R está definida por la separación con respecto al plano de referencia de las rugosidades. Por lo tanto, el contacto quedará definido por aquellas asperezas con alturas mayores a d_R . La verdadera área de contacto se corresponde con la suma de todos los contactos individuales y la carga total soportada por el contacto será la suma de la carga asumida por cada aspereza.

Definiendo a la densidad de asperezas como η_R y al área nominal de contacto como A_c , el número de asperezas es $n_R = \eta_R A_c$. Considerando, que las asperezas poseen radio β_R y, estable-

ciendo el módulo elástico equivalente E^* como,

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (2.153)$$

donde ν y E , se corresponden con el coeficiente de Poisson y el módulo elástico de la superficie 1 y 2. Cuando se produce el contacto, puede considerarse una deformación local δ_R a partir de un modelo de penalidad que asimile a una interpenetración, donde el área de contacto de una aspereza A_a y la carga aplicada sobre ella W_a se determinen mediante:

$$A_a = \pi \beta_R \delta_R \quad (2.154)$$

$$W_a = \frac{4}{3} E^* \delta_R^{3/2} \beta_R^{1/2} \quad (2.155)$$

El número esperado de asperezas en contacto en el área nominal puede determinarse como:

$$N_T = n_R \int_d^\infty \phi(h_R) dh_R \quad (2.156)$$

Considerando $\delta_R = h_R - d$, el área total de asperezas en contacto será:

$$A_T = \pi n_R \beta_R \int_d^\infty (h_R - d) \phi(h_R) dh_R \quad (2.157)$$

Finalmente, la carga total del contacto puede ser escrita como:

$$W_c = \frac{4}{3} n_R E^* \beta_R^{1/2} \int_d^\infty (h_R - d) \phi(h_R) dh_R \quad (2.158)$$

Posteriormente, Greenwood y Tripp [106] derivaron expresiones similares para el caso donde ambas superficies presenten rugosidades (Fig. 2.22b) con desalineaciones entre las dos asperezas en contacto, introduciendo un parámetro adicional λ_R definido como:

$$\lambda_R = \frac{\bar{h}_R}{\sigma_R} \quad (2.159)$$

Considerando a $\tilde{N}$ como el número de asperezas en contacto por unidad de área de contacto nominal, a $\tilde{A}$ como el cociente entre el área de contacto de las asperezas y el área nominal de

contacto y a $\tilde{p}$, como la presión media de contacto, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\tilde{N} = \frac{N_T}{A_c} = 4\pi\eta_R(\eta_R\beta_R\sigma_R)F_1(\lambda_R) \quad (2.160)$$

$$\tilde{A} = \frac{A_T}{A_c} = \pi^2(\eta_R\beta_R\sigma_R)^2F_2(\lambda_R) \quad (2.161)$$

$$\tilde{p} = \frac{W_c}{A_c} = 2K_R E^* F_{5/2}(\lambda_R) \quad (2.162)$$

$$K_R = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi(\eta_R\beta_R\sigma_R)^2\sqrt{\frac{\sigma_R}{\beta_R}} \quad (2.163)$$

con, F_m :

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_R}^{\infty} (s - \lambda_R)^m e^{s^2/2} ds \quad \text{para } m = 1, 2, 2/5 \quad (2.164)$$

Es claro que todas las relaciones para $\tilde{N}$, $\tilde{A}$ y $\tilde{p}$ son dominadas por las funciones F_m que rápidamente decaen cuando λ (o $\bar{h}_R$) se incrementa. Para conveniencia en el cálculo, Patir y Cheng [102] obtuvieron de forma empírica la siguiente relación para $F_{5/2}$:

$$F_{5/2} = \begin{cases} 4.4086 \times 10^{-5} (4.0 - \lambda)^{6.804} & \text{para } 0.5 < \lambda < 4.0 \\ 0 & \text{para } \lambda \geq 4.0 \end{cases} \quad (2.165)$$

2.10. Efectos térmicos

El comportamiento térmico de la película lubricante cumple un rol más que relevante en un sistema tribológico. La disipación térmica del sistema será fundamental para el control de la temperatura del lubricante y por lo tanto su viscosidad. Es sabido que un incremento leve de la temperatura puede producir una disminución significativa de la viscosidad y, por lo tanto, disminuir la capacidad portante del cojinete produciendo un incremento aún mayor de la temperatura en un proceso que se retroalimenta llevando a la rotura de la película lubricante y dañando los elementos de máquina por desgaste.

Las leyes de conservación de energía representan el pilar central de cualquier análisis que luego puede centrarse desde un punto de vista global del sistema de lubricación (análisis integral) o puede analizarse de forma continua a lo largo de la película lubricante y los sólidos que la contienen mediante un análisis termoelastohidrodinámico completo.

2.10.1. Análisis integral

Para estimar el aumento de temperatura de la película lubricante, puede utilizarse un modelo global que tenga en cuenta la energía disipada por la fricción en las paredes [5, 8]. El par de fricción T_f en el muñón se obtiene integrando las tensiones de corte sobre la superficie del eje A . La expresión del par de fricción en la película lubricante es:

$$T_f = r_b \int_A \tau_{xz} dA$$

donde la tensión cortante τ_{xz} se obtiene considerando el perfil de velocidad a lo largo del espacio libre como la suma de un flujo de Couette y Poiseuille [3, 107]:

$$\tau_{xz} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{u_b}{h}$$

La potencia disipada generada por la fricción del fluido entre las superficies se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$W_h = T_f \omega_b$$

Suponiendo que el lubricante transporta un porcentaje λ de la potencia total disipada W_h en la película fluida, el aumento de temperatura se puede expresar como [5]:

$$\Delta T = \lambda \frac{W_h}{\rho_l C_p Q_{leak}} \quad (2.166)$$

donde ρ_l es la densidad del fluido, C_p es el calor específico del lubricante y Q_{leak} es el caudal axial de fuga. Generalmente, para el contexto de cojinetes hidrodinámicos puede considerarse $\lambda = 0.9$ [8, 73]. Entonces, la temperatura efectiva de la película lubricante es:

$$T = T_s + \Delta T \quad (2.167)$$

donde T_s es la temperatura del suministro de aceite. Este enfoque térmico resulta apropiado en función de los datos experimentales disponibles en la bibliografía para su validación. Por ejemplo, en el caso de cojinetes texturados, existe una notable escasez de mediciones de temperatura con resolución espacial punto por punto dentro de la película. Como resultado, la mayoría de las investigaciones experimentales tienden a informar de una temperatura global representativa. Por lo tanto, el uso de un modelo global proporciona una temperatura efectiva que puede compararse de forma directa y significativa con estas mediciones experimentales disponibles. Si bien un análisis termohidrodinámico completo (TEHD) ofrecería un campo de temperatura más detallado,

validar un modelo tan complejo sería difícil sin los correspondientes datos experimentales de alta resolución.

2.10.2. Análisis termohidrodinámico

Si partiendo de la ecuación de balance de energía, se desprecia la fuente de calor externa y los efectos de radiación térmica, la ecuación correspondiente a la película lubricante puede expresarse como:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (K_f \nabla T) - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{Dp}{Dt} + \Phi \quad (2.168)$$

donde T es la temperatura absoluta del lubricante, p es la presión hidrodinámica, ρ es la densidad como función de T , C_p es el calor específico a presión constante del lubricante y K_f es su conductividad térmica. Finalmente, los cuatro términos, de izquierda a derecha, se corresponden con el calor de convección, el calor de conducción, el trabajo de la compresión adiabática y la energía de disipación viscosa. Para un fluido Newtoniano, la disipación viscosa Φ puede ser expresada en coordenadas cartesianas como [19, 51]:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad (2.169)$$

A partir de las suposiciones aplicadas en la teoría de lubricación de Reynolds (Sección 2.2), la expresión (2.169) queda reducida a:

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.170)$$

De acuerdo a las hipótesis presentadas anteriormente, en la Ec. (2.168) la variación de la presión en la dirección z es despreciable. A su vez, el efecto convectivo en la dirección x es significativamente más relevante que el efecto conductivo por lo que este último se considera insignificante. Por otro lado, debido al mínimo espesor de la película lubricante, la variación de la temperatura a lo ancho del huelgo se considera nulo. Por último, dado que el fluido es considerado incompresible, el trabajo de la dilatación también es despreciable [1, 48, 88]. Por lo tanto, la Ec. (2.168) resulta:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.171)$$

Integrando esta expresión en a lo largo del huelgo, el lado izquierdo de la ecuación se expresa

como:

$$\rho C_p \int_0^h \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz = \rho C_p \left(h \frac{\partial T}{\partial t} + q_x \frac{\partial T}{\partial x} + q_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.172)$$

donde q_x y q_y se corresponden con los caudales en dirección circunferencial y axial respectivamente y se calculan tal como se comentó previamente en las Ecs. (2.28) y (2.29). Por su parte, el término conductivo se expresar como:

$$K_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = K_y h \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_z (T - T_w) \quad (2.173)$$

donde T_w es la temperatura de las superficies. Si $T = T_w$, se considera que las paredes se comportan de forma adiabática. El primer término derivado de la disipación viscosa se integra de la siguiente manera:

$$\mu \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dz = \mu \int_0^h \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (2z - h) + \frac{U}{h} \right)^2 dz \quad (2.174)$$

$$= \mu \int_0^h \left[\frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 (2z - h)^2 + \frac{U^2}{h^2} \right] dz \quad (2.175)$$

$$= \mu \left[\frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \frac{h^3}{3} + \frac{U^2}{h} \right] \quad (2.176)$$

$$= \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu U^2}{h} \quad (2.177)$$

De igual manera para el segundo término correspondiente a la disipación viscosa:

$$\mu \int_0^h \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dz = \mu \int_0^h \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (2z - h) \right)^2 dz \quad (2.178)$$

$$= \frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \quad (2.179)$$

Por lo tanto, la ecuación de energía para la película hidrodinámica resulta:

$$\rho C_p \left(h \frac{\partial T}{\partial t} + q_x \frac{\partial T}{\partial x} + q_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K_y h \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_z (T - T_w) + \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu U^2}{h} \quad (2.180)$$

Si se desprecia el calor de conducción en el lubricante [2], la ecuación se reduce a:

$$\rho C_p \left(h \frac{\partial T}{\partial t} + q_x \frac{\partial T}{\partial x} + q_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu U^2}{h} \quad (2.181)$$

2.11. Lubricación No-Newtoniana

Considerando las hipótesis del flujo de lubricación planteadas previamente y partiendo de la relación entre las tensiones actuantes sobre un elemento de fluido τ_{xy} y el gradiente de velocidad de deformación $\dot{\gamma}$, se puede obtener:

$$\tau_{xy} = \mu(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial z} = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (2.182)$$

donde μ no es una constante del fluido, si no que será dependiente la deformación que esté imponiéndose. A partir de esta expresión, para obtener el perfil de velocidades de un flujo no-Newtoniano se debe utilizar el método de perturbación regular realizando una expansión en serie en términos de una perturbación σ [108]. Perturbando el valor de la viscosidad μ y de la velocidad en dirección circunferencial u , se obtiene:

$$\mu = \mu_0 + \sigma \mu_1 \quad (2.183)$$

$$u = u_0 + \sigma u_1 \quad (2.184)$$

Por lo tanto, reemplazando en la Ec. (2.182)

$$\tau_{xy} = (\mu_0 + \sigma \mu_1) \left(\frac{du_0}{dz} + \sigma \frac{du_1}{dz} \right) \quad (2.185)$$

$$\tau_{xy} = \mu_0 \frac{du_0}{dz} + \sigma \mu_1 \frac{du_0}{dz} + \sigma \mu_0 \frac{du_1}{dz} + \sigma^2 \mu_1 \frac{du_1}{dz} \quad (2.186)$$

Despreciando el término de segundo orden se obtiene:

$$\tau_{xy} = \mu_0 \frac{du_0}{dz} + \sigma \mu_1 \frac{du_0}{dz} + \sigma \mu_0 \frac{du_1}{dz} \quad (2.187)$$

$$\tau_{xy} = \mu_0 \frac{du_0}{dz} + \sigma \left(\mu_1 \frac{du_0}{dz} + \mu_0 \frac{du_1}{dz} \right) \quad (2.188)$$

Realizando las simplificaciones del flujo de lubricación a las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene la expresión del gradiente de presiones en el espesor al cual, si también se le aplica la perturbación se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial p_1}{\partial x} = \sigma \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (2.189)$$

donde el primer término es nulo debido a que representa al flujo Couette donde no se considera una diferencia de presiones a lo largo de la distancia x , siendo únicamente dependiente de la diferencia

de velocidades entre superficies. Reemplazando (2.188) en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \quad (2.190)$$

$$\sigma \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_0 \frac{du_0}{dz} + \sigma \left(\mu_1 \frac{du_0}{dz} + \mu_0 \frac{du_1}{dz} \right) \right] \quad (2.191)$$

Igualando a cero los términos sucesivos de la serie perturbada según el parámetro σ de la Ec. (2.191):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0 \frac{du_0}{dz} \right) = 0 \quad (2.192)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_1 \frac{du_0}{dz} + \mu_0 \frac{du_1}{dz} \right) = 0 \quad (2.193)$$

Utilizando las condiciones de borde $u_0(0) = 0$ y $u_0(h) = U$, se obtiene:

$$u_0(y) = C_1 y + C_0 = \frac{U}{h} y \quad (2.194)$$

Realizando el mismo procedimiento para la tasa de deformación τ_{yz} para la velocidad en dirección axial v ,

$$v = v_0 + \sigma v_1 \quad (2.195)$$

y utilizando como condiciones de borde $v_0(0) = 0$ y $v_0(h) = 0$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0 \frac{dv_0}{dz} \right) = 0 \quad (2.196)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_1 \frac{dv_0}{dz} + \mu_0 \frac{dv_1}{dz} \right) = 0 \quad (2.197)$$

$$v_0(y) = 0 \quad (2.198)$$

Teniendo en cuenta que el comportamiento viscoso que se busca modelar es el de un fluido no-Newtoniano que cumple con una ley de potencia, la viscosidad μ en función del tensor de tasa de deformación $\mathbf{D}$ queda descrita como:

$$\mu = m(2\mathbf{D}_{ij} : \mathbf{D}_{ij})^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.199)$$

o, expresado de otra forma:

$$\mu = m(2I_D)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.200)$$

donde m es la viscosidad dinámica a una temperatura T determinada, n es el coeficiente que determina el comportamiento reológico del fluido. Por otro lado, I_D es el segundo invariante del tensor tasa de deformación que se expresa como:

$$I_D = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \sigma \left[\frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} \right] \quad (2.201)$$

Esta ley permite describir tres tipos de fluidos: pseudoplásticos ($n < 1$), dilatantes ($n > 1$) y Newtonianos ($n = 1$). Aplicando el método de perturbación a la viscosidad, y dado que esta depende del invariante I_D se obtiene:

$$\mu = \mu_0 + \sigma \mu_1 = \mu(I_0) + I_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I_0} \quad (2.202)$$

$$\mu_0 = m(2I_D)^{\frac{n-1}{2}} = m \left(\frac{U}{h} \right)^{n-1} \quad (2.203)$$

$$\mu_1 = m(n-1) \frac{\partial u_1}{\partial y} \left(\frac{U}{h} \right)^{n-2} \quad (2.204)$$

Sustituyendo las expresiones de u_0 , w_0 , μ_0 y μ_1 en las expresiones (2.192) y (2.196) e integrando a lo largo de z , se calcula:

$$u_1 = \frac{1}{2mn} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p_1}{\partial x} z(z-h) \quad (2.205)$$

$$v_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p_1}{\partial x} z(z-h) \quad (2.206)$$

Finalmente, sustituyendo los valores de u_0 , u_1 , v_0 y v_1 en las expresiones (2.184) y (2.195) se obtiene el perfil de velocidad para un flujo de lubricación considerando un fluido no-newtoniano:

$$u(z) \approx \frac{U}{h} z + \frac{1}{2mn} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h) \quad (2.207)$$

$$v(z) \approx \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h) \quad (2.208)$$

Reemplazando los perfiles de velocidades obtenidos en la Ec. (2.113) se obtiene la ecuación

gobernante del perfil de presiones para un fluido no-Newtoniano a dos fases:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu_0 n} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Uh}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{h^3}{12\mu_0} \left(\frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \dots \\ S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h - w_b \end{aligned} \quad (2.209)$$

Capítulo 3

Métodos numéricos e implementación.

En la dinámica de fluidos computacional (*Computational Fluid Dynamics* - CFD), existe una vasta diversidad de esquemas numéricos diseñados para resolver las ecuaciones diferenciales parciales que rigen el movimiento de los fluidos. No es posible determinar un único método que sea superior de forma absoluta, ya que la idoneidad de cada técnica depende estrechamente de factores específicos como la escala del dominio, el grado de exactitud requerido y la complejidad intrínseca de las ecuaciones a tratar. Para que cualquier propuesta numérica sea funcional, debe integrarse en un entorno de software en el cuál un diseño conceptual sólido sea tan crítico como la precisión de sus algoritmos, puesto que los principios teóricos que sustentan el método definen la arquitectura y fiabilidad de la herramienta final [43].

El Método de Volúmenes Finitos (*Finite Volume Method* - FVM) constituye una técnica de discretización que transforma las leyes de conservación, expresadas originalmente como ecuaciones diferenciales sobre volúmenes infinitesimales, en un conjunto de ecuaciones algebraicas aplicadas a volúmenes de control de tamaño finito. Al igual que sucede en los métodos de diferencias finitas o elementos finitos, la fase inicial de la solución consiste en la fragmentación del dominio geométrico en una red de elementos o celdas que no se solapan. La particularidad del FVM radica en que las ecuaciones diferenciales se integran formalmente sobre cada volumen discreto, convirtiendo los términos de transporte en flujos evaluados en las superficies de contacto de dichas celdas.

Dentro de este esquema, el flujo que atraviesa la cara de un volumen hacia el exterior es idéntico al que entra en la celda adyacente, lo que otorga al FVM una naturaleza estrictamente conservativa. Esta propiedad de conservación inherente es la razón primordial por la cual el FVM es el estándar predominante en el área de CFD. Además, este método destaca por su capacidad de operar en el espacio físico sobre mallas poligonales no estructuradas, lo que facilita el modelado de geometrías complejas. Asimismo, permite una gestión simplificada de las condiciones de con-

torno, dado que las variables desconocidas se suelen localizar en los centroides de los volúmenes y no directamente en las fronteras del dominio [109].

En la práctica, el método aplica balances de masa, momento y energía mediante el equilibrio entre los flujos entrantes y salientes a través de las superficies límite y los términos fuente generados dentro de cada elemento. En lugar de abordar un sistema físico completo, como podría ser un intercambiador de calor, mediante un único volumen global, el FVM divide dicho sistema en una multitud de volúmenes finitos interconectados. Al imponer las ecuaciones de conservación en cada una de estas subdivisiones, se garantiza que la transferencia de calor y materia sea físicamente consistente y equilibrada a lo largo de todas las interfases que unen el dominio total.

Este capítulo se centra en una primera instancia en los aspectos generales de la discretización de las ecuaciones de conservación escalares y vectoriales en mallas arbitrarias. Posteriormente, se hará énfasis en la discretización del modelo físico comentado en el Capítulo 2, donde se hará una breve descripción de los esquemas de alta resolución y de la discretización temporal utilizada para alcanzar la convergencia de segundo orden. Finalmente, se comenta la implementación del modelo en la plataforma OpenFOAM®.

3.1. Método de Volúmenes Finitos (FVM)

Tal como se mencionó previamente, al igual que otros esquemas numéricos, el Método de Volúmenes Finitos opera mediante la transformación de las ecuaciones diferenciales parciales gobernantes en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con la diferencia de que el proceso de discretización posee una naturaleza distintiva que se articula en dos etapas fundamentales. Durante la primera etapa, las ecuaciones diferenciales se integran formalmente sobre cada volumen de control para derivar ecuaciones de equilibrio por elemento; este procedimiento conlleva la conversión de las integrales de volumen y superficie en relaciones algebraicas discretas aplicadas a las celdas y sus respectivas caras, empleando para ello cuadraturas de integración con un orden de precisión determinado. El producto de esta etapa es un conjunto de ecuaciones semidiscretizadas que representan el balance de flujos. En la segunda etapa, se seleccionan perfiles de interpolación específicos con el fin de aproximar la distribución espacial de las variables dentro del elemento. Estos perfiles permiten vincular los valores de las variables en las superficies con los valores almacenados en los centroides de las celdas, completando así la transición de las relaciones integrales hacia un sistema de ecuaciones algebraicas plenamente definido [43].

A partir de la consideración de una ecuación de conservación para una variable escalar genéri-

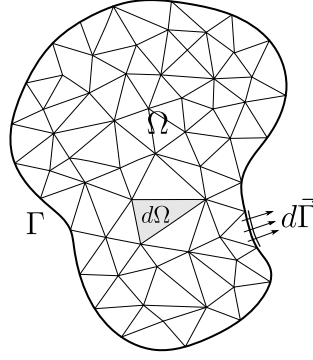


Figura 3.1: Dominio computacional discretizado.

ca ψ , se define la siguiente expresión diferencial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\psi) + C_\psi \psi = \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} \psi) + Q_\psi \quad (3.1)$$

En esta formulación, $\vec{v}$ representa el campo de velocidades, ν denota la difusividad, C_ψ es la constante de reacción y Q_ψ constituye el término fuente. El primer término de la ecuación cuantifica la variación temporal de la magnitud ψ , mientras que el segundo describe el transporte por advección bajo la influencia del campo de flujo. El tercer componente representa la producción o destrucción de la variable debido a una reacción química o física, el cuarto determina la redistribución espacial impulsada por mecanismos difusivos y, finalmente, el último término contabiliza la generación o consumo mediante fuentes y sumideros.

Al integrar esta expresión sobre un dominio arbitrario Ω fijo en $\mathbb{R}^3$, delimitado por fronteras Γ como el que se muestra en la Figura 3.1, y tras aplicar el teorema de la divergencia de Gauss para transformar las integrales de volumen de los términos de flujo en integrales de superficie [110], se obtiene la forma integral de la ecuación:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{v}\psi) \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Omega} C_\psi \psi d\Omega = \int_{\Gamma} \nu \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Omega} Q_\psi d\Omega \quad (3.2)$$

Estos componentes pueden reorganizarse para agrupar los efectos volumétricos y superficiales de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + C_\psi \psi - Q_\psi \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\nu \vec{\nabla} \psi - \vec{v}\psi \right) \cdot d\vec{\Gamma} \quad (3.3)$$

Para proceder con la discretización, el dominio Ω se fragmenta en un conjunto de n_V volúmenes finitos de geometría arbitraria con la condición de que no existan solapamientos entre ellos. Esta partición permite expresar el balance global como la suma de las contribuciones de cada

elemento:

$$\sum_{i=1}^{n_V} \int_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + C_\psi \psi - Q_\psi \right) d\Omega_i = \sum_{i=1}^{n_V} \int_{\Gamma_i} \left(\nu \vec{\nabla} \psi - \vec{v} \psi \right) \cdot d\vec{\Gamma}_i \quad (3.4)$$

En esta estructura, las integrales volumétricas representan la acumulación y reacción dentro de cada volumen i . Por su parte, en las integrales de superficie, es necesario identificar que aquellas caras que no pertenecen al contorno exterior del dominio son compartidas por los volúmenes adyacentes. Dado que el flujo que abandona un volumen es, por definición, idéntico al que ingresa en el contorno vecino, estos flujos internos se cancelan mutuamente al realizar la sumatoria global. Esto asegura que la formulación sea estrictamente conservativa, permitiendo que la suma de los balances locales, mostrado en la Ec. (3.4), converja exactamente en la ley de conservación original aplicada al dominio completo de la Ec. (3.3).

Al considerar volúmenes poliédricos definidos por un número finito de caras n_f , y bajo la premisa de que la variable ψ se mantiene constante tanto en el interior de la celda como en cada una de sus caras, es posible simplificar las integrales mediante las siguientes aproximaciones:

$$\int_{\Omega_i} \psi d\Omega_i = \psi_i V_i \quad (3.5)$$

$$\int_{\Gamma_j} \psi d\Gamma_j = \psi_{fj} \vec{S}_{fj} \quad (3.6)$$

donde V_i representa el volumen de la celda i , mientras que $\vec{S}_{fj}$ denota el vector superficie de la cara j , cuya dirección es normal a la interfase y cuya magnitud es equivalente al área S_f . A partir de estas definiciones, la ecuación de conservación se reformula en su versión discretizada espacialmente, utilizando un único punto de integración por celda y por cara [43]:

$$\sum_{i=1}^{n_V} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + C_\psi \psi - Q_\psi \right) V_i = \left[\sum_{j=1}^{n_f} \left(\nu \vec{\nabla} \psi - \vec{v} \psi \right) \cdot \vec{S}_{fj} \right]_i \quad (3.7)$$

Esta representación constituye la base para determinar el valor de ψ en cada volumen del dominio. No obstante, para cerrar el sistema de ecuaciones, se requiere definir aproximaciones discretas para las derivadas espaciales y temporales, así como establecer mecanismos para interpolar los valores de las caras a partir de los datos almacenados en los centroides.

3.1.1. Discretización de los operadores diferenciales

Dado que la solución numérica solo está disponible en puntos discretos, se asume una variación lineal de la magnitud escalar tanto en el espacio como en el tiempo, lo que garantiza un método con segundo orden de convergencia [43, 110, 111]. Bajo este esquema, el valor de ψ en

una posición o instante arbitrario se calcula mediante las siguientes relaciones:

$$\psi(\vec{x}) = \psi_P + (\vec{x} - \vec{x}_P) \cdot (\vec{\nabla}\psi)_P \quad (3.8)$$

$$\psi(t + \Delta t) = \psi^t + \Delta t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^t \quad (3.9)$$

donde $\vec{x}$ representa una posición genérica en el dominio Ω , $\vec{x}_P$ es la posición del centroide del volumen finito V_P , $\psi_P = \psi(\vec{x}_P)$ y $\psi^t = \psi(t)$. Por otro lado, a partir de la definición del centroide de un volumen dado V_P (Ec. (3.10)) [110], es posible obtener la relación que se muestra en la Ec. (3.11). Esta expresión es útil para obtener la relación entre la integral de superficie y el centroide de una cara de la celda.

$$V_P \vec{x}_P = \int_{\Omega_i} \vec{x} d\Omega_i \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega_i} \vec{x} d\Omega - \vec{x}_P \int_{\Omega_i} d\Omega = \int_{\Omega_i} (\vec{x} - \vec{x}_P) d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Por lo tanto, la integral de la variable $\psi(\vec{x})$ en el dominio Ω puede ser simplificada de la forma:

$$\int_{\Omega_i} \psi(\vec{x}) d\Omega \cong \int_{\Omega_i} \left[\psi_P + (\vec{x} - \vec{x}_P) \cdot (\vec{\nabla}\psi)_P \right] d\Omega \quad (3.12)$$

$$= \psi_P \int_{\Omega_i} d\Omega + \int_{\Omega_i} [(\vec{x} - \vec{x}_P) d\Omega] \cdot (\vec{\nabla}\psi)_P = \psi_P \int_{\Omega_i} d\Omega + 0 \quad (3.13)$$

$$= \psi_P V_P \quad (3.14)$$

En el caso de las integrales de superficie, considerando un vector genérico $\vec{a}$ en la j -ésima cara, a_f como el valor de $\vec{a}$ en el centroide de dicha cara y $\vec{S}_f$ como el vector área de la cara, se obtiene [43]:

$$\int_{\Gamma_i} \vec{a} d\vec{\Gamma} = \vec{a}_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.15)$$

Con estas relaciones, es posible obtener la expresión discretizada para algunos operadores

diferenciales. En el caso del operador divergencia:

$$\int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) d\Omega = \int_{\Gamma_i} \vec{a} \cdot d\vec{\Gamma} \quad (3.16)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) V_P = \sum_j^{n_f} \int_{\Gamma_j} \vec{a} \cdot d\vec{\Gamma} = \sum_j^{n_f} (\vec{a}_f \cdot \vec{S}_f)_j \quad (3.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{V_P} \sum_j^{n_f} (\vec{a}_f \cdot \vec{S}_f)_j \quad (3.18)$$

y, en el caso del operador gradiente:

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \psi d\Omega = \int_{\Gamma_i} \psi d\vec{\Gamma} \quad (3.19)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{1}{V_P} \sum_j^{n_f} (\psi_P \vec{S}_f)_j \quad (3.20)$$

3.1.2. Discretización del término advectivo

Recordando la ecuación de conservación mostrada en la Ec. (3.1), y empleando los operadores previamente definidos, el término advectivo se resuelve mediante la integración de los flujos sobre la superficie del volumen de control:

$$\int_{\Gamma} (\vec{v}\psi) \cdot d\vec{\Gamma} = \sum_f^{n_f} (\vec{v}\psi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f^{n_f} \psi_f (\vec{v}_f \cdot \vec{S}_f) = \sum_f^{n_f} F_f \psi_f \quad (3.21)$$

donde la notación de la sumatoria fue simplificada a unicamente el índice f que representa cada una de las caras de la celda. Además, el flujo que atraviesa cada cara puede definirse como:

$$F_f = (\vec{v}_f \cdot \vec{S}_f) \quad (3.22)$$

La determinación del valor de la variable en la cara, ψ_f , exige la selección de un esquema de convección adecuado. Entre las opciones fundamentales se encuentran el esquema de diferencia central (*Central Differencing*, CD) y el esquema de diferencia aguas arriba (*Upwind Differencing*, UD). La Figura 3.2 muestra cómo se puede determinar el valor de la cara que se ubica entre los puntos P y N si se considera una variación lineal de ψ . La Ec. (3.23) muestra el cálculo de la variable incógnita aproximada de forma lineal para la cara f respecto a los valores en los centros

de los volúmenes vecinos. Este cálculo corresponde con un esquema de CD.

$$\psi_f = \frac{f_N}{PN} \psi_P + \left(1 - \frac{f_N}{PN}\right) \psi_N = f_x \psi_P + (1 - f_x) \psi_N \quad (3.23)$$

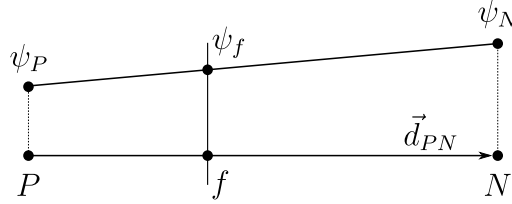


Figura 3.2: Variación lineal de ψ entre los puntos P y N .

Si bien el esquema CD ofrece segundo orden de aproximación, carece de la propiedad de acotación (*boundedness*), lo que puede derivar en oscilaciones numéricas y soluciones físicamente incoherentes bajo ciertas condiciones de flujo. Por el contrario, el esquema UD establece que ψ_f adopta el valor del centroide situado aguas arriba respecto a la dirección del flujo. Esto equivale a fijar $f_x = 1$ cuando el flujo es positivo, asegurando que la información se propague siguiendo la física del transporte advectivo. Aunque el esquema UD es inherentemente estable y acotado, su precisión se limita a primer orden, introduciendo difusión numérica en la solución [43]. Para equilibrar la exactitud y la estabilidad, es común emplear esquemas de alta resolución que combinan las virtudes de ambos métodos, técnica que se analiza con mayor profundidad en secciones posteriores.

3.1.3. Discretización del término difusivo

Para la discretización del término difusivo, el procedimiento se fundamenta en la transformación de la integral de volumen en una sumatoria de flujos de gradiente a través de las caras del volumen de control:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} \psi) d\Omega = \sum_j^{n_f} (\nu \vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_j^{n_f} \nu_f (\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.24)$$

En mallas donde el vector $\vec{d}_{PN}$ (Fig. 3.2) que une los centroides adyacentes es paralelo al vector área $\vec{S}_f$ (condición de ortogonalidad), el flujo difusivo se simplifica a una aproximación de diferencia central directa. En este escenario, el producto escalar del gradiente por el vector superficie se calcula de forma compacta como:

$$(\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{S}_f = \frac{\psi_N - \psi_P}{d_{NP}} S_f \quad (3.25)$$

La metodología para determinar esta componente consiste en evaluar primero el gradiente en los centroides de las celdas P y N mediante el teorema de Green-Gauss, para posteriormente interpolar dichos valores hacia la cara compartida. Bajo este enfoque, el gradiente promediado en la celda se obtiene a partir de la suma de los valores de la variable en las caras ponderados por su vector superficie:

$$\int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \psi \, d\Omega_i = \int_{\Gamma_i} \psi \, d\vec{\Gamma}_i \quad (3.26)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{1}{V_p} \sum_j^{n_f} (\psi_f \vec{S}_f)_j \quad (3.27)$$

Dado que los casos de estudio desarrollados en este trabajo se basan en mallas ortogonales (caracterizadas por ángulos rectos entre sus caras y alineación entre los vectores de posición y superficie), las aproximaciones presentadas permiten capturar el comportamiento del flujo difusivo con una precisión adecuada y sin necesidad de términos de corrección adicionales por no-ortogonalidad.

3.1.4. Discretización del término temporal

Partiendo de la Ec. (3.4) derivada de la discretización espacial, e integrando respecto al tiempo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, se obtiene la siguiente formulación:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left\{ \sum_{i=1}^{n_V} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + C_\psi \psi - Q_\psi \right) V_i - \left[\sum_{j=1}^{n_f} \left(\nu \vec{\nabla} \psi - \vec{v} \psi \right) \cdot \vec{S}_{fj} \right]_i \right\} dt = 0 \quad (3.28)$$

Recordando la Ec. (3.9) es posible definir tanto la tasa de cambio local como su integral temporal en función de los valores conocidos y las incógnitas:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_P = \frac{\psi_P^n - \psi_P^0}{\Delta t} \quad (3.29)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \psi(t) \, dt = \frac{1}{2} (\psi^0 + \psi^n) \Delta t \quad (3.30)$$

donde ψ^n representa el valor de ψ en el presente paso de tiempo y ψ^0 es el valor en el paso de tiempo previo. La Ec. (3.30) puede expresarse de forma general a partir del Método θ^t que permite indicar el grado de implicitud con el que se desea tratar la integración temporal, entonces:

$$\int_t^{t+\Delta t} \psi(t) \, dt = ((1 - \theta)\psi^0 + \theta\psi^n) \Delta t \quad (3.31)$$

De esta forma, la Ec. (3.28) integrada para el volumen P queda expresada como:

$$\left(\frac{\psi_P^n - \psi_P^0}{\Delta t} + C_\psi ((1 - \theta)\psi_P^0 + \theta\psi_P^n) \Delta t - Q_\psi \right) V_P - \sum_{j=1}^{n_f} \left[\nu (\theta (\vec{\nabla} \psi)_f^n + \dots \right. \\ \left. (1 - \theta) (\vec{\nabla} \psi)_f^0) - ((1 - \theta)\psi_f^0 + \theta\psi_f^n) \Delta t \right] \cdot \vec{S}_{fj} = 0$$

La selección del parámetro θ define la estabilidad y precisión del algoritmo. Si se opta por $\theta = 0$, se obtiene el método de Euler hacia adelante (*Forward Euler* - FE), un esquema explícito cuya estabilidad está estrictamente supeditada al cumplimiento de la condición de Friedrichs-Lewy (CFL) [112]. Esta condición se cuantifica mediante el número de Courant (Co), que representa la relación entre la distancia que recorre la información por advección en un intervalo de tiempo y el tamaño de la celda, como se muestra en la Ec. (3.32). Para esquemas explícitos, se requiere generalmente que $Co < 1$ para evitar que la solución diverja [43, 113].

$$Co = \frac{|\vec{v}| \Delta t}{\Delta x} \quad (3.32)$$

Por el contrario, valores de $0 < \theta \leq 1$ resultan en métodos implícitos; específicamente, $\theta = 0.5$ corresponde al esquema de Crank-Nicolson (CN), el cual es incondicionalmente estable y posee segundo orden de precisión, aunque puede introducir oscilaciones numéricas en presencia de gradientes fuertes. Finalmente, el caso $\theta = 1$ define el método de Euler hacia atrás (*Backward Euler*, BE), el cual, a pesar de estar limitado a una precisión de primer orden, es incondicionalmente estable y garantiza soluciones acotadas, siendo ampliamente utilizado por su robustez en simulaciones de ingeniería.

3.1.5. Condiciones de borde

Para completar la formulación del problema, es indispensable definir las condiciones de borde que cierran el sistema de ecuaciones algebraicas. Estas condiciones especifican el comportamiento de la variable ψ en las fronteras del dominio Γ y se dividen fundamentalmente en dos tipos: las de Dirichlet y las de Neumann. En lenguaje matemático, corresponden, respectivamente, a una condición de contorno de valor prescrito (o de primer tipo) y a una condición de contorno de flujo prescrito (o de segundo tipo) [43].

La condición de borde de Dirichlet se aplica cuando el valor de la variable escalar se conoce de forma explícita en la frontera. En la discretización por volúmenes finitos, dado que la variable se almacena en el centroide P , el valor en la cara de contorno f se fija directamente al valor prescrito

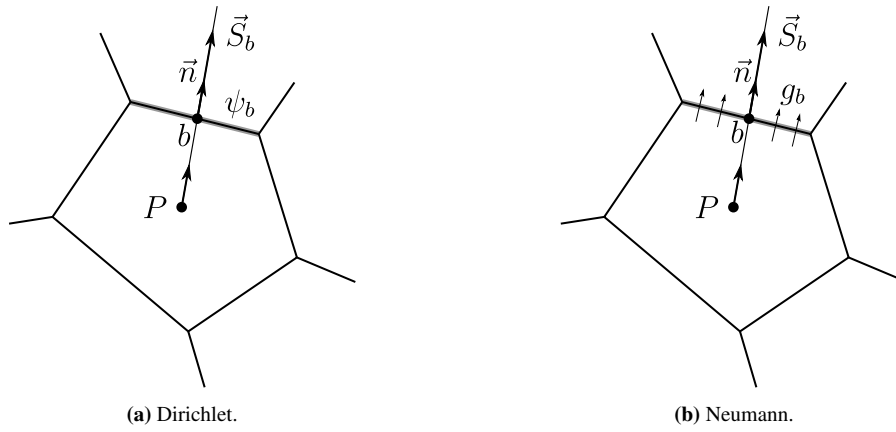


Figura 3.3: Condiciones de borde.

ψ_b [43]:

$$\psi_f = \psi_b \quad (3.33)$$

Desde el punto de vista numérico, esta condición se implementa en el sistema lineal modificando los coeficientes de la matriz para que el flujo a través de la frontera refleje esta magnitud impuesta. Es común utilizarla para modelar valores determinados de una variable en las entradas de un flujo o en las paredes.

Para el tratamiento del término advectivo se tiene que, recordando la Ec. (3.21) y teniendo en cuenta lo definido en la Ec. (3.33):

$$\sum_f^{n_f} F_f \psi_f = \sum_f^{n_f} F_b \psi_b \quad (3.34)$$

Pese a que esta aproximación es siempre válida, cabe recordar que cuando se utiliza un esquema Upwind si el flujo es positivo (saliente del volumen de control) el valor de la variable estará definido por el valor en el centro de celda aguas arriba y no por el impuesto sobre las caras. Por otro lado, el tratamiento del término difusivo queda definido por la Ec. (3.24), de forma que teniendo en cuenta la expresión (3.33):

$$\nu_f (\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{S}_f = \nu_f (\vec{\nabla} \psi)_b \cdot \vec{S}_f = \nu_b \frac{\psi_b - \psi_P}{|\vec{d}_{Pb}|} S_b \quad (3.35)$$

donde, ν_b es el valor de la difusividad en la cara que integra el contorno y que tiene una superficie de magnitud S_b , mientras que el gradiente se resuelve con una aproximación de primer orden a través de conocer el valor en el centro de celda ψ_P , en el borde ψ_b y la distancia que los separa d_{Pb} .

La condición de borde de Neumann especifica el valor de la derivada normal de la variable en la frontera, lo que equivale a imponer un flujo determinado a través de la superficie [113].

Matemáticamente, se expresa como:

$$(\vec{\nabla}\psi)_f \cdot \vec{S}_f = g_b \quad (3.36)$$

donde g_b representa el gradiente o flujo prescrito para la cara b perteneciente a la frontera Γ . Si $g_b = 0$, se obtiene una condición adiabática, indicando que no hay intercambio de la variable a través de la frontera.

Para el tratamiento del término advectivo, dado que ϕ_b no está definido este puede ser calculado a partir del valor en el centro de celda y de un gradiente conocido:

$$\psi_b = \psi_P + \vec{d}_{Pb} \cdot (\vec{\nabla}\psi)_b = \psi_P + |\vec{d}_{Pb}|g_b \quad (3.37)$$

Para el tratamiento del término difusivo, el reemplazo en la Ec. (3.24) es directo:

$$\nu_f (\vec{\nabla}\psi)_f \cdot \vec{S}_f = \nu_f g_b \quad (3.38)$$

Por último, la condición de Neumann puede considerarse como una condición de contorno natural para el Método de Volúmenes Finitos, ya que, en el caso de que el flujo prescrito sea cero, no es necesario realizar ninguna discretización de la cara, mientras que un valor especificado de cero (condición de Dirichlet) seguirá requiriendo la discretización [43].

3.1.6. Esquemas de Alta Resolución

La resolución de la ecuación de transporte requiere de una estimación precisa de los valores de la magnitud transportada en las caras de los volúmenes de control. Una evaluación deficiente de estos términos puede inducir problemas de difusión numérica o la pérdida del acotamiento [94]. En la práctica de la discretización advectiva, los esquemas fundamentales presentan una relación de compromiso entre la convergencia y la estabilidad del método. Como ya se mencionó, el esquema de Upwind es inherentemente acotado, lo que garantiza la ausencia de oscilaciones físicas irreales, pero su precisión se limita a primer orden. Por el contrario, el esquema de diferencia central alcanza segundo orden de aproximación, pero tiende a generar valores fuera de los límites físicos cuando se opera con números de Courant (Co) superiores a la unidad [113].

La cualidad de un esquema de advección para evitar la generación de inestabilidades numéricas se denomina monotonicidad. Esta propiedad se define como la capacidad del algoritmo para respetar, en todo instante, los límites máximos y mínimos establecidos por las condiciones iniciales y de contorno del sistema. En la década de 1950, el profesor Godunov [114] formuló un

teorema fundamental que impone una restricción matemática severa a la simulación numérica: los esquemas lineales diseñados para resolver ecuaciones diferenciales parciales que poseen la propiedad de no generar nuevos extremos (esquemas monótonos) están limitados, como máximo, a una precisión de primer orden [113, 115].

Este teorema implica que cualquier esquema lineal de segundo orden o superior para la ecuación de transporte advectivo producirá, de manera inevitable, oscilaciones en regiones con discontinuidades o gradientes extremadamente elevados.

Para superar esta barrera teórica sin sacrificar la exactitud, se recurre a los esquemas de alta resolución (*High Resolution Schemes*, HRS). Estos esquemas logran precisiones superiores al primer orden preservando el acotamiento de la variable mediante la introducción de no-linealidad en el proceso de discretización. La arquitectura de un HRS se fundamenta en la combinación de un perfil de alto orden y un criterio de limitación de advección [43].

Partiendo de la base de los esquemas lineales, se recuerda la formulación para el valor de ψ en la cara f utilizando el esquema de diferencia central (CD):

$$\psi_{f,CD} = f_{x,CD} \psi_P + (1 - f_x) \psi_N \quad (3.39)$$

La expresión puede ser reordenada de la forma:

$$\psi_{f,CD} = f_{x,CD} (\psi_P - \psi_N) + \psi_N \quad (3.40)$$

Por otro lado, para el esquema Upwind la misma ecuación puede ser utilizada pero teniendo en cuenta que el factor $f_{x,UD} = 1$ si el flujo es positivo, y $f_{x,UD} = 0$ para todo los demás casos. Realizando una combinación lineal de ambos esquemas se obtiene la expresión para un esquema de Diferencia Combinada (*Blended Differencing*, BD):

$$\psi_f = (1 - \gamma_b) \psi_{f,UD} + \gamma_b \psi_{f,CD} \quad (3.41)$$

donde γ_b es el factor de combinación. Reemplazando (3.41) en (3.40), se obtiene:

$$\psi_f = [(1 - \gamma_b) f_{x,UD} + \gamma_b f_{x,CD}] (\psi_P - \psi_N) + \psi_N \quad (3.42)$$

$$\psi_f = \lambda_b (\psi_P - \psi_N) + \psi_N \quad (3.43)$$

donde λ_b es el factor de peso limitador. El factor de combinación puede ser constante a lo largo del dominio entonces:

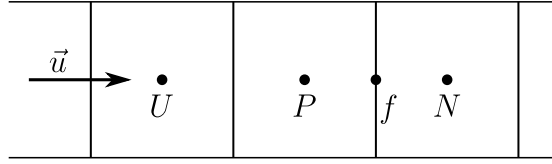


Figura 3.4: Arreglo de celdas en el dominio computacional.

- $\gamma_b = 0, f_x = f_{x,UD}, \psi_f = \psi_P$ (si el flujo es positivo)
- $\gamma_b = 0, f_x = f_{x,UD}, \psi_f = 0$ (si el flujo es negativo)
- $\gamma_b = 1, f_x = f_{x,CD}, \psi_f = \psi_N$

Sin embargo, el factor de combinación puede ser evaluado localmente usando una función limitadora. Existen dos marcos conceptuales predominantes para el desarrollo de las funciones limitadoras: la Formulación de Variable Normalizada (NVF) y el enfoque de Disminución de la Variación Total (TVD). Aunque sus fundamentos matemáticos difieren, ambos enfoques convergen en resultados casi idénticos en la práctica. Para su visualización y análisis, se utilizan herramientas gráficas específicas: el Diagrama de Variable Normalizada (NVD) para el marco NVF y el Diagrama de Sweby para la formulación TVD [43].

A continuación se describe el enfoque TVD, ya que es la metodología utilizada posteriormente en la discretización del término advectivo de la ecuación de transporte de la fracción α_l (Ec. (2.118)). Para ello, es necesario definir una función de Sweby $\gamma_b(r_f)$ para un determinado limitador TVD que depende de la relación de gradientes consecutivos definido como:

$$r_f = \frac{\psi_P - \psi_U}{\psi_N - \psi_P} \quad (3.44)$$

donde ψ_P es el valor en la celda P y, ψ_N y ψ_U se corresponden con valor en la celda aguas abajo y aguas arriba respectivamente, tal como se muestra en la Fig. 3.4. Esta definición de la relación de gradientes r_f es únicamente válida para mallas estructuradas.

Definiendo que el valor en la cara puede ser calculado [43] a partir de:

$$\psi_f = \psi_N + \frac{1}{2}\gamma_b(r_f)(\psi_P - \psi_N) \quad (3.45)$$

Comparando la Ec. (3.45) con la Ec. (3.43), se obtiene una relación entre el factor de combinación y la función de Sweby:

$$\lambda_b = \frac{1}{2}\gamma_b(r_f) \quad (3.46)$$

Sweby [116] definió las condiciones que deben cumplir las funciones $\Psi(r_f)$ para que la ad-

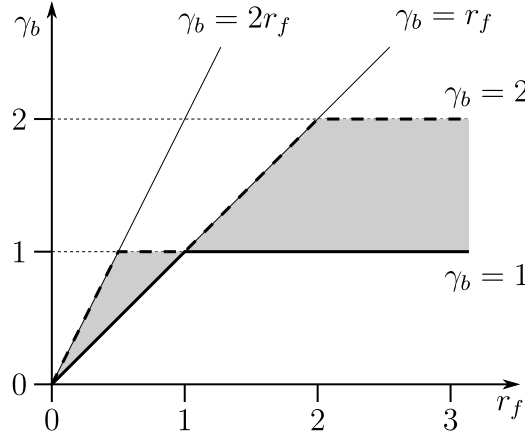


Figura 3.5: Región admisible para esquemas TVD de segundo orden.

vección converja con segundo orden:

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_f \leq \gamma_b(r_f) < 2r_f & \text{si } 0 \leq r_f \leq 1 \\ 1 \leq \gamma_b(r_f) < r_f & \text{si } 1 \leq r_f \leq 2 \\ 1 \leq \gamma_b(r_f) < 2 & \text{si } r_f > 2 \\ \gamma_b(1) = 1 & \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Gráficamente, estas condiciones se muestran en la Fig. 3.5. Vale recordar que $\gamma_b = 0$ corresponde al esquema UD y $\gamma_b = 1$ al esquema CD. Como se ve estos son simplemente puntos en el diagrama de Sweby y por lo tanto corresponden a valores únicos de r_f . En la Figura 3.5 están indicados los límites superior e inferior del diagrama. El primero de ellos es equivalente al limitador Superbee, cuya expresión analítica es:

$$\gamma_b(r_f) = \text{máx}[0, \text{mín}(2r_f, 1), \text{mín}(r_f, 2)] \quad (3.48)$$

El límite inferior del diagrama, coincide con el limitador MinMod,

$$\gamma_b(r_f) = \text{máx}[0, \text{mín}(1, r_f)] \quad (3.49)$$

3.1.7. Esquemas de Alta Resolución temporales

Dentro del marco de los esquemas transitorios, la precisión y la estabilidad dependen de cómo se integren simultáneamente los términos de transporte y de reacción. Considerando una ecuación

de advección-reacción unidimensional simplificada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \psi &= -C_\psi \psi \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x)\end{aligned}\tag{3.50}$$

La solución analítica [117] de este sistema revela que la magnitud inicial no solo se desplaza espacialmente a una velocidad $\vec{V}$, sino que también experimenta un decaimiento exponencial debido al término de reacción:

$$\psi(x, t) = e^{-C_\psi t} \psi_0(x - \vec{V}t)\tag{3.51}$$

Para la resolución numérica, se puede emplear un enfoque de tipo unificado (*unsplit*), donde todos los operadores se discretizan en un único paso de tiempo. Al aplicar un esquema de Upwind para el término advectivo y un avance temporal explícito, se obtiene la siguiente expresión discretizada:

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \frac{\vec{V} \Delta t}{\Delta x} (\psi_i^n - \psi_{i-1}^n) - \Delta t C_\psi \psi_i^n\tag{3.52}$$

Como ya se mencionó, esta formulación es computacionalmente eficiente y garantiza la estabilidad del cálculo siempre que se respete la condición de Courant. No obstante, al igual que sucede en el dominio espacial puro, este esquema presenta una convergencia limitada de primer orden, lo que introduce una difusión numérica artificial que puede amortiguar excesivamente los gradientes de la solución [43, 113, 117]. Para mitigar este efecto y capturar con mayor fidelidad el decaimiento y el transporte, es necesario evolucionar hacia esquemas de alta resolución temporales que empleen aproximaciones de órdenes superiores sin comprometer la estabilidad ante términos de reacción fuente intensos.

La Ec. (3.50) de advección-reacción discretizada puede compactarse en una forma matricial que facilita el análisis de su evolución temporal [118]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\psi\tag{3.53}$$

donde los operadores lineales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se corresponden con los coeficientes de la matriz de advección y reacción respectivamente. Si se considera un estado inicial ψ^n , la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante para el siguiente paso de tiempo ψ^{n+1} viene dada por la aplicación de la exponencial de la matriz de operadores:

$$\psi^{n+1} = e^{\Delta t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \psi^n\tag{3.54}$$

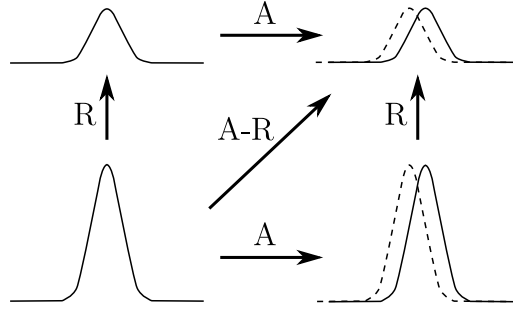


Figura 3.6: Proceso de avance temporal en pasos para una ecuación de reacción (R) y advección (A).

Esta formulación teórica es el punto de partida para los métodos de separación de operadores (Operator Splitting). Dado que calcular la exponencial de una suma de matrices no conmutativas ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$) es computacionalmente costoso y matemáticamente complejo, se recurre a aproximaciones como el fraccionamiento de Strang que permite desacoplar los efectos físicos, resolviendo secuencialmente el transporte y la reacción [117].

Con el propósito de incrementar el orden de convergencia mediante la segregación de los efectos físicos de advección y reacción, se emplea el método de separación de Godunov [115]. Este enfoque se fundamenta en la aproximación del operador exponencial global a través del producto de los operadores individuales:

$$e^{\Delta t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \approx e^{\Delta t\mathbf{A}}e^{\Delta t\mathbf{B}} \quad (3.55)$$

Operativamente, esta técnica implica que la ecuación de transporte-reacción se descompone en dos sub-problemas independientes que se resuelven de manera secuencial en cada paso de tiempo: un primer paso de advección pura y un segundo paso de reacción pura.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -C_{\psi} \psi \quad (3.57)$$

En la Figura 3.6 se esquematiza el camino que se puede optar para el fraccionamiento. En términos de su implementación numérica, este procedimiento se traduce en una discretización en dos etapas. Primero, se obtiene un estado intermedio ψ^* mediante el esquema advectivo (A) y, posteriormente, se alcanza el estado final ψ^{n+1} aplicando el efecto reactivo (R):

$$\psi_i^* = \psi_i^n - \frac{\vec{V} \Delta t}{\Delta x} (\psi_i^n - \psi_{i-1}^n) \quad (3.58)$$

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^* - C_{\psi} \Delta t \psi_i^* \quad (3.59)$$

Este esquema de avance temporal conocido como de paso fraccionado (*fractional stepping*), permite utilizar algoritmos específicos y optimizados para cada fenómeno. Por ejemplo, es posible aplicar esquemas de alta resolución para capturar el frente advectivo en la primera etapa y métodos implícitos o analíticos para tratar la cinética química en la segunda. Aunque la separación de Godunov [115] es de primer orden en el tiempo debido al error de conmutación entre los operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, sienta las bases para métodos de mayor orden.

Es importante precisar que, si bien en el esquema de Godunov el orden de los operadores no afecta el orden de convergencia (que permanece en primer orden), el resultado numérico final puede presentar ligeras variaciones dependiendo de cuál efecto se compute primero [117]. Sin embargo, desde una perspectiva de diseño de algoritmos, el método es conceptualmente simétrico en cuanto a su estructura de fraccionamiento.

Para alcanzar una precisión de segundo orden en el tiempo, se debe recurrir al método de separación de Strang [119] (*Strang Splitting*), el cual mitiga el error de truncamiento del fraccionamiento de Godunov [115] mediante una secuencia simétrica de pasos. Este esquema se basa en la aproximación:

$$e^{\Delta t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \approx e^{\frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}} e^{\Delta t\mathbf{B}} e^{\frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}} \quad (3.60)$$

Bajo esta formulación, el avance temporal se divide en tres etapas diferenciadas. En primer lugar, se resuelve la advección durante un medio paso de tiempo ($\Delta t/2$); a continuación, se integra la reacción sobre el paso de tiempo completo (Δt); y, finalmente, se aplica otro medio paso de advección. Esta estructura simétrica permite cancelar los términos de error de primer orden derivados de la no-conmutatividad de los operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, siempre que cada sub-paso se resuelva con un esquema de al menos segundo orden [119].

La implementación discreta del método de Strang se puede resumir en la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} \text{Advección (medio paso)} \quad \psi^* &= e^{\frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}}\psi^n \\ \text{Reacción (paso completo)} \quad \psi^{**} &= e^{\Delta t\mathbf{B}}\psi^* \\ \text{Advección (medio paso)} \quad \psi^{n+1} &= e^{\frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}}\psi^{**} \end{aligned} \quad (3.61)$$

En otros términos, la secuencia operativa para avanzar de ψ^n a ψ^{n+1} se define mediante el siguiente sistema de ecuaciones consecutivas:

$$\begin{aligned} \text{Advección (medio paso)} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \psi &= 0, \quad \text{con } t^n < t < t^{n+1/2}, \quad \text{y } \psi_1^n = \psi^n \\ \text{Reacción (paso completo)} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -C_\psi \psi, \quad \text{con } t^n < t < t^{n+1}, \quad \text{y } \psi_2^n = \psi_1^{n+1/2} \\ \text{Advección (medio paso)} \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \psi &= 0, \quad \text{con } t^{n+1/2} < t < t^{n+1}, \quad \text{y } \psi_3^n = \psi_2^{n+1} \end{aligned}$$

donde finalmente $\psi^{n+1} = \psi_3^{n+1}$. Esta estructura permite que el error cometido en la primera etapa de advección sea compensado por la tercera, cancelando los términos de error de primer orden inducidos por la separación. Matemáticamente, esto equivale a la conmutación aproximada de los operadores, lo cual es válido siempre que los sub-pasos se resuelvan con métodos que sean, al menos, de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo [117].

3.2. Código dynCav

Como se ha descrito en el capítulo anterior, el campo de presiones en la película lubricante dentro de un cojinete hidrodinámico se caracteriza por la ecuación de Reynolds bifásica que considera el acoplamiento de una ecuación difusiva para la presión, (Ec. (2.116)), y una ecuación de transporte para la fracción líquida α_l mediante el uso de un término fuente (Ec. (2.118)). Estas expresiones están estrechamente relacionadas a través de la fracción líquida, que evoluciona con el tiempo y afecta tanto al término fuente para la transferencia de masa como a las propiedades físicas de la mezcla lubricante líquido-gas.

$$\vec{\nabla}_{xy} \cdot \left\{ -\frac{h^3}{12\mu_m} \vec{\nabla}_{xy} p - \vec{V}_h \frac{h}{2} \right\} = S_{\alpha_l} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h - w_s$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} h + \vec{\nabla}_{xy} \cdot (\alpha_l \vec{V}_{xy}) + \alpha_l w_s = \frac{S_{\alpha_l}}{\rho_l} h$$

La calidad de la resolución numérica del problema presentado se evalúa a través de la convergencia del error. En lo que respecta a la ecuación de presión, el análisis de convergencia de la malla debería ser suficiente, pero el acoplamiento con la ecuación de transporte para la fase líquida que implica advección con fuente también requiere la evaluación de la convergencia temporal del error. Lo que conlleva a que haya una evolución temporal del campo de presiones debido al acoplamiento entre ambas ecuaciones.

Como se mencionó anteriormente, el uso del Método de Volúmenes Finitos con variación lineal en la celda converge al segundo orden en el espacio y, a su vez, con el uso de un esquema de Crank-Nicolson para la discretización temporal, generalmente se debería obtener una convergencia temporal de segundo orden. La presencia de un término de advección requiere la implementación de métodos de alta resolución para preservar el orden de convergencia y mantener la estabilidad. Las siguientes subsecciones se centran principalmente en detallar el tratamiento que recibe en este caso el término de advección del balance de masa para las fases líquida o gaseosa.

3.2.1. Discretización espacial

La discretización del dominio del fluido se lleva a cabo utilizando el Método de Volúmenes Finitos centrados en celdas [94, 111] con elementos cuadrangulares. Según lo comentado en las secciones anteriores, la discretización de la ecuación de Reynolds bifásica se expresa como:

$$\sum_f \left(\vec{V}_{xy} \cdot \vec{S} \right)_f = S_{\alpha_l}^{n+1} \left(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) h V_i - w_s V_i \quad (3.62)$$

con:

$$\vec{V}_{xy} = -\frac{h^3}{12\mu_m} \vec{\nabla}_{xy} p - \frac{\vec{V}_h}{2} h$$

y donde V_i es el volumen de la celda i , $\vec{S}$ es el vector del área de la cara f de la celda y $\vec{\nabla}_{xy}$ es el gradiente numérico. La evolución temporal se indica con los supraíndices n y $n+1$. Para la discretización del término advectivo en el balance de masa, se utiliza un método de alta resolución basado en formulación TVD (Ec. (3.45)), y se utiliza como la función limitadora $\gamma(r_f)$, el esquema minmod (Ec. (3.49)). La discretización de la ecuación de transporte de la fracción líquida (2.118) se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$h_i \frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n}{\Delta t} V_i + \sum_f \left(\alpha^{n+1} \vec{V}_{xy} \cdot \vec{S} \right)_f + \alpha_i^{n+1} w_s = \frac{S_{\alpha_l}^n}{\rho_l} h_i V_i \quad (3.63)$$

En el caso de un dominio unidimensional, el flujo advectivo en las caras viene dado por [43]:

$$\begin{aligned} \left(\alpha^{n+1} \vec{V}_{xy} \cdot \vec{S} \right)_f &= \left[\alpha_{i-1}^{n+1} + \frac{\psi_{mm}}{2} (\alpha_i^{n+1} + \alpha_{i-1}^{n+1}) \right] \max(\vec{V}_{xy} \cdot \vec{S}, 0) \dots \\ &\quad - \left[\alpha_i^{n+1} + \frac{\psi_{mm}}{2} (\alpha_{i-1}^{n+1} + \alpha_i^{n+1}) \right] \max(-\vec{V}_{xy} \cdot \vec{S}, 0) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dado que las ecuaciones anteriores ya se han integrado a lo largo del eje z , los volúmenes de las celdas consideradas son de altura unitaria ($V_j = \Delta x \Delta y \Delta z$, con $\Delta z = 1$). Del mismo modo, las superficies S_f son de altura unitaria y base Δx o Δy , respectivamente. La resolución en el dominio bidimensional del cojinete, se lleva a cabo a partir de considerar la expresión para un flujo unidimensional (Ec. (3.64)) en cada una de las direcciones (circunferencial y axial).

3.2.2. Discretización temporal

Para obtener una convergencia de segundo orden en la discretización temporal, se utiliza la división de Strang [119]. Por lo tanto, tal como se comentó previamente para un tiempo t^n al resolver la ecuación de equilibrio de fase α^n , la solución para el siguiente paso temporal t^{n+1} se

obtiene considerando los fenómenos físicos en diferentes subpasos. En la práctica, se requieren tres instancias [117]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\alpha \vec{V}_{xy}) \frac{1}{h} & t^n < t < t^{n+\frac{1}{2}} & \alpha_1^n = \alpha^n \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} &= S_{\alpha l} - \alpha w_s & t^n < t < t^{n+1} & \alpha_2^n = \alpha_1^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\alpha \vec{V}_{xy}) \frac{1}{h} & t^{n+\frac{1}{2}} < t < t^{n+1} & \alpha_3^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_2^{n+1} \end{aligned}$$

La velocidad de vaporización y condensación se determina a partir del modelo de cavitación utilizado. Para añadir estabilidad a la solución en la ecuación del subproblema intermedio α_2 , el término fuente puede reescribirse para expresar parte de este de forma implícita. Esto permite, según la experiencia adquirida durante la realización de esta tesis, utilizar pasos de tiempo dos órdenes de magnitud mayores que los de un esquema completamente explícito. De esta manera, el término de cambio de fase $S_{\alpha l}$ puede descomponerse en dos términos S_c (término de condensación) y S_v (término de vaporización o desgasificación) y expresarse como:

$$S_{\alpha l} = \alpha_l^{n+1} S_v + (1 - \alpha_l^{n+1}) S_c = \alpha_l^{n+1} (S_c^n - S_v^n) + S_c$$

con:

$$S_c = \frac{3\rho_l \rho_v}{\rho} \alpha_l^n \frac{\dot{R}}{R^n} \quad \text{y} \quad S_v = \frac{3\rho_l \rho_v}{\rho} (1 - \alpha_l^n) \frac{\dot{R}}{R^n}$$

Dado que cada uno de los subproblemas requiere una actualización de la distribución de α , el campo de presión y el término fuente también se modifican, por lo que se propone recalcular la ecuación de difusión acoplada para cada subproblema de la partición de Strang.

Integrando numéricamente el campo de presión sobre la superficie del eje, se obtienen las fuerzas actuantes. Para los casos donde se requiera calcular el movimiento del muñón, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del pistón se calculan para cada paso de tiempo a partir de un esquema de integración de Newmark con $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$ de forma de mantener los esquemas de convergencia de segundo orden, de la siguiente forma:

$$m \ddot{\vec{x}}_{n+1} = \vec{F}_{n+1} \quad (3.65)$$

$$\dot{\vec{x}}_{n+1} = \dot{\vec{x}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\vec{x}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\vec{x}}_{n+1} \quad (3.66)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \dot{\vec{x}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta) \ddot{\vec{x}}_n + 2\beta \ddot{\vec{x}}_{n+1}) \quad (3.67)$$

donde $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$ y $\ddot{\vec{x}}$ son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración del eje, respectivamente, y m es la masa del rotor. El algoritmo utilizado, denominado `dynCav`, se presenta en

el Algoritmo 1. El código utilizado fue implementado en una primera instancia en la plataforma Octave®, lográndose convergencia de segundo orden, tal como se mostrará en la Sección de resultados. La principal ventaja que presenta esta programación es la facilidad en la manipulación de los datos y las ecuaciones, mientras que la principal desventaja se da debido a que al ser un lenguaje interpretado, los tiempos de computo son significativamente superiores a los de un código compilado. Por ello, se recurre a una plataforma como OpenFOAM® basado en el lenguaje C++ para la implementación del modelo bifásico propuesto.

Algoritmo 1 Algoritmo de división de tiempo con ecuaciones acopladas de presión y fracción líquida.

```

1: Condiciones iniciales
2: for  $t_o < t < t_f$  do
3:   Resolver  $p^n$  y calcular el flujo  $V_{xy}$ 
4:   Calcular el primer paso advectivo  $\alpha_1^{n+1/2}$ 
5:   Integrar  $p$  sobre la superficie del eje y resolver las ecuaciones dinámicas del eje para  $\Delta t/2$ 
6:   Resolver para  $p_1^{n+1/2}$  y actualizar  $V_{xy}$ 
7:   Calcular el paso de reacción completo  $\alpha_2^{n+1}$ 
8:   Resolver para  $p_2^{n+1}$  y actualizar  $V_{xy}$ 
9:   Calcular el segundo paso de advección  $\alpha_3^{n+1}$ 
10:  Integrar  $p$  sobre la superficie del eje y resolver las ecuaciones dinámicas del eje para  $\Delta t/2$ 
11: Calcular  $p^{n+1}$ 

```

3.3. Implementación en OpenFOAM®

OpenFOAM® (Open source Field Operation And Manipulation) constituye un entorno de desarrollo orientado a objetos, programado en C++, diseñado para la creación de diversos solucionadores aplicados a la mecánica de medios continuos, con un énfasis primordial en la discretización mediante el Método de Volúmenes Finitos [43]. Más que una aplicación cerrada, se define como una biblioteca de Mecánica Computacional que permite a los usuarios a programar tanto solvers como otras herramientas de pre y posprocesamiento mediante un lenguaje de alto nivel. Esta característica permite que la sintaxis de programación sea excepcionalmente cercana a la descripción matemática de las ecuaciones diferenciales, lo que abstrae al usuario de la complejidad de la gestión de memoria y los detalles internos del código, permitiéndole centrarse en la física del problema [94].

Por ejemplo, el Algoritmo 3.1 muestra la implementación de una ecuación de transporte genérica en OpenFOAM® que se asemeja directamente a su forma diferencial mediante el uso de una sintaxis intuitiva:

Algoritmo 3.1 Código para la resolución de una ecuación de advección-difusión en OpenFOAM.

```
solve
```

```
(
    fvm::ddt(psi)
  + fvm::div(phi, psi)
  - fvm::laplacian(nu, psi)
  ==
    Q
);
```

En el código presentado, el operador `fvm::ddt(psi)` corresponde a la derivada temporal de la variable ψ , mientras que `fvm::div(phi, psi)` representa el término advectivo $\nabla \cdot (\vec{v}\psi)$, utilizando el campo de flujos superficiales `phi` para garantizar la conservación. El término `fvm::laplacian(nu, psi)` discretiza la difusión $\nabla \cdot (\nu \nabla \psi)$. El uso del prefijo `fvm::` indica que estos términos se discretizan de forma implícita, integrándose en la matriz de coeficientes del sistema lineal $Ax = b$ partir de utilizar el Método de Volúmenes Finitos. Esta capacidad de abstraer la complejidad numérica permite que OpenFOAM® sea una herramienta versátil no solo para dominios volumétricos tradicionales, sino también para formulaciones en geometrías de menores dimensiones, como las requeridas en el estudio de películas delgadas.

3.3.1. Método de Áreas Finitas (FAM)

Bajo esta premisa de flexibilidad, la resolución de cojinetes hidrodinámicos presenta un escenario donde el dominio físico puede simplificarse. En lugar de un análisis tridimensional exhaustivo, el sistema puede representarse de forma bidimensional como una superficie delgada o “cáscara”, donde la magnitud $h(\theta)$, que define la holgura o separación entre las superficies, se trata como un campo escalar proyectado. Esta reducción dimensional permite una simplificación computacional significativa, facilitando la implementación del modelo bifásico propuesto a través de una discretización basada en el Método de Áreas Finitas (*Finite Area Method*, FAM).

Al igual que el Método de Volúmenes Finitos, el FAM opera sobre una geometría discretizada, pero en este caso el dominio Ω se compone de una red de caras bidimensionales (áreas) orientadas en un espacio tridimensional. Las leyes de conservación se integran sobre estas áreas superficiales, transformando las ecuaciones diferenciales parciales en balances sobre los bordes o aristas de cada elemento. En el contexto de lubricación, esto resulta ideal para resolver la ecuación de Reynolds o modelos de transporte de película delgada, ya que las variables se evalúan directamente sobre la superficie curva del cojinete.

En OpenFOAM®, este enfoque se gestiona mediante la biblioteca `finiteArea`, la cual permite definir campos en la superficie (como `areaScalarField`) y aplicar operadores diferenciales específicos para variedades curvadas. La sintaxis es análoga a la de volúmenes finitos, utilizando prefijos como `fam::ddt` o `fam::div`, lo que permite una transición natural desde el modelado 3D convencional hacia simulaciones de película delgada de alta eficiencia.

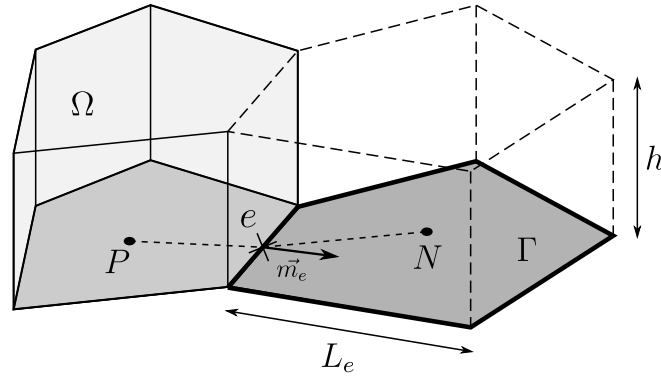


Figura 3.7: Referencia de la geometría de las celdas para FAM.

La Figura 3.7 ilustra este concepto mediante un esquema de dos celdas adyacentes dentro de una discretización no estructurada. Cada elemento posee un volumen teórico Ω , pero el análisis se concentra en la superficie basal de interés Γ . Los puntos P y N representan los centroides de estas superficies Γ y actúan como los nodos donde se evalúan las variables escalares. A diferencia del FVM tradicional, donde los flujos atraviesan las caras de un volumen poliédrico, en el FAM los flujos se calculan a través del perímetro L que delimita la superficie. Este contorno se compone de la sumatoria de diversos segmentos de longitud L_e . Cada segmento lateral posee un vector unitario perpendicular $\vec{m}_e$ orientado hacia el exterior del elemento y contenido en el plano tangente de la superficie, lo que permite transformar las integrales de área de la divergencia en integrales de línea sobre el perímetro mediante el teorema de Gauss en superficies. Por lo tanto, la integración de un campo arbitrario ψ sobre la superficie Γ_P queda expresada como:

$$\int_{\Omega_P} \psi d\Omega = \int_{\Gamma_P} \int_0^{h_P} \psi dz d\Gamma = \psi_P h_P \Gamma_P$$

De igual manera que se realizó para el FVM, para completar la descripción del Método de Áreas Finitas es fundamental formalizar cómo los operadores diferenciales se adaptan a la topología de la superficie. En esta metodología, los operadores gradiente y divergencia son reescritos para la frontera de la superficie Γ utilizando el Teorema de Gauss y discretizados de la siguiente forma [120]:

$$\int_{\Gamma_P} \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} d\Gamma \approx \sum_e \vec{m}_e \cdot \vec{\psi}_e L_e \quad (3.68)$$

$$\int_{\Gamma_P} \vec{\nabla} \psi d\Gamma \approx \sum_e \vec{m}_e \psi_e L_e \quad (3.69)$$

donde ψ_e es el valor del campo ψ en el centro de la arista (o borde) e . Para obtener este valor a partir de los datos almacenados en los centroides de las áreas, la interpolación espacial se realiza

de forma lineal evaluando los valores en P y N y la distancia relativa al punto e :

$$\phi_e = \phi_P f_{NP} + \phi_N (1 - f_{NP}) \quad (3.70)$$

f_{NP} es un factor de ponderación definido como el cociente entre la distancia del segmento a la celda vecina $\overline{eN}$ y la distancia total entre centroides $\overline{PN}$.

Sobre la base de lo comentado, las Ecs. (2.117) y (2.118) que describen el comportamiento de la película lubricante se expresan en su forma integrada de la siguiente manera:

$$\int_{\Gamma_P} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h_P^3}{12\mu} \vec{\nabla} p - \frac{\omega_b r_b}{2} h_P \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_P} S_\alpha h_P d\Gamma \quad (3.71)$$

$$\int_{\Gamma_P} \frac{\partial \alpha}{\partial t} h_P d\Gamma + \int_{L_e} \vec{m}_e \cdot (\vec{V} \alpha) dL = \int_{\Gamma_P} S_\alpha h_P d\Gamma \quad (3.72)$$

Utilizando la aproximación lineal para los gradientes en la cara, la ecuación discretizada para la celda P resulta:

$$\sum_e \left[\left(\frac{h_e^3}{12\mu} \right) \left(\frac{p_N - p_P}{|\vec{d}_{PN}|} \right) L_e \right] - \sum_e \left[\left(\frac{\omega_b r_b}{2} h_e \vec{t}_e \cdot \vec{m}_e \right) L_e \right] = (S_\alpha h)_P \Gamma_P \quad (3.73)$$

donde: $|\vec{d}_{PN}|$ es la distancia entre los centroides de las áreas, $\vec{t}_e$ es el vector unitario tangencial al movimiento del eje en la arista, h_e es el valor de la holgura interpolado en la arista e .

Para el transporte de la fase, se aplica la integración temporal y la discretización de flujo advectivo. Utilizando un esquema de avance temporal, la ecuación para α se expresa como:

$$\frac{\alpha_P^{n+1} - \alpha_P^n}{\Delta t} h_P \Gamma_P + \sum_e \left[\vec{m}_e \cdot (\vec{V}_e \alpha_e) L_e \right]^{n+\theta} = (S_\alpha)_P h_P \Gamma_P \quad (3.74)$$

La principal limitación de esta implementación radica en que la versión de OpenFOAM® utilizada carece de esquemas de alta resolución, condiciones de contorno y técnicas de postprocesado compatibles con el Método de las Áreas Finitas. Es por ello, que se optó por utilizar los esquemas Backward-Euler para la integración temporal, Upwind para la advección de la fracción líquida con convergencia de primer orden y se implementaron las herramientas de postprocesado fundamentales para la interpretación correcta de los resultados.

3.3.2. dynCavFlow

El desarrollo del solver se fundamenta en la estructura del código `surfactantFoam`, integrado en la distribución OpenFOAM v2112 bajo la autoría de Z. Tukovic y H. Jasak [35]. Esta base proporciona la arquitectura necesaria para el manejo de tensores y campos en variedades

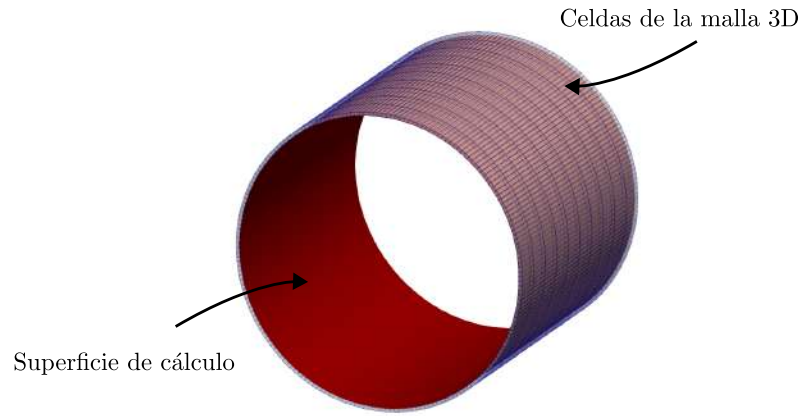


Figura 3.8: Esquema del dominio numérico utilizado.

bidimensionales, permitiendo una adaptación directa al problema de cojinetes. El proceso de ejecución se inicia con la configuración de los campos y parámetros físicos mediante el código fuente `createFaFields.H`.

En esta etapa, el código carga desde el disco los archivos de condiciones iniciales para la presión dinámica `p_rgh`, la fracción de lubricante `alpha` y el espesor de la película `h`. Aún, cuando el resolutor numérico está pensado para ser una herramienta bidimensional, las mallas deben ser generadas en tres dimensiones con un parámetro de espesor que luego no será relevante en el cálculo tal como se muestra en la Fig. 3.8. Posteriormente, el sistema accede al diccionario `transportProperties` para extraer las constantes físicas de ambas fases, tales como las densidades y viscosidades cinemáticas del líquido y el vapor, además de los parámetros críticos del modelo de cavitación, incluyendo la densidad de núcleos de burbujas `nb`, su diámetro inicial `dNuc` y la presión de saturación `pSat`.

Dado que las superficies en contacto poseen velocidades constantes, los vectores `U1` y `U2` correspondientes al eje rotante y la carcasa exterior también se inicializan en esta instancia. Una vez consolidada la lectura de los datos, el solver define el comportamiento del fluido mezcla como un medio continuo cuyas propiedades locales dependen de la fase predominante. Esta transición se gestiona a través de la actualización de los campos de densidad `rho` y viscosidad dinámica `mu`, los cuales se recalculan en cada paso de tiempo mediante una ponderación basada en la fracción de volumen `alpha`. La actualización de las propiedades del fluido se realiza mediante las relaciones ya presentadas anteriormente:

$$\rho = \rho_l \alpha + (1 - \alpha) \rho_v$$

$$\mu = \mu_l \alpha + (1 - \alpha) \mu_v$$

La creación de estos campos se realiza bajo la premisa de que serán procesados mediante el Método de Áreas Finitas, lo que exige el uso de las clases especializadas `areaScalarField` o `areaVectorField`. A diferencia de los campos volumétricos estándar, estos se vinculan a la base de datos de la malla superficial `aMesh` para gestionar correctamente la topología del cojinete. Como se observa en la implementación del objeto `p_rgh` (Algoritmo 3.2), el constructor requiere una referencia explícita a la base de datos de la malla de áreas mediante el comando `aMesh.thisDb()`, asegurando que la lectura y escritura de los datos se realice en el tiempo de simulación correspondiente y sobre la geometría bidimensional. Los algoritmos mostrados a lo largo de esta sección se encuentran resumidos a modo de enfocar la explicación en los aspectos más relevantes.

Algoritmo 3.2 Definición de un campo escalar en FAM.

```
areaScalarField p_rgh
(
    IOobject
    (
        "p_rgh",
        runtime.timeName(),
        aMesh.thisDb(),
        IOobject::MUST_READ,
        IOobject::AUTO_WRITE
    ),
    aMesh
);
```

En paralelo a la definición de las magnitudes superficiales, el código incorpora el fichero `createVolFields.H`. Este archivo cumple una función integradora fundamental, ya que permite establecer una interacción constante entre los elementos bidimensionales utilizados en la resolución de las ecuaciones y la malla tridimensional de bloques de altura unitaria empleada para representar el dominio global. Esta estructura híbrida facilita el mapeo de propiedades y resultados, permitiendo que la información calculada sobre la “cáscara” del cojinete pueda ser interpretada o visualizada en un contexto volumétrico, manteniendo la coherencia física entre la simplificación dimensional del modelo y la realidad geométrica del sistema.

El algoritmo principal se implementa en el código fuente `dynCavFlow.C`, donde se resuelven de manera acoplada las ecuaciones para el campo de presión `pEqn` y la fracción de vapor `alphaEqn`. Debido a que la ecuación de transporte para la fracción de volumen posee una dependencia temporal explícita, el proceso se enmarca dentro de un bucle de avance en el tiempo. Al inicio de cada iteración, se ejecuta el código fuente `surfaceCourantNo.H`, una utilidad heredada del solver original que permite monitorear el número de Courant (Co) específicamente sobre la malla de áreas. Este paso es crítico para asegurar que el paso de tiempo `deltat` sea coherente con la velocidad del fluido y el tamaño de las aristas del cojinete, garantizando así la estabilidad de los esquemas advectivos.

Posteriormente, se carga el módulo `cavModel.H`, (Algoritmo 3.3) el cual contiene la lógica para determinar la tasa de cambio de fase S_α en el instante actual. Para mejorar la estabilidad numérica y permitir un tratamiento parcialmente implícito de los términos fuente, la tasa neta se descompone en una contribución de condensación (S_C) y otra de cavitación (S_V), tal como se comentó en la Sección 3.2.2.

Estos términos son utilizados para la resolución de la ecuación de presión, `pEqn`, donde se emplean como los coeficientes `vDotvP` y `vDotcP`, que representan las tasas volumétricas de vaporización y condensación, respectivamente. En contraste, dentro de la formulación de `alphaEqn`, estos efectos se introducen a través de `vDotcAlpha` y `vDotvAlpha`. La interacción neta entre ambos procesos se consolida en el término `vDotvmcAlpha`, el cual cuantifica la diferencia entre las tasas de vaporización y condensación para determinar la evolución de la fracción de fase líquida. Para la primera iteración, todos los campos relacionados con el cambio de fase son inicializados en 0.

Algoritmo 3.3 Parámetros de cavitación calculados en `cavModel.H`.

```
limitedAlpha = min(max(alpha, scalar(0.0)), scalar(1.0));
Vnuc = nb*constant::mathematical::pi*pow3(dNuc)/6.0;
alphaNuc = Vnuc/(1.0 + Vnuc);
alphaV = 1.0 - limitedAlpha + alphaNuc;

rRb = pow((1.0/(4.0/3.0*constant::mathematical::pi*nb)) *
          alphaV/(1.0 - alphaV), -1.0/3.0
        );

pCoeff = (3.0*rho1*rho2)*sqrt(2.0/(3.0*rho1))
          *rRb/(rho*sqrt(mag(p_rgh - pSat) + 0.01*pSat));

mDotcAlpha = limitedAlpha*(1.0 - limitedAlpha)*pCoeff
              *max(p_rgh - pSat, 0.0*p0);
mDotvAlpha = limitedAlpha*(1.0 - limitedAlpha + alphaNuc)
              *pCoeff*min(p_rgh - pSat, 0.0*p0);

pCoeff2 = 1.0/rho1 - 1.0/rho2;
vDotcP = pCoeff2*(1.0 - limitedAlpha)*pos0(p_rgh - pSat)*pCoeff;
vDotvP = -pCoeff2*(1.0 - limitedAlpha + alphaNuc)*neg(p_rgh - pSat)*
          pCoeff;

alphalCoeff = 1.0/rho1 ;
vDotcAlpha = alphalCoeff*mDotcAlpha;
vDotvAlpha = alphalCoeff*mDotvAlpha;
vDotvmcAlpha = vDotvAlpha - vDotcAlpha;
```

Ya dentro del código principal (Algoritmo 3.4), en primer lugar se resuelve la ecuación de presión, utilizando una estructura matricial de áreas finitas:

Algoritmo 3.4 Actualización de propiedades del fluido y definición de la matriz para el cálculo de la presión.

```
mu = alpha*mu1 + (1.0 - alpha)*mu2;
edgeScalarField muEdge = pow(hEdge, 3.0)/(12.0*fac::interpolate(mu));

faScalarMatrix pEqn
(
```

```

- fam::laplacian(muEdge, p_rgh)
==
- (fac::grad(h) & (omegab^aMesh.areaCentres()))/2.0
- h*fam::Sp(vDotvP - vDotcP, p_rgh)
+ h*(vDotvP - vDotcP)*(pSat)
- dhdt
);

faOptions.constrain(pEqn);
pEqn.solve();

```

donde la clase `faScalarMatrix` ensambla la matriz para resolver la ecuación escalar e incluye los métodos de la formulación de áreas finitas para resolver los términos de difusión `fam::laplacian()` y fuente `fam::Sp()`. Para la resolución es necesario conocer el gradiente del huelgo h el cual se calcula de manera explícita a partir del método `fac::grad(h)` así como también la variación del huelgo con el tiempo `dhdt` que puede calcularse de forma analítica conociendo la velocidad de desplazamiento del centro de masa del muñón. Por último, para establecer ciertas restricciones en los valores a la variable p es necesario hacer uso de la función `faOptions.constrain(pEqn)`. Estas restricciones son, por ejemplo, la presión del suministro de aceite en caso de haber uno. Finalmente, el sistema de ecuaciones se resuelve mediante el método `solve()` de la clase `faMatrix`.

Por su parte, para resolver el transporte de la variable escalar, es necesario definir primero el flujo en las aristas de las áreas finitas, denominado `phis`. El método `flux()` de la clase `faMatrix` retorna el flujo en las caras producido por el campo de presiones presente. Este campo vectorial en las caras permite cuantificar el transporte advectivo de α a través del dominio del cojinete. Con estos componentes definidos, la ecuación que describe la dinámica de la fracción de vapor se implementa en OpenFOAM® utilizando una estructura de áreas finitas, tal como se muestra en el Algoritmo 3.5:

Algoritmo 3.5 Definición de la matriz para la fracción de líquido α .

```

#include "cavModel.H"

phis = pEqn.flux() + (Ub & aMesh.Le())/2.0*hEdge;

faScalarMatrix alphaEqn
(
    h*fam::ddt(alpha)
    + fam::div(phis, alpha)
    - h*(vDotcAlpha + vDotvAlpha)
    + h*fam::Sp(vDotcAlpha + vDotvAlpha, alpha)
    + fam::Sp(dhdt, alpha)
);

faOptions.constrain(alphaEqn);
alphaEqn.solve();

```

donde la clase `faScalarMatrix` ensambla la matriz para resolver la ecuación escalar e incluye los métodos resolver los términos: temporal `fam::ddt()`, advectivo `fam::div()` y fuente `fam`

`::Sp()`. El término `fam::Sp(fac::div(phis), alpha)` es una corrección numérica común en OpenFOAM para asegurar que el esquema sea conservativo. Para este caso, la restricción que puede aplicarse mediante el uso de la función `faOptions.constrain(alphaEqn)` se relaciona con aquellas celdas donde se ubique un suministro de lubricante que determine $\alpha = 1$. Finalmente, la ecuación se resuelve mediante el método `solve()`.

Una vez calculado el nuevo campo de la fracción de lubricante, es necesario actualizar los valores de la viscosidad dinámica `mu` y de la densidad `rho` de la mezcla en todo el dominio computacional. Esta actualización garantiza que las propiedades reológicas del fluido reflejen correctamente la presencia de vapor antes de avanzar con el cálculo de las presiones del siguiente paso de tiempo.

Capítulo 4

Dinámica de ejes rotantes flexibles

En este capítulo se desarrollan los conceptos fundamentales que rigen la dinámica de sistemas rotantes, disciplina técnicamente denominada rotodinámica. Si bien el análisis de rotores elásticos comparte principios básicos con la dinámica estructural y la teoría de vibraciones convencionales [10], la naturaleza rotativa del sistema introduce efectos específicos (como las fuerzas giroscópicas) que requieren un tratamiento analítico diferente.

En primer lugar, se realiza el análisis de la respuesta ante condiciones de resonancia inducidas por desbalance (respuesta sincrónica), siguiendo los lineamientos clásicos de Childs [10] y San Andrés [90]. Posteriormente, se aborda el fenómeno de las inestabilidades auto-excitadas de carácter subsincrónico, específicamente el Oil Whirl y el Oil Whip. El objetivo es establecer las bases necesarias para interpretar la interacción compleja entre la flexibilidad del eje y las fuerzas hidrodinámicas generadas en la película de lubricante de los cojinetes.

4.1. Estabilidad de rotores rígidos soportados por cojinetes lisos

El movimiento de un rotor sobre cojinetes hidrodinámicos constituye un problema no lineal, dado que las fuerzas de reacción de la película de fluido dependen de la posición y velocidad instantánea del centro del muñón respecto a la carcasa [10]. No obstante, el uso de coeficientes de rigidez y amortiguamiento linealizados, discutidos en Sección 2.5, permite predecir con precisión la respuesta sincrónica y determinar los límites de estabilidad del sistema.

La Figura 4.1 ilustra un rotor vertical rígido con masa $2m$, con una carga actuante lateral $2F_o$ y soportado por dos cojinetes hidrodinámicos idénticos. Si la velocidad de rotación es considerada constante, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento en cada cojinete obtenidas a

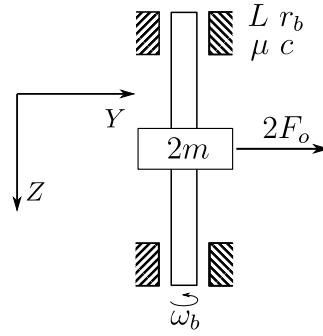


Figura 4.1: Rotor vertical rígido soportado por cojinetes hidrodinámicos.

partir de la sumatoria de fuerzas en los ejes X e Y , son:

$$m\ddot{X} = F_X + m \delta_u \omega_b^2 \cos \omega_b t \quad (4.1)$$

$$m\ddot{Y} = F_Y + m \delta_u \omega_b^2 \sin \omega_b t - F_o \quad (4.2)$$

donde, m y δ_u se corresponden con la masa del rotor y la magnitud del vector desbalance. Debe considerarse que la acción del desbalance dependerá de la posición de la masa, la cuál se descompone en dirección X e Y según la velocidad de rotación ω_b y el tiempo t que ha transcurrido. Además, $X(t)$ y $Y(t)$ son las coordenadas del centro de masa del rotor, así como F_X y F_Y son las componentes de las reacciones en los cojinetes. Dado que el rotor es rígido, el desplazamiento del centro de masa es idéntico en todo el largo del rotor. De la misma forma que se realizó en la Sección 2.5, se realiza una expansión en series de Taylor de las Ecs. (4.1) y (4.2) y se consideran pequeños desplazamientos alrededor del punto de equilibrio (X_o , Y_o):

$$X = X_o + \Delta X, \quad y \quad Y = Y_o + \Delta Y \quad (4.3)$$

Realizando sustituyendo estas relaciones en las Ecs. (4.1) y (4.2), resulta:

$$m \begin{bmatrix} \Delta \ddot{X} \\ \Delta \ddot{Y} \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \Delta \dot{X} \\ \Delta \dot{Y} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = m \delta_u \omega_b^2 \begin{bmatrix} \cos \omega_b t \\ \sin \omega_b t \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{C}$ son las matrices de coeficientes elásticos y de amortiguación obtenidos en la Sección 2.5. Introduciendo las siguientes variables adimensionales: $\bar{X} = \Delta X/c$, $\bar{Y} = \Delta Y/c$ y $\tau_a = \omega_b t$, se obtiene:

$$\hat{m}^2 \begin{bmatrix} \bar{X}'' \\ \bar{Y}'' \end{bmatrix} + \mathbf{c} \begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \end{bmatrix} + \mathbf{k} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \hat{m}^2 \frac{\delta_u}{c} \begin{bmatrix} \cos \tau_a \\ \sin \tau_a \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde, la notación prima indica la derivación con respecto a τ_a y las matrices $\mathbf{k}$ y $\mathbf{c}$ utilizan los coeficientes correspondientes en su forma adimensional. La masa adimensionalizada $\hat{m}$ se calcula

como:

$$\hat{m}^2 = \frac{c m \omega^2}{F_o} \quad (4.6)$$

Para el estudio de la estabilidad del rotor bajo la hipótesis de pequeños movimientos respecto de su punto de equilibrio, es necesario considerar que $\delta_u = 0$, por lo tanto:

$$\hat{m}^2 \begin{bmatrix} \bar{X}'' \\ \bar{Y}'' \end{bmatrix} + \mathbf{c} \begin{bmatrix} \bar{X}' \\ \bar{Y}' \end{bmatrix} + \mathbf{k} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Para estudiar la estabilidad bajo la hipótesis de pequeñas perturbaciones, se analiza la respuesta libre del sistema estableciendo el desbalance $\delta_u = 0$. Si el sistema alcanza el umbral de inestabilidad a una velocidad de rotación ω_s , el rotor iniciará un movimiento de precesión auto-excitado a una frecuencia Ω_s [121]. Este comportamiento se modela mediante soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= A e^{j\bar{\omega}t} \\ \bar{Y} &= B e^{j\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde A y B , se corresponden con la amplitud de la vibración y $\bar{\omega} = \Omega_s/\omega_s$ es conocida como la relación de la frecuencia de precesión (*whirl frequency ratio* - WFR) e indica la relación entre la frecuencia de la precesión del rotor alrededor de un punto de equilibrio Ω_s y la velocidad de entrada en inestabilidad del rotor ω_s . Sustituyendo las expresiones de (4.8) en (4.7), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -\hat{m}^2\bar{\omega}^2 + k_{XX} + j\bar{\omega} c_{XX} & k_{XY} + j\bar{\omega} c_{XY} \\ k_{XY} + j\bar{\omega} c_{YX} & -\hat{m}^2\bar{\omega}^2 + k_{YY} + j\bar{\omega} c_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

El determinante del sistema de ecuaciones debe ser cero para que la solución sea no trivial, por lo que:

$$(-\hat{m}^2\bar{\omega}^2 + k_{XX} + j\bar{\omega} c_{XX})(-\hat{m}^2\bar{\omega}^2 + k_{YY} + j\bar{\omega} c_{YY}) - (k_{XY} + j\bar{\omega} c_{XY})(k_{XY} + j\bar{\omega} c_{YX})$$

Luego de un extenso trabajo algebraico, las componentes real e imaginaria resultan:

$$(\hat{m} \bar{\omega})^2 = k_{eq} = \frac{c_{XX}k_{YY} + c_{YY}k_{XX} - c_{YX}k_{XY} - c_{XY}k_{YX}}{c_{XX} + c_{YY}} \quad (4.10)$$

y,

$$\bar{\omega}^2 = \frac{(k_{eq} - k_{XX})(k_{eq} - k_{YY}) - k_{XY}k_{YX}}{c_{XX}c_{YY} - c_{XY}c_{YX}} \quad (4.11)$$

Estas expresiones, obtenidas por Lund [122], determinan que para una dada excentricidad ε_o

debe evaluarse la Ec. (4.10) para obtener el valor del coeficiente de elasticidad equivalente k_{eq} , y luego reemplazar en la Ec. (4.11) para obtener $\bar{\omega}$. Esta sustitución luego deriva en que la masa crítica del sistema (aquella que genera la aparición de inestabilidades) pueda definirse como:

$$\hat{m}^2 = \frac{k_{eq}}{\bar{\omega}^2} \quad (4.12)$$

La Figura 4.2 muestra la variación de la velocidad de giro umbral de inestabilidad $\bar{\omega}$ con la excentricidad, para las condiciones de longitud infinitamente larga (ILJB) y corta (ISJB). Se observa que para muy bajas excentricidades, la región de inestabilidad (región superior a la línea umbral) es mucho más amplia que para excentricidades mayores a 0.7 donde la estabilidad puede ser asegurada para toda condición de funcionamiento.

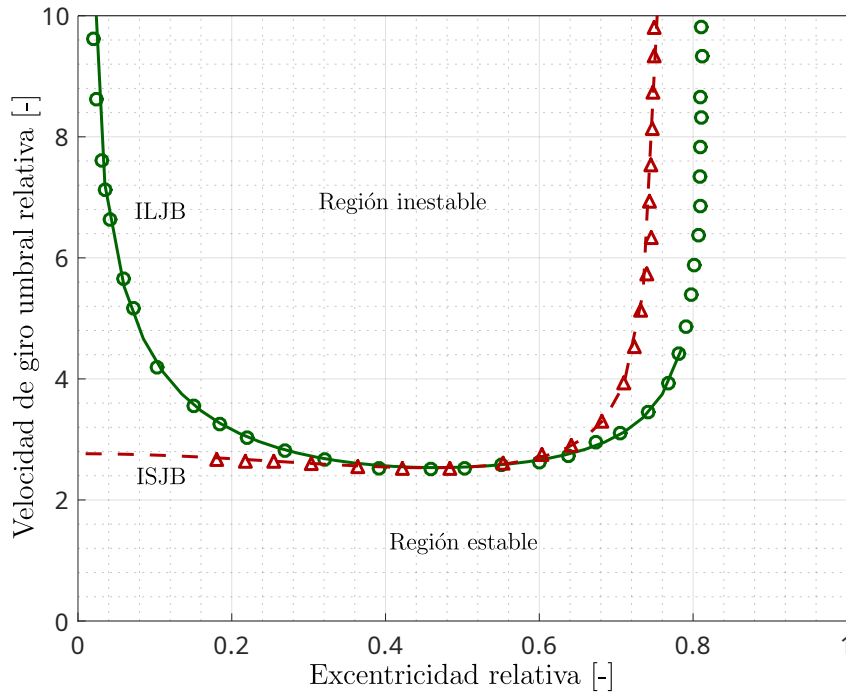


Figura 4.2: Velocidad adimensional umbral de inestabilidad $\bar{\omega}$ en función de la excentricidad relativa.

Por su parte, nótese que la $\bar{\omega}$ únicamente depende de las características de la película lubricante y de la excentricidad relativa, siendo independiente de las características del rotor (masa y elasticidad) [10]. A partir de sustituir en la Ec. (4.12) las magnitudes dimensionales correspondientes, se obtiene:

$$\frac{c m \omega_s^2}{F_o} = \frac{k_{eq}}{\Omega_s} \omega_s \rightarrow \Omega_s = \sqrt{\frac{k_{eq} F_o}{m c}} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} \quad (4.13)$$

Esta expresión permite concluir que, para un rotor rígido, la frecuencia de precesión en el

umbral coincide con la frecuencia natural del sistema en ese punto. Cuando los valores de excentricidad son muy bajos ($\varepsilon \rightarrow 0$) los coeficientes elásticos y de amortiguación son:

$$k_{XX} = k_{YY} = 0, \quad c_{XX} = c_{YY}, \quad k_{XY} = k_{YX}, \quad c_{XY} = c_{YX} = 0 \quad (4.14)$$

y

$$\frac{\Omega_s}{\omega_s} = \frac{k_{XY}}{c_{XX}} = 0.5, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.15)$$

En el límite teórico de excentricidad nula ($\varepsilon \rightarrow 0$), la relación de frecuencias tiende a $\bar{\omega} \approx 0.5$. Este valor es una característica de los cojinetes hidrodinámicos lisos e indica que el rotor comienza a precesionar a la mitad de la velocidad de giro del eje [10, 123]. Además, en ausencia de cargas externas (como puede ser el caso de turbomaquinaria vertical), el cojinete no posee coeficientes elásticos ($K_{eq} = 0$), la frecuencia natural es 0, y el rotor precesiona en todas las velocidades. También, puede observarse que si $K_{XY} = 0$, el fluido no tiene efectos cruzados y entonces $\Omega_s = 0$, lo que implica que el sistema siempre sea estable. En la práctica, esto ocurre generalmente para valores de $\varepsilon \geq 0.7$. Si se define a partir de este resultado un valor límite como la velocidad de rotación máxima del eje, se obtiene:

$$\omega_{b,m\acute{a}x} = 0.5 \Omega_s = 2 \Omega_n \quad (4.16)$$

donde se deduce que la velocidad máxima de operación del eje es dos veces la frecuencia natural del sistema. Estos parámetros límites de funcionamiento resultan fundamentales para el estudio que se realiza las siguientes secciones.

4.2. Rotor de Jeffcott

Para el análisis del comportamiento de ejes flexibles se utiliza el modelo de rotor propuesto por Jeffcott [124] que se muestra en la Fig. 4.3a, y consiste en un disco delgado acoplado a un eje flexible uniforme y de masa despreciable, el cual a su vez está soportado por cojinetes rígidos y sin fricción. El sistema de coordenadas (O, X, Y, Z) , es inercial con la dirección Z en la dirección axial, mientras que el sistema (o', x', y', z') está fijo al disco y sus coordenadas son $(X(o'), Y(o'), Z(o'))$, con $\vec{R}_d$ como el vector desplazamiento que describe esta posición respecto del sistema inercial. El centro de masa del disco no es coincidente con el eje del rotor, sino que se encuentra a una distancia $\vec{\delta}_u$ relativo al origen del sistema (x', y', z') tal como muestra la Fig. 4.3b. Esta magnitud se denominará como vector desbalance y puede descomponerse en el sistema inercial como δ_X y δ_Y . La rotación del sistema relativo respecto del sistema inercial, está deter-

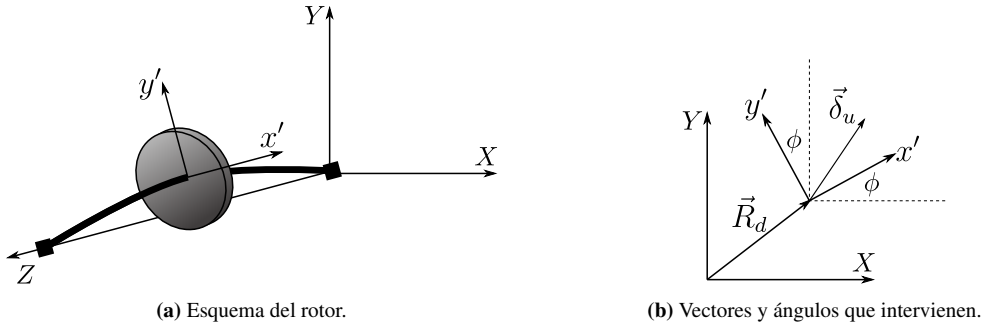


Figura 4.3: Rotor de Jeffcott.

minado por el ángulo ϕ . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para el sistema pueden ser planteadas como:

$$m \ddot{X} + c_e \dot{X} + k_e X = F_X + m \delta_X \dot{\phi}^2 + m \delta_Y \ddot{\phi} \quad (4.17)$$

$$m \ddot{Y} + c_e \dot{Y} + k_e Y = F_Y + m \delta_Y \dot{\phi}^2 + m \delta_X \ddot{\phi} \quad (4.18)$$

$$J_Z \ddot{\Omega} = M_Z + m \delta_Y \ddot{X} - m \delta_X \ddot{Y} \quad (4.19)$$

donde,

$$\delta_X = \delta_{x'} \cos \phi - \delta_{y'} \sin \phi \quad (4.20)$$

$$\delta_Y = \delta_{x'} \sin \phi + \delta_{y'} \cos \phi \quad (4.21)$$

Además, m es la masa del rotor, k_e y c_e son las constantes elástica y de amortiguación respectivamente y J_Z es el momento de inercia en la dirección Z . Las componentes de la fuerza externa se denotan por F_X y F_Y , y la componente del momento externo en dirección Z es M_Z .

Se observa que el movimiento transversal del rotor es afectado por las componentes del vector de fuerzas externas. Sin embargo, el término fuente dominante viene dado por el vector de desbalance $\vec{\delta}_u$. Para analizar la respuesta del desplazamiento ante estas cargas a una velocidad constante ($\dot{\Phi} = \omega_b$) e ignorando el efecto de amortiguación ($c_e = 0$), puede introducirse el uso de las siguientes variables complejas:

$$\mathbf{R} = X + j Y \quad \mathbf{D}_u = \delta_X + j \delta_Y \quad \mathbf{d}_u = \delta_{x'} + j \delta_{y'} \quad (4.22)$$

para obtener:

$$\ddot{\mathbf{R}} + \lambda_n^2 \mathbf{R} = \omega_b^2 \mathbf{d}_u e^{j\omega_b t} = \omega_b^2 \mathbf{D}_u, \quad \lambda_n^2 = k/m. \quad (4.23)$$

La solución de estado estacionario para $\omega \neq \lambda_n$ es:

$$\mathbf{R} = \frac{\omega_b^2}{\lambda_n^2 - \omega_b^2} \mathbf{d}_u e^{j\omega_b t} = \frac{1}{(\lambda_n/\omega_b)^2 - 1} \mathbf{D}_u \quad (4.24)$$

Para $\omega = \lambda_n$, la solución particular resulta:

$$\mathbf{R} = \frac{t\lambda_n}{2} \mathbf{d}_u e^{j(\omega_b t - \pi/2)} = \frac{t\lambda_n}{2} \mathbf{D}_u e^{-j\pi/2} \quad (4.25)$$

Esta ecuación indica que el desplazamiento $\vec{R}_d$ y el desbalance $\vec{\delta}$ son vectores que están en fase para una velocidad de funcionamiento que sea mucho más baja que la frecuencia natural no amortiguada del sistema λ_n (Fig. 4.4a), mientras que cuando ω_b es mucho más grande que λ_n , ambos vectores se encuentran desfasados 180 grados (Fig. 4.4c). Para $\omega_b = \lambda_n$, la amplitud de $\vec{R}_d$ crece linealmente con el tiempo, y se encuentra 90 grados desfasado del vector $\vec{\delta}_u$ (Fig. 4.4b). Esta interpretación física indica que el movimiento del rotor es armónico simple cuando se observa desde un plano lateral, describiendo una órbita circular en el plano transversal. Dado que la frecuencia de este movimiento coincide con la velocidad de rotación ω_b , se denomina respuesta “sincrónica”. Al incrementar ω_b desde el reposo, se alcanza un valor donde la amplitud del desplazamiento diverge siendo esta la velocidad crítica. Para el rotor de Jeffcott ideal, esta velocidad es idéntica a la frecuencia natural del sistema, una coincidencia que desaparece en modelos más complejos donde intervienen la anisotropía de los soportes o efectos giroscópicos [10].

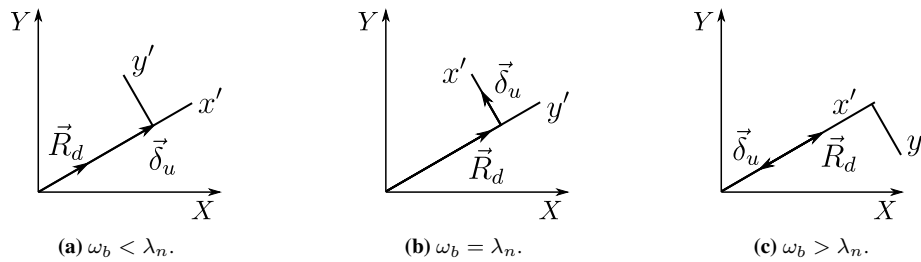


Figura 4.4: Respuesta sincrónica del rotor de Jeffcott.

Si ahora se considera el efecto de amortiguación ($c_e \neq 0$), la expresión en términos de variable compleja se resume en:

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\zeta_e \lambda_n \dot{\mathbf{R}} + \lambda_n^2 \mathbf{R} = \omega_b^2 \mathbf{d}_u e^{j\omega_b t} = \omega_b^2 \mathbf{D}_u \quad (4.26)$$

donde:

$$2\zeta_e \lambda_n = \frac{c_e}{m} \quad (4.27)$$

La solución de estado estacionario para esta configuración resulta:

$$\mathbf{R} = \frac{\omega_b^2}{\sqrt{(\lambda_n^2 - \omega_b^2) + 4\zeta_e^2 \lambda_n^2 \omega_b^2}} \mathbf{d}_u e^{j\omega_b t} \quad (4.28)$$

y, el ángulo de desfase se obtiene como:

$$\tan \psi_d = \frac{-2\zeta_e \lambda_n \omega_b}{\lambda_n^2 - \omega_b^2} \quad (4.29)$$

Dividiendo ambas ecuaciones por λ_n y reordenando, se obtienen las expresiones de la amplitud de desplazamiento adimensional y del ángulo de desfase, en función de la relación de frecuencias ω_b/λ_n , tal como se muestran a continuación:

$$\mathbf{R}/\mathbf{d}_u = \frac{(\omega_b/\lambda_n)^2}{\sqrt{(1 - (\omega_b/\lambda_n)^2) + 4\zeta_e^2 (\omega_b/\lambda_n)^2}} \quad (4.30)$$

$$\tan \psi_d = \frac{-2\zeta_e \omega_b}{1 - (\omega_b/\lambda_n)^2} \quad (4.31)$$

La Figura 4.5 muestra de forma gráfica como la vibración se ve afectada por la cercanía de la velocidad de rotación a la frecuencia de resonancia. En términos físicos, el rotor está en fase con el desbalance para bajas velocidades ($\omega_b/\lambda_n < 1$), está desfasado 180 grados para altas velocidades ($\omega_b/\lambda_n > 1$), y a 90 grados detrás cuando el rotor está en la frecuencia de resonancia.

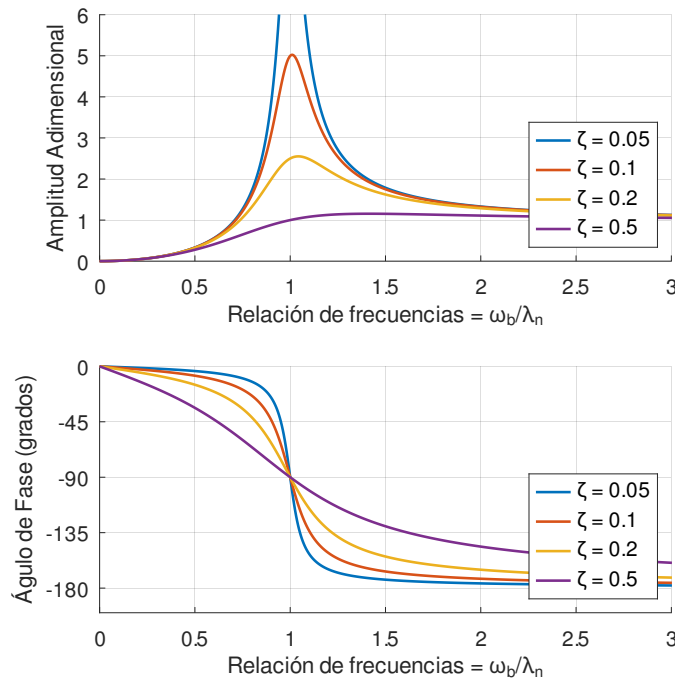


Figura 4.5: Respuesta de estado estacionario del rotor de Jeffcott.

La solución homogénea para esta configuración se muestra en la Ec. (4.32), y consiste en dos orbitas amortiguadas de precesión con un determinado período T (Ec. (4.33)). El primer término de la Ecuación (4.32) es la solución en la misma dirección de rotación del rotor (*forward precession* - FP), mientras que el segundo término se corresponde con la solución en el sentido contrario (*backward precession* - BP).

$$\mathbf{R}_h = A_1 e^{\lambda_n(-\zeta_e + j\sqrt{1-\zeta_e^2})t} + A_2 e^{\lambda_n(-\zeta_e - j\sqrt{1-\zeta_e^2})t} \quad (4.32)$$

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_n \sqrt{1-\zeta_e^2}} \quad (4.33)$$

En términos matemáticos, el modelo de Jeffcott presenta raíces complejas conjugadas en $-\zeta_e \lambda_n \pm j\lambda_n \sqrt{1-\zeta_e^2}$, cuya parte imaginaria define las frecuencias naturales del sistema asociadas a los modos de precesión en avance (Forward Precession - FP) y retroceso (Backward Precession - BP). Si bien en este modelo idealizado ambas frecuencias coinciden, la inclusión de efectos giroscópicos o anisotropía en los soportes (fenómenos que se analizarán mediante el diagrama de Campbell en secciones posteriores) provocará la bifurcación de estas raíces, evidenciando la separación de los componentes FP y BP. No obstante, se observa en la Ec. (4.28) que sólo el modo en avance es excitado por el desbalance del rotor.

Si bien el modelo de Jeffcott sobre soportes rígidos permite identificar la naturaleza de la respuesta sincrónica, la predicción de la estabilidad en sistemas reales requiere considerar la interacción entre la flexibilidad del eje y las fuerzas dinámicas del lubricante. En ejes flexibles soportados por cojinetes hidrodinámicos, tal como se comentará en la sección posterior, da lugar a fenómenos donde las fuerzas del fluido se acoplan con los modos de flexión del rotor.

4.3. Fenómenos inestables: Oil Whirl y Oil Whip

Como se analiza en las secciones previas, el rotor alcanza un punto de equilibrio estático definido por su excentricidad ε_o y su ángulo de actitud ϕ_o . Sin embargo, la naturaleza del fluido en los cojinetes introduce fuerzas de acoplamiento cruzado que pueden desestabilizar el sistema cuando la velocidad de funcionamiento ω_b supera un umbral crítico, generalmente cercano al doble de la primera frecuencia natural del sistema ($\omega_b \approx 2\omega_n$).

Muszynska [40] reportó este tipo de respuesta a través de un gráfico de cascada (*waterfall plots*) donde se muestran las frecuencias de precesión para diferentes velocidades de funcionamiento. La Fig. 4.6 muestra que cuando el eje comienza a rotar con una velocidad de rotación que aumenta lentamente, se observan vibraciones laterales sincrónicas ($1\times$, es decir, a la misma frecuencia que la velocidad de rotación) de baja amplitud a lo largo de todo el eje del rotor. Estas

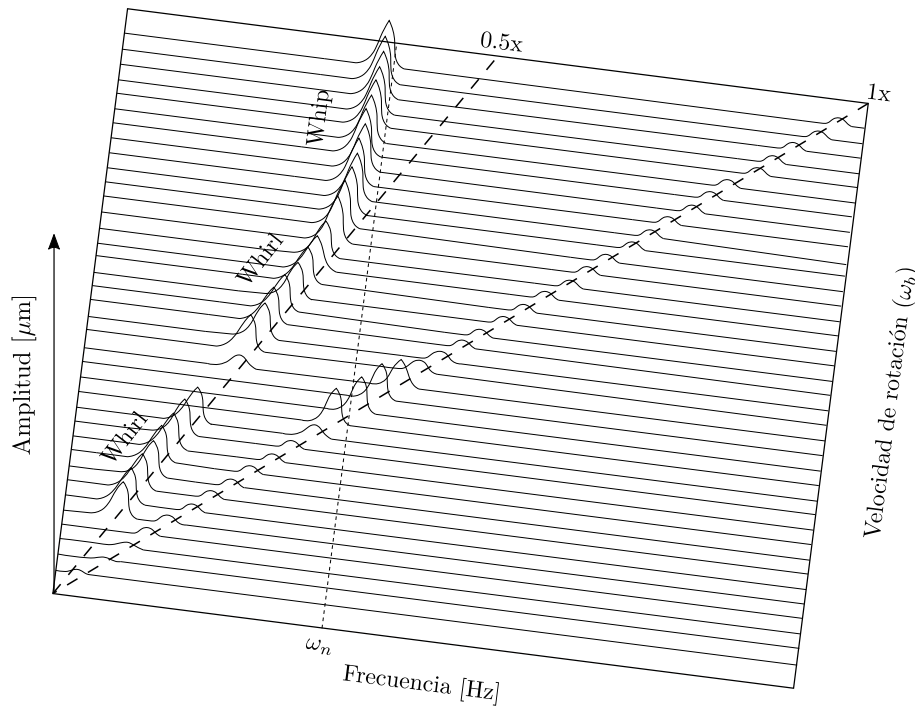


Figura 4.6: Cascada de amplitud de frecuencias según la velocidad de rotación. En línea de trazos se diferencian las frecuencias sincrónicas ($1\times$) y subsincrónicas ($0.5\times$)

vibraciones son causadas por las fuerzas de inercia del desbalance del rotor. En este régimen, el sistema es estable y cualquier perturbación transitoria es rápidamente amortiguada.

A velocidades de rotación más altas (generalmente por debajo de la primera frecuencia de resonancia), la vibración sincrónica forzada no es el único régimen de movimiento. Junto con las vibraciones $1\times$, aparece el denominado “Oil Whirl”. Este fenómeno es una vibración subsincrónica de precesión lateral alrededor del punto de equilibrio del cojinete, a una frecuencia cercana a la mitad de la velocidad de rotación. En este rango de velocidad de rotación, el rotor se comporta como un cuerpo rígido. Las amplitudes del Oil Whirl suelen ser mucho más elevadas que las de las vibraciones sincrónicas. Sin embargo, están limitadas por el huelgo del cojinete y las fuerzas no lineales del fluido. Con el aumento de la velocidad de rotación, el patrón de vibración permanece estable. La frecuencia del Oil Whirl sigue el incremento de la velocidad de rotación, manteniendo la relación de $\sim 0.5\times$ con esta. Las amplitudes de vibración permanecen casi constantes y generalmente elevadas. En el rango de velocidad de rotación considerado, los efectos dinámicos del fluido del cojinete predominan claramente. La vibración sincrónica forzada representa una pequeña fracción de la respuesta vibratoria, tal como indica el gráfico de cascada de la Figura 4.6 [9, 10, 40].

Cuando el incremento de la velocidad de rotación se aproxima a la primera frecuencia de resonancia ω_n , el Oil Whirl se vuelve repentinamente inestable y desaparece, siendo suprimido y reemplazado por vibraciones sincrónicas crecientes. Las vibraciones forzadas predominan, alcan-

zando sus amplitudes máximas en la frecuencia de resonancia correspondiente a las propiedades de masa y rigidez del rotor. En este punto, los efectos dinámicos del fluido del cojinete ceden la prioridad a los efectos mecánicos elásticos del rotor [9, 10, 40]. Para velocidades superiores a la primera velocidad de resonancia, las vibraciones sincrónicas forzadas decaen. Nuevamente, las fuerzas del fluido del cojinete entran en acción. Poco después de la primera frecuencia natural, y con el aumento de la velocidad de rotación, el Oil Whirl ocurre nuevamente. El patrón descrito anteriormente se repite. El ancho de la región de velocidad de rotación en la cual predominan las vibraciones sincrónicas depende directamente de la magnitud del desbalance del rotor: cuanto mayor sea el desbalance, más amplia será esta región.

Cuando la velocidad de rotación se aproxima al doble del valor de la primera frecuencia de resonancia, la frecuencia del Oil Whirl (que, como se mencionó, es aproximadamente igual la mitad de la velocidad de giro) alcanza el valor de dicha resonancia ($\Omega_s = 0.5 \omega_b = \omega_n$). El patrón del Oil Whirl es reemplazado por el denominado “Oil Whip”, una vibración subsincrónica de precesión lateral del rotor. El Oil Whip tiene una frecuencia constante: independientemente del incremento de la velocidad de rotación, la frecuencia del Oil Whip se mantiene cercana a la primera frecuencia natural del rotor. Este fenómeno es denominado, bloqueo de frecuencia [10, 40]. En este rango de alta velocidad, el eje no puede considerarse rígido. Su flexibilidad, es decir, sus grados de libertad adicionales, provoca que el sistema rotor-cojinete esté estrechamente acoplado. Los parámetros del rotor (su masa y rigidez, en particular) se convierten en los factores dinámicos dominantes. La amplitud de la vibración del muñón durante el Oil Whip está limitada por el huelgo del cojinete, pero la vibración del eje puede volverse muy elevada, ya que este vibra en condiciones de resonancia.

Entre los fenómenos dinámicos descritos, existe una clara distinción relacionada con su naturaleza. Por un lado, la vibración lateral sincrónica del rotor ($1\times$) debida al desbalance y, por otro lado, la vibración del rotor relacionada con el fluido. El movimiento resultante tiene la forma de la clásica vibración forzada sincrónica ($1\times$). Por el contrario, el segundo tipo de vibraciones se define como “auto-excitadas”, originadas por un mecanismo de retroalimentación interna que convierte la energía cinética de rotación en movimiento vibratorio lateral. A diferencia de los sistemas pasivos, donde el amortiguamiento siempre actúa como un agente estabilizador, en estos sistemas la dinámica del lubricante puede actuar como una fuente de energía, alimentando la precesión del rotor incluso en ausencia de excitaciones externas.

A menudo, el Oil Whirl y el Oil Whip se describen como un movimiento “inestable” del rotor en un sentido cercano a los términos vibraciones “indeseables” o “inaceptables”. Obviamente, estas vibraciones son altamente indeseables, ya que perturban la operación normal de la máquina.

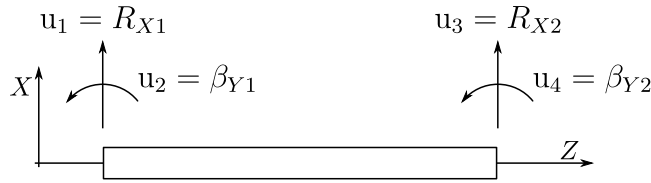


Figura 4.7: Grados de libertad del elemento de viga en un plano $X - Z$.

La operación normal se relaciona con el movimiento puramente rotacional del rotor alrededor de su eje adecuado y a una velocidad angular conveniente. Por otro lado, como ya se mencionó previamente, estos fenómenos son evitables si se alcanzan elevadas excentricidades en los cojinetes [10, 40].

Para predecir con precisión estos umbrales en geometrías complejas, es necesario recurrir al Método de Elementos Finitos, el cual permite capturar la flexibilidad distribuida del eje y su interacción tanto con cojinetes, como con otros elementos acoplados al rotor.

4.4. Método de elementos finitos aplicado a rotores elásticos

El Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) es un método para el análisis de tensiones, vibraciones, flujos térmicos y muchos otros fenómenos. La implementación de esta técnica en rotodinámica fue realizada en primer lugar por Ruhl y Booker [125] con posteriores contribuciones de Nelson [126]. En esta sección se comentará brevemente el desarrollo necesario para realizar el estudio de ejes flexibles soportados por cojinetes hidrodinámicos. Una descripción detallada del FEM puede encontrarse en los textos de Johnson [127], Oñate [128], Zienkiewicz [129], entre otros.

La Figura 4.7 ilustra un segmento de viga uniforme con sus respectivos grados de libertad en el plano $X - Z$: Desplazamiento (R_1, R_2) y rotación en cada uno de sus extremos (β_1, β_2). La masa de la viga está uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. La ecuación de movimiento gobernante para esta situación resulta:

$$\lambda_m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 r}{\partial t^4} = f(s, t) \quad (4.34)$$

donde λ_m es la masa por unidad de longitud, E es el módulo elástico del material, I es el momento de inercia de la sección transversal y $f(s, t)$ es la carga externa distribuida. A partir de la propiedad de separación de variables, se puede proponer una solución de la forma:

$$r(s, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(s) u_i(t) \quad (4.35)$$

donde $\psi_i(s)$ se corresponde con las funciones de forma que son requeridas para satisfacer la ecuación homogénea estática. Las funciones $u_i(t)$ son identificadas como:

$$u_1 = R_{X1} \quad u_2 = \beta_{Y1} \quad u_3 = R_{X2} \quad u_4 = \beta_{Y2} \quad (4.36)$$

Estos valores son ordenados en el vector desplazamientos $\mathbf{u}$, siendo $\dot{\mathbf{u}}$ su correspondiente derivada en el tiempo. A partir de estas relaciones, las funciones de forma $\psi_i(s)$ requieren cumplir las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 1 & \psi_2(0) &= 0 & \psi_3(0) &= 0 & \psi_4(0) &= 0 \\ \psi'_1(0) &= 0 & \psi'_2(0) &= 1 & \psi'_3(0) &= 0 & \psi'_4(0) &= 0 \\ \psi_1(L) &= 0 & \psi_2(L) &= 0 & \psi_3(L) &= 1 & \psi_4(L) &= 0 \\ \psi'_1(L) &= 0 & \psi'_2(L) &= 0 & \psi'_3(L) &= 0 & \psi'_4(L) &= 1 \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde la notación prima indica derivación con respecto a s . La ecuación estática homogénea asociada al problema resulta:

$$\frac{d^4 r}{ds^4} = 0 \quad (4.38)$$

y tiene solución:

$$r = \frac{C_1}{3}s^3 + \frac{C_2}{2}s^2 + C_3s + C_4 \quad (4.39)$$

Por lo tanto, las funciones de forma, quedan definidas como:

$$\psi_1(s) = 1 - 3s^2/L^2 + 2s^3/L^3 \quad (4.40)$$

$$\psi_2(s) = s - 2s^2/L + s^3/L^2 \quad (4.41)$$

$$\psi_3(s) = 3s^2/L^2 - 2s^3/L^3 \quad (4.42)$$

$$\psi_4(s) = -s^2/L + s^3/L^2 \quad (4.43)$$

y la solución aproximada resulta:

$$\begin{aligned} r(s, t) &= u_1(t) (1 - 3s^2/L^2 + 2s^3/L^3) + u_2(t) (s - 2s^2/L + s^3/L^2) \dots \\ &+ u_3(t) (3s^2/L^2 - 2s^3/L^3) + u_4(t) (-s^2/L + s^3/L^2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Definiendo la energía cinética como:

$$E_T = \frac{1}{2} \int_0^L \lambda_m \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 ds \quad (4.45)$$

Reemplazando por la solución aproximada obtenida en la Ec. 4.44:

$$E_T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (4.46)$$

con:

$$\mathbf{M} = \frac{\lambda_m L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

De forma similar, sustituyendo la solución de la Ec. 4.44, en la función energía potencial:

$$E_V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \right)^2 ds = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.48)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Luego, el Lagrangiano L del sistema queda definido por:

$$L = E_T - E_V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.50)$$

y las ecuaciones del movimiento, con $\mathbf{F}$ como el vector de cargas externas, quedan expresadas como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.51)$$

4.4.1. Matrices elementales para rotores

Las ecuaciones y matrices anteriormente desarrolladas fueron planteadas para una viga en la cuál se despreciaron los efectos de la inercia rotacional y giroscópicos. Siguiendo el mismo procedimiento que el planteado, pero considerando un elemento de viga en el cuál el movimiento puede ser en los planos $X - Z$ e $Y - Z$ (Fig. 4.8) las nuevas incógnitas del problema a resolver

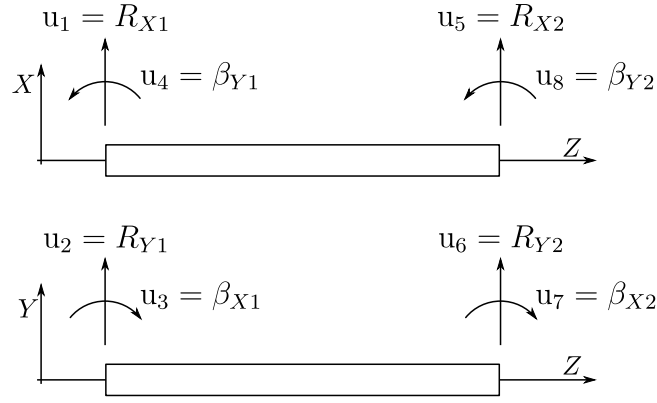


Figura 4.8: Grados de libertad del elemento de viga en los planos $X - Z$ e $Y - Z$.

son:

$$\begin{aligned} u_1 = R_{X1} \quad u_2 = R_{Y1} \quad u_3 = \beta_{X1} \quad u_4 = \beta_{Y1} \\ u_5 = R_{X2} \quad u_6 = R_{Y2} \quad u_7 = \beta_{X2} \quad u_8 = \beta_{Y2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Las funciones que describen el desplazamiento en los planos $X - Z$ y $Y - Z$ son $r(s, t)$ y $p(s, t)$ respectivamente, y quedan formuladas en términos de las funciones de forma:

$$r(s, t) = u_1\psi_1 + u_4\psi_2 + u_5\psi_3 + u_8\psi_4 \quad (4.53)$$

$$p(s, t) = u_2\psi_1 - u_3\psi_2 + u_6\psi_3 - u_7\psi_4 \quad (4.54)$$

La orientación del elemento de viga está definido por los ángulos α_b y β_b de la Figura 4.8, los cuales están en términos de $r(s, t)$ y $p(s, t)$ por:

$$\beta_b(s, t) = \frac{\partial r(s, t)}{\partial s} = u_1\psi'_1 + u_4\psi'_2 + u_5\psi'_3 + u_8\psi'_4 \quad (4.55)$$

$$\alpha_b(s, t) = -\frac{\partial p(s, t)}{\partial s} = -u_2\psi'_1 + u_3\psi'_2 - u_6\psi'_3 + u_7\psi'_4 \quad (4.56)$$

El signo negativo es necesario para cumplir con la regla de la mano derecha en cuanto al sentido de rotación positivo sobre el eje X . Expresando esto mismo pero de forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} r(s, t) \\ p(s, t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(s)\mathbf{u}(t) \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_b(s, t) \\ \beta_b(s, t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}(s)\mathbf{u}(t) \quad (4.58)$$

donde:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -\psi'_1 & \psi'_2 & 0 & 0 & -\psi'_3 & \psi'_4 & 0 \\ \psi'_1 & 0 & 0 & \psi'_2 & \psi'_3 & 0 & 0 & \psi'_4 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

La energía cinética para el elemento es obtenida a partir de considerar la energía de un diferencial de viga ds e integrando a lo largo de la longitud. Por lo tanto:

$$dE_T = \frac{\lambda_m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{p}^2) + \frac{I_P}{2}(\dot{\alpha}_b + \dot{\beta}_b) + \frac{\bar{I}_P}{2}(\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}\alpha\dot{\beta}) \quad (4.61)$$

donde λ_m , $\bar{I}$ y $\bar{I}_P$ son la masa, y los momentos de inercia diametral y polar, respectivamente. Sustituyendo

$$dE_T = \frac{\lambda_m}{2}\dot{\mathbf{u}}^T \Psi^T \Psi \dot{\mathbf{u}} + \frac{\bar{I}}{2}\dot{\mathbf{u}}^T \Gamma^T \Gamma \dot{\mathbf{u}} - \dot{\phi} \bar{I}_P \mathbf{u}^T \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta \dot{\mathbf{u}} + \frac{\bar{I}_P}{2}\dot{\phi}^2 \quad (4.62)$$

El primer término corresponde al movimiento de traslación rectilínea, el segundo corresponde con la inercia de rotación, el tercero con el acoplamiento giroscópico y, el último con la rotación del eje del rotor. Integrando a lo largo del elemento finito, la definición de la energía cinética resulta:

$$E_T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T [\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R] \dot{\mathbf{u}} - \dot{\phi} \mathbf{u}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} + \dot{\phi}^2 \frac{\bar{I}_P}{2} \quad (4.63)$$

donde:

$$\mathbf{M}_T = \int_0^L \lambda_m \Psi^T \Psi ds \quad (4.64)$$

$$\mathbf{M}_R = \int_0^L \bar{I} \Gamma^T \Gamma ds \quad (4.65)$$

$$\mathbf{N} = \int_0^L \bar{I}_P \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta ds \quad (4.66)$$

La función de energía potencial desarrollada anteriormente debe ser modificada para poder considerar la energía de la flexión en el plano $Y - Z$. Por lo que la energía potencial por unidad de longitud queda expresada como:

$$dE_V = \frac{EI}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \right)^2 \right] = \frac{EI}{2} \mathbf{u}^T \Psi''^T \Psi'' \mathbf{u} \quad (4.67)$$

y la función energía potencial integrada en el elemento es:

$$E_V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \quad (4.68)$$

con:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EI \Psi^T \Psi ds \quad (4.69)$$

Definiendo al Lagrangiano del sistema $L = E_T - E_V$, se obtiene la ecuación del movimiento para velocidad constante ($\dot{\phi} = \omega_b$):

$$[\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R] \ddot{\mathbf{u}} - \omega_b \mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_e \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.70)$$

donde la matriz de efectos giroscópicos acoplados $\mathbf{G}$ es antisimétrica y definida por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \quad (4.71)$$

Con todo el desarrollo realizado, finalmente, las matrices elementales de inercia traslacional ($\mathbf{M}_T$), inercia rotacional ($\mathbf{M}_R$), efectos giroscópicos ($\mathbf{G}$) y de rigidez ($\mathbf{K}_e$) se muestran a continuación:

$$\mathbf{M}_T = \frac{\lambda_m L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 0 & 54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & 0 & -13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{\bar{I}}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\bar{I}_P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36L & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36L & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3L & -6 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 6 & -3L & 0 & 0 & -6 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 2L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 2L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ -6 & 0 & 0 & -3L & 6 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -6 & 3L & 0 & 0 & 6 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & 2L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

4.4.2. Ensamblaje de la matriz global del rotor: discos y cojinetes

El ensamblaje de la matriz global se realiza considerando que cada elemento finito está conectado a su vecino mediante la interacción de un nodo mediante la discretización 1D que se muestra en la Fig. 4.9. Tal como se mostró anteriormente, los elementos de viga utilizados para la discretización se modelan con matrices 8×8 capaces de representar los 8 grados de libertad. En el caso de los elementos adicionales que se pueden adicionar a un nodo (como por ejemplo un disco o un

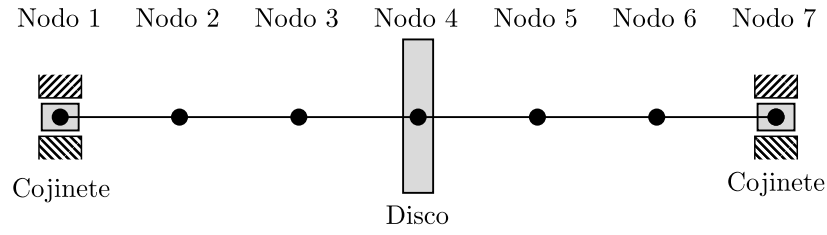


Figura 4.9: Discretización del eje rotante.

cojinete linealizado), su influencia puede describirse mediante matrices 4×4 . Para el caso de un disco su matriz de masa $\mathbf{M}_d$ se determina como:

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

donde m_d se corresponde con la masa del disco e I_x es el momento de inercia transversal. Por su parte, la matriz giroscópica $\mathbf{G}_d$ resulta:

$$\mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_d \\ 0 & 0 & I_d & 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

donde I_d es el momento de inercia polar. Si el disco no es lo suficientemente delgado, debe tenerse en cuenta los momentos de inercia de una barra dado que esto puede conducir a una mala representación de la geometría real.

El caso de la utilización de cojinetes linealizados, tal como se ha comentado anteriormente, la matrices de masa $\mathbf{M}_b$, rigidez $\mathbf{K}_b$ y de amortiguación $\mathbf{C}_b$ se conforman por la masa de rotor m , y los coeficientes elásticos y de amortiguación resultando:

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

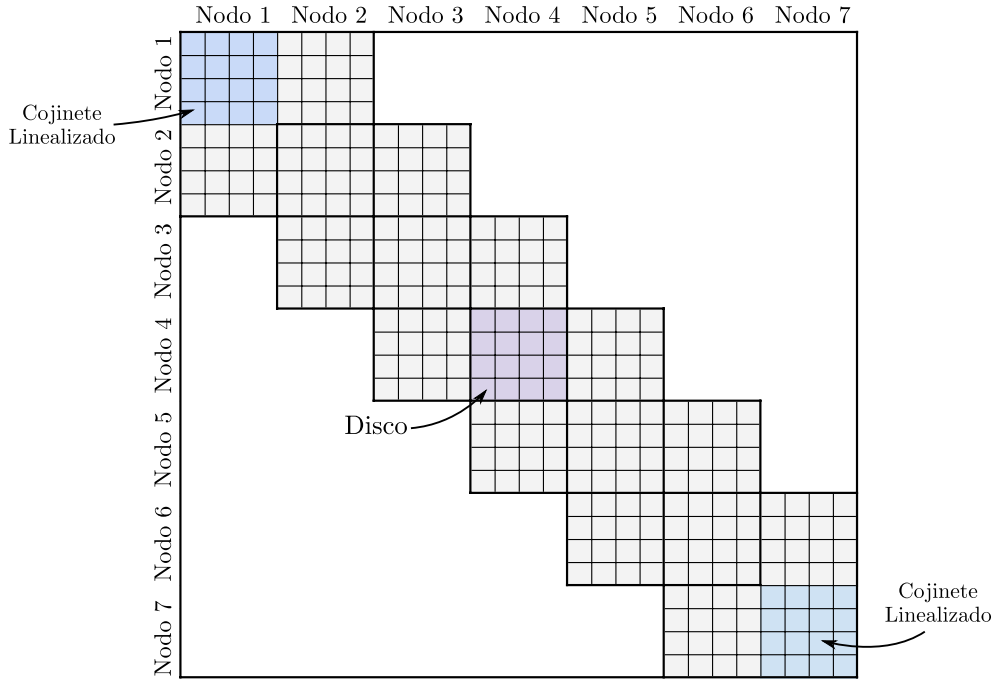


Figura 4.10: Acoplamientos de matrices elementales en la matriz global.

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

La Fig. 4.10 esquematiza el acoplamiento entre las matrices elementales. En este agrupamiento, los términos de las matrices de un grado de libertad se suman a los términos del mismo grado de libertad de otra matriz elemental. Las coeficientes que resultan de la linealización del cojinete hidrodinámico actúan en los grados de libertad correspondientes al nodo donde se encuentra el cojinete [130]. En el caso de que los cojinetes no se expresen a través de sus coeficientes linealizados, la fuerza hidrodinámica en sus componentes (F_X e F_Y) se consideran directamente como aportes en el vector de cargas externas F de la Ec. (4.51) para los nodos donde se encuentren los cojinetes.

La ecuación de movimiento para el sistema completamente linealizado, resulta:

$$[\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_d] \ddot{\mathbf{u}} - (\mathbf{C}_b + \omega_b \mathbf{G} + \omega_b \mathbf{G}_d) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_b) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.81)$$

4.4.3. Mapeo de frecuencias resonantes

El análisis de los autovalores del sistema global permite identificar las frecuencias naturales amortiguadas y sus respectivos modos de precesión. A diferencia de las estructuras estáticas, en rotodinámica estas frecuencias son funciones dependientes de la velocidad de rotación ω_b , debido principalmente a dos factores: la acción de los momentos giroscópicos y la variabilidad de los coeficientes dinámicos de los cojinetes hidrodinámicos.

Para visualizar esta evolución, se recurre al Diagrama de Campbell (Fig. 4.11). En este gráfico, el eje de las abscisas representa la velocidad de rotación, mientras que el eje de las ordenadas muestra las frecuencias naturales (parte imaginaria de los autovalores). La importancia de este diagrama radica en la identificación de las velocidades críticas, definidas por la intersección de las curvas de precesión en avance (Forward Whirl - FW) con la recta de excitación sincrónica ($1\times$). El desdoblamiento de las curvas conforme aumenta la velocidad evidencia el efecto giroscópico, el cual tiende a “endurecer” los modos en avance y “ablandar” los modos en retroceso (Backward Whirl - BW).

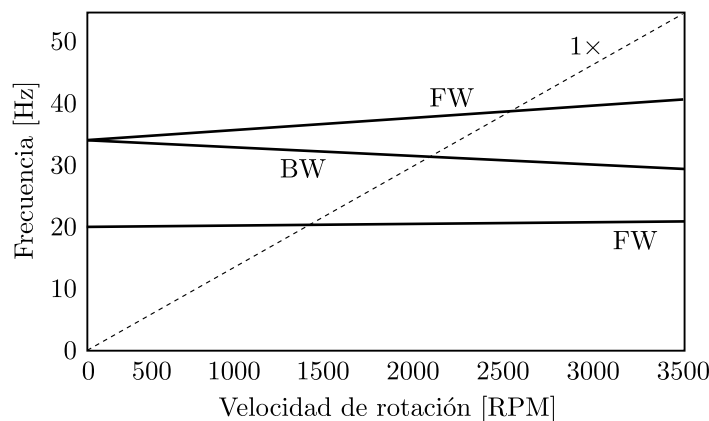


Figura 4.11: Representación de un Diagrama de Campbell.

4.5. Código rotorDynCav

Para el estudio del comportamiento dinámico del sistema eje-cojinete, se ha desarrollado una herramienta de simulación en el entorno Octave®. El código permite modelar la respuesta transitoria y estacionaria de un rotor flexible considerando efectos giroscópicos, desbalance de masa y fuerzas hidrodinámicas no lineales en los apoyos.

El eje se discretiza mediante elementos de viga Euler-Bernoulli de cuatro grados de libertad por nodo (como los descritos anteriormente). La formulación se centraliza en el módulo `matrixR.m`, el cual ensambla las matrices globales de masa (**M**), rigidez (**K**) y amortiguamiento giroscópico (**C**). El código permite además la incorporación de discos rígidos en nodos específicos, suman-

do sus propiedades de inercia polar (I_d) e inercia transversal (I_x) directamente a las matrices globales.

El código numérico contempla tres niveles de complejidad para los apoyos:

- **Modelo Lineal:** Utiliza coeficientes constantes de rigidez (K_b) y amortiguamiento (C_b), válidos para pequeñas perturbaciones alrededor de una posición de equilibrio.
- **Modelo de Cojinete Corto (Ocvirk / ISJB):** Implementado mediante una solución analítica de la ecuación de Reynolds. Este modelo permite calcular las fuerzas de reacción de forma instantánea en función de la excentricidad (ϵ) y el ángulo de actitud (ϕ), capturando la no linealidad del film de aceite.
- **Resolución de la ecuación Reynolds bifásica:** Este módulo devuelve los valores de fuerzas calculados para cada paso de tiempo por el código dynCav propuesto. Retiene en memoria la distribución de la fracción de lubricante líquido de forma de poder evaluar la evolución de la región de cavitación en el tiempo. A su vez, permite el estudio de la dinámica de cojinetes con superficies texturadas, tanto en la carcasa como en el eje rotante.

El sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento se resuelve en el dominio del tiempo mediante el algoritmo de Newmark (contenido en `intNewmark_NL.m`). Este esquema de integración implícita calcula paso a paso el vector de desplazamientos (U), velocidades (V) y aceleraciones (A). En cada incremento de tiempo (Δt), el código actualiza la fuerza de desbalance y las reacciones no lineales de los cojinetes, garantizando la convergencia del sistema. El algoritmo incluye la opción de realizar una rampa de velocidad lo que permite simular el arranque o la parada de la máquina y observar el paso por las velocidades críticas de manera continua.

Por su parte, el módulo `campbell_mod.m` realiza un análisis de autovalores para determinar las frecuencias naturales del sistema en función de la velocidad de giro. Al iterar sobre el rango operativo, se construye el Diagrama de Campbell, que permite identificar las intersecciones entre las frecuencias excitadoras (armónicos de la velocidad de rotación) y los modos naturales del rotor, definiendo así las zonas de operación segura y los márgenes de estabilidad frente al fenómeno de Oil Whip.

Capítulo 5

Resultados

En los capítulos anteriores se han abordado desde los fundamentos de la lubricación hasta la dinámica de ejes flexibles soportados por cojinetes hidrodinámicos. A través de estos desarrollos, se establecieron modelos analíticos para determinar el campo de presiones y la capacidad portante en condiciones teóricas ILJB e ISJB, analizando además las características dinámicas de sistemas linealizados, la influencia del texturado superficial y los efectos térmicos. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, se desarrolló una formulación de Reynolds para flujo bifásico capaz de integrar modelos de cavitación vaporosa, gaseosa y de pseudo-cavitación. Este desarrollo se materializó en el código dynCav, implementado tanto en Octave® como en el entorno OpenFOAM® mediante el Método de Áreas Finitas y del uso de esquemas de discretización que aseguran una convergencia de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo. Por último, se integró el estudio de la dinámica de ejes rígidos y flexibles en interacción con los fenómenos de inestabilidad de la película lubricante.

Las secciones que conforman este capítulo presentan y discuten los resultados derivados de estos desarrollos. Para todos los casos desarrollados, el signo de la excentricidad relativa corresponde con el signo de los ejes de coordenadas X e Y (Fig. 2.3a). El número de Reynolds para cada caso es calculado según la ecuación (5.1) considerando las propiedades de la película completamente líquida.

$$Re = \frac{\rho_l \omega_b r_b c}{\mu_l} \quad (5.1)$$

5.1. Validación del campo de presiones y de las regiones de cavitación

Con el fin de validar el campo de presiones y la extensión de las regiones de cavitación, se contrastan los resultados de los modelos numéricos propuestos con los datos experimentales clásicos de Jakobsson y Floberg [68]. Dichas mediciones corresponden a un cojinete sumergido cuyos

parámetros físicos y geométricos se detallan en la Tabla 5.1. La validación se centra en los perfiles de presión obtenidos a distancias axiales de $d_j = 0.1L$ y $d_j = 0.3L$ respecto al plano medio del cojinete, tal como se ilustra en la Figura 2.3b. Las soluciones numéricas mediante el modelo bifásico dynCav se obtuvieron empleando una malla estructurada de 256 elementos en dirección circunferencial y 64 en dirección axial. En esta configuración, el régimen de flujo es laminar, con un número de Reynolds de $Re = 23$.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
ρ_l	840	kg/m ³	p_{ref}	100	kPa
μ_l	12.7×10^{-3}	Pa.s	α_0	1.0	-
ρ_g	1	kg/m ³	L	133	mm
μ_g	1.81×10^{-5}	Pa.s	r_b	50	mm
R_o	1	μm	c	0.146	mm
ε	0.6	-	p_v	20	kPa
ω_b	48.1	rad/s	p_{sat}	90	kPa

Tabla 5.1: Condiciones de funcionamiento utilizadas por Jakobsson [67].

En la Figura 5.1 se presenta el perfil de presiones bajo condiciones de cavitación vaporosa. Este caso es ampliamente reconocido en la literatura [15, 67] y se utiliza como referencia fundamental para validar el modelo de cavitación vaporosa. El algoritmo propuesto, basado en el modelo de Schnerr-Sauer, captura con precisión los puntos de entrada y salida de la región cavitada. El caso de estudio simula un cojinete sumergido en un depósito de aceite sin línea de suministro externa, donde una bomba de vacío mantiene un entorno de muy baja presión (20 kPa). Es importante destacar que las referencias citadas no proporcionan resultados experimentales ni numéricos sobre el perfil de fracción de líquido para este caso específico.

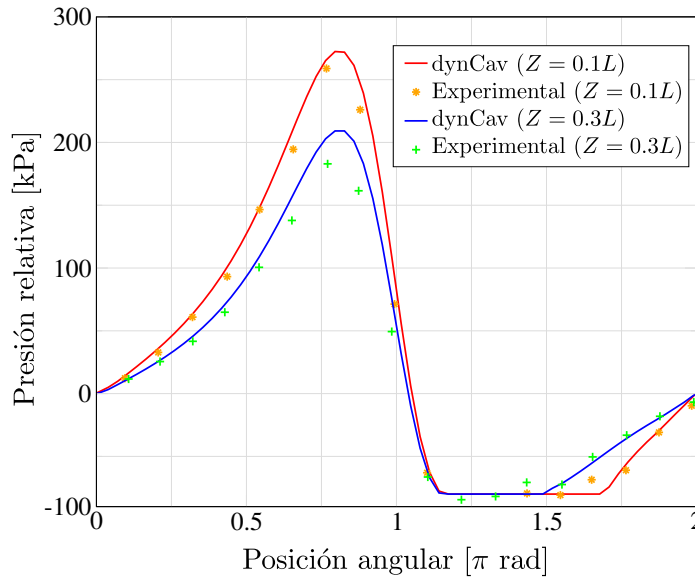


Figura 5.1: Perfil de presiones considerando cavitación vaporosa ($p_{ref} = 100$ kPa).

En contraste, la Figura 5.2 muestra el perfil de presiones obtenido mediante el modelo de cavitación gaseosa de Zhou [100]. En este caso, la presión mínima corresponde al valor de equilibrio alcanzado cuando el aire disuelto se difunde desde el lubricante para formar burbujas. Este resultado numérico concuerda con la “presión de expulsión de aire” (90 kPa) reportada por Jakobsson [68]. Se observa que una presión de saturación significativamente superior a la presión de vapor ejerce un impacto notable en el perfil de presiones resultante. Este comportamiento es físicamente consistente con la dinámica de los flujos de entrada y salida del dominio: al no existir una línea de suministro externa, la recuperación de la película lubricante depende del flujo que ingresa desde el depósito en las zonas donde la presión interna es inferior a la de referencia. En consecuencia, cuando la diferencia entre la presión externa e interna es menor, como ocurre en la cavitación gaseosa, se requiere una mayor distancia circunferencial para la recuperación de la película líquida [131]. Por lo tanto, en los casos que no existe un suministro directo y la alimentación es por los laterales, la extensión de la zona de cavitación está gobernada por el balance de masa, expandiéndose a medida que aumenta el caudal expulsado por el campo de presiones con valores superiores a la presión externa.

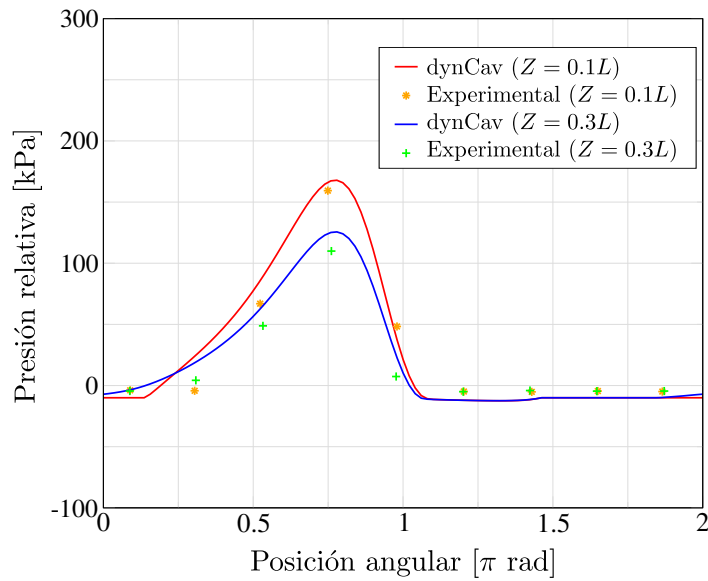


Figura 5.2: Perfil de presiones considerando cavitación gaseosa ($p_{ref} = 100$ kPa).

En cuanto al análisis de la pseudo-cavitación, este fenómeno se modela mediante la Ec. (2.128), empleando los parámetros físicos y geométricos detallados en la Tabla 5.2. Se asume una presencia inicial de gas en forma de burbujas del 5 % ($\alpha_{l,0} = 0,95$). Tanto el perfil de presiones como la fracción de líquido se evalúan en el plano medio del cojinete ($d_j = 0$). Los resultados derivados del modelo dynCav se obtuvieron utilizando una malla de 256 elementos en dirección circunferencial y 64 en dirección axial. Dentro del huelgo del cojinete, el flujo se mantiene en régimen laminar con un número de Reynolds de $Re = 40$. Los resultados obtenidos para los diferentes valores de

k_s presentan una buena concordancia con los reportados por Jaramillo et al. [69]. Cabe destacar que, tal como indica dicho autor, para lograr esta correspondencia es necesario aplicar una diferencia de tres órdenes de magnitud respecto al parámetro k_s utilizado originalmente por Snyder [7]. El estudio paramétrico se llevó a cabo empleando valores de k_s de $7,85 \times 10^{-4}$, $7,85 \times 10^{-5}$ y $7,85 \times 10^{-6}$.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
ρ_l	854	kg/m ³	p_g	1	kPa
μ_l	7.1×10^{-3}	Pa s	R_o	0.385	μm
ρ_g	1	kg/m ³	$\alpha_{l,0}$	0.95	
μ_g	1.81×10^{-5}	Pa s	L	25.4	mm
κ_s	$\approx 10^{-4} - 10^{-6}$	N s/m	r_b	25.4	mm
σ	0.035	N/m	c	25.4	μm
k	1		ε	0.4	m
p_{ref}	100	kPa	ω_b	523.60	rad/s

Tabla 5.2: Condiciones de funcionamiento utilizadas por Snyder y Jaramillo [7, 69].

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestra el impacto de este parámetro sobre el perfil de presiones y la morfología de la región de cavitación. En concordancia con lo observado en los casos previos, una presión de saturación elevada restringe la capacidad de recuperación de la película líquida, lo que altera significativamente la distribución de presiones en la zona convergente del dominio.

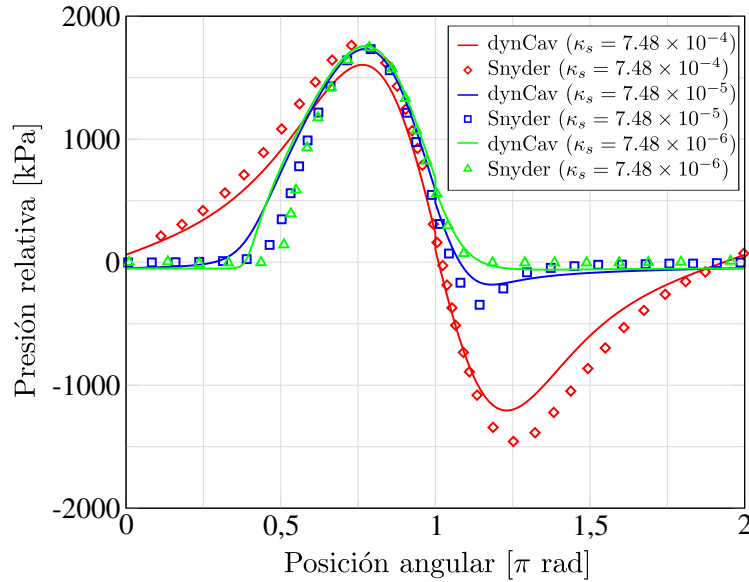


Figura 5.3: Perfil de presiones obtenido a partir del modelo de pseudo-cavitación.

Mientras que Snyder vincula este comportamiento con la advección de la zona cavitada hacia la sección convergente debido al incremento en la velocidad de operación, el análisis realizado en este trabajo sugiere una causa física adicional: para una configuración dada y una excentricidad constante, una mayor velocidad de rotación intensifica el flujo hacia el exterior del dominio producto de un campo de presiones más intenso. Este fenómeno demanda, en consecuencia, una zona

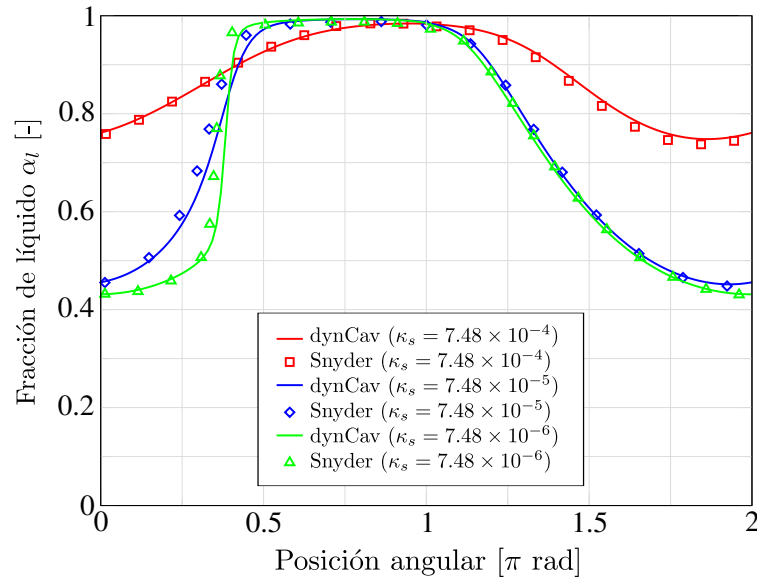


Figura 5.4: Distribución de α_l obtenido a partir del modelo de pseudo-cavitación.

de cavitación más extensa para permitir la adecuada recuperación de la película lubricante.

Por otra parte, tal como analizan Snyder y Jaramillo, una mayor viscosidad dilatacional superficial otorga a las burbujas de aire una mayor resistencia frente a las tensiones de tracción provocadas por las presiones inferiores a la de referencia. De este modo, para el valor más elevado de k_s , el perfil obtenido se asemeja a una condición Full-Sommerfeld o Full-Ocavirk, en la cual las presiones en la región divergente alcanzan magnitudes similares a las de la zona de presiones positivas. Como es sabido, un perfil de presiones antisimétrico de este tipo induce inestabilidad en la dinámica del muñón. Por lo tanto, se puede inferir que un fluido con una mayor k_s tiende a generar un comportamiento inestable en el sistema, al dificultar la ruptura de la película y aproximar la respuesta del cojinete a la solución analítica clásica sin cavitación.

Si bien el análisis de sensibilidad respecto al parámetro k_s exhibe la tendencia física esperada, los resultados obtenidos con el modelo $p - \alpha$ implementado presentan ciertas divergencias en relación con la ubicación de los puntos de inicio y fin de la región de cavitación, así como en los valores de presión mínima alcanzados. Estas diferencias en el perfil de presiones pueden atribuirse a las distintas formulaciones empleadas: el modelo $p - R$ utilizado por Snyder y Jaramillo frente al modelo $p - \alpha$ propuesto en este desarrollo. En el primer caso, se parte de la ecuación de Reynolds y se desarrolla algebraicamente el término de variación temporal de la densidad para obtener una expresión que contemple el cambio en el tamaño de las burbujas. En contrapartida, en el modelo $p - \alpha$, este fenómeno se integra de manera directa al considerar el término de cambio de fase dentro de la ecuación de transporte de cada una de las especies presentes.

5.1.1. Caracterización de la región cavitada

La validación de las regiones de cavitación se realiza mediante el uso de los datos experimentales publicados por Etsion [132]. En dicho trabajo, el cojinete ensayado posee un radio r_b de 25.4 mm, una longitud L de 38.1 mm y un huelgo c de 114 μm . La velocidad de rotación es de 1840 RPM, se utiliza un lubricante con viscosidad $\mu_l = 0,026 \text{ Pa s}$ y la excentricidad relativa ε es de 0.4, por lo que resulta un número de Reynolds $\text{Re} = 18$. Para este análisis, se consideran dos valores de presión ambiente: 113.6 kPa y 140.8 kPa. Debido a que el trabajo original reporta exclusivamente la presencia de aire en la zona de cavitación y presiones superiores a la de vaporización, se optó por emplear un modelo de cavitación gaseosa con parámetros de cavitación idénticos a los experimentales. Las regiones de cavitación obtenidas numéricamente se presentan en la Figura 5.5a, mientras que la Figura 5.5b muestra los registros fotográficos correspondientes a los ensayos a 1840 RPM.

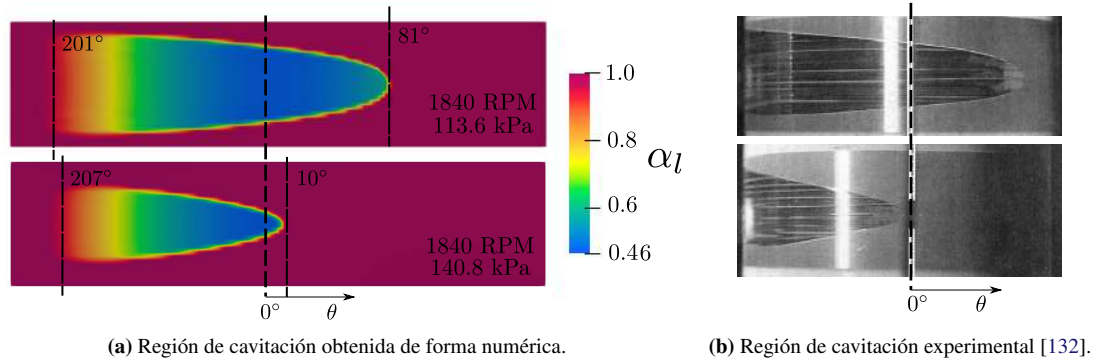


Figura 5.5: Comparación de las regiones de cavitación numérica y experimental.

La Tabla 5.3 resume las posiciones angulares de inicio (θ_i) y fin (θ_f) de la zona cavitada reportadas por Etsion [132], contrastándolas con los valores obtenidos mediante el modelo propuesto en este trabajo, identificados con el superíndice θ^* . Es relevante observar que, aunque en la fotografía del cojinete con presión de referencia de 140.8 kPa la región de cavitación no parece superar la línea de referencia, los valores tabulados por Etsion indican un ángulo final de 5°, una discrepancia sutil que el modelo numérico permite analizar con mayor detalle.

p_{ref} [kPa]	Etsion (θ_i [°])	Etsion (θ_f [°])	θ_i^* [°]	θ_f^* [°]
113.6	200	75	201	81
140.8	210	15	207	10

Tabla 5.3: Ángulos de entrada y salida de la región de cavitación comparados con los resultados publicados por Etsion et al. [132]

Se puede observar que las regiones de cavitación se encuentran adecuadamente representadas por el modelo de cavitación gaseosa. Tal como se indicó previamente, la extensión de estas zonas depende fundamentalmente de la presión de saturación. Esta dependencia fue verificada mediante

el modelo de cavitación vaporosa (Schnerr-Sauer), ajustando una presión de vapor próxima a la atmosférica (90 kPa), lo que permitió obtener resultados análogos a los del modelo difusivo. No obstante, si bien los resultados respecto a la geometría de la región de cavitación son similares, los tiempos característicos de ambos fenómenos físicos difieren significativamente. En consecuencia, emplear un modelo de cavitación vaporosa con una presión de saturación correspondiente a la cavitación gaseosa no describe de manera fiel la evolución temporal del problema. Este factor resulta crítico y decisivo en el análisis dinámico de un cojinete hidrodinámico.

5.1.2. Convergencia del método propuesto

El análisis de convergencia del algoritmo desarrollado se llevó a cabo utilizando un cojinete con parámetros operativos constantes (velocidad angular, geometría y propiedades del lubricante), detallados en la Tabla 5.2. Para este estudio, se empleó el modelo de pseudo-cavitación con una fracción de líquido inicial $\alpha_{l,0} = 0.95$ y una viscosidad dilatacional superficial $\kappa_s = 7.85 \times 10^{-6}$. Con el fin de evaluar la dependencia de la solución respecto a la discretización espacio-temporal, se aplicó un esquema de refinamiento bajo una condición CFL constante (Ec. (5.2)), determinando el error de los refinamientos sucesivos mediante una solución de referencia f_{ref} , tal como se indica en la Ec. (5.3). El tamaño de los elementos de la malla se calculó como $\Delta x = 2\pi r_b / M_x$ en dirección circunferencial y $\Delta y = b / M_y$ en dirección axial, mientras que el paso de tiempo se definió como $\Delta t = 1 \times 10^{-5} / N_t$. La solución de referencia se obtuvo empleando una configuración de malla fina con $M_x = 320$, $M_y = 160$ y $N_t = 16$. Por otro lado, la secuencia de mallas utilizada para determinar la convergencia se definió con valores de $M_x = \{20, 40, 80\}$ y $M_y = \{10, 20, 40\}$ [69]. En cada uno de estos casos, se ajustó el número de pasos de tiempo a $N_t = \{1, 2, 4\}$, respectivamente, para preservar el valor del parámetro CFL durante el proceso de refinamiento. El tiempo final de simulación para todos los casos fue de $t_f = 1 \times 10^{-2}$.

$$CFL = \frac{\omega_b r_b \Delta t}{\Delta x} \quad (5.2)$$

$$Er(f)_{CFL} = \frac{\|f_t - f_{ref}\|}{M_x M_y} \quad (5.3)$$

En la Figura 5.6 se ilustra la convergencia del error obtenida para las soluciones numéricas utilizando las mallas y pasos de tiempo previamente discutidos, junto con las pendientes de referencia para convergencia lineal y cuadrática representadas en líneas de trazos. Se verifica una convergencia de segundo orden, tanto en el espacio como en el tiempo, para el campo de presión, la fracción de líquido presente y la excentricidad. Resulta relevante destacar que este constituye

el primer caso de estudio reportado en el análisis de cojinetes hidrodinámicos en el que se demuestra una convergencia de segundo orden. Como se detalló con anterioridad, para alcanzar esta convergencia cuadrática, fue imperativo actualizar el campo de presiones antes de cada etapa del esquema de partición (splitting).

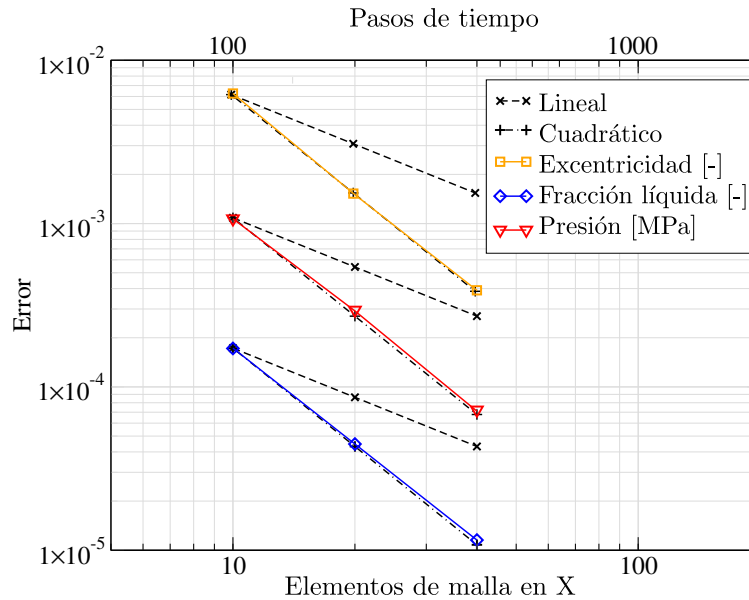


Figura 5.6: Convergencia del error en condiciones de CFL constante.

Para completar el análisis, se realizó una simulación dinámica del caso estudiado aplicando una carga externa de $W = 500$ N, iniciando el movimiento desde el centro del cojinete hasta alcanzar la posición final en t_f . La convergencia de la trayectoria se evaluó mediante la evolución temporal de la excentricidad del eje. Tal como se observa en la Figura 5.6, se logra también una convergencia de segundo orden bajo la misma configuración numérica empleada en el caso base.

5.1.3. Mediciones propias en el banco de pruebas

Para contar con información propia con la que contrastar los valores obtenidos por simulación, se realizaron mediciones experimentales en el banco de pruebas de cojinetes hidrodinámicos que dispone el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Este dispositivo fue diseñado y construido en el marco de la tesis doctoral del Dr. Ing. Gustavo Vignolo [23]. El banco cuenta con un motor eléctrico que impulsa un rotor, un sistema de almacenamiento y suministro de lubricante, un rodamiento para aplicar la carga en la mitad del rotor y un cojinete instrumentado, como puede apreciarse en el esquema de Figura 5.7a.

Las variables que pueden medirse simultáneamente en cada ensayo son: presión en varias posiciones de la película fluida, temperatura de suministro de lubricante, temperatura en varios puntos de la superficie del cojinete, velocidad de rotación del eje y capacidad portante. Las variables de

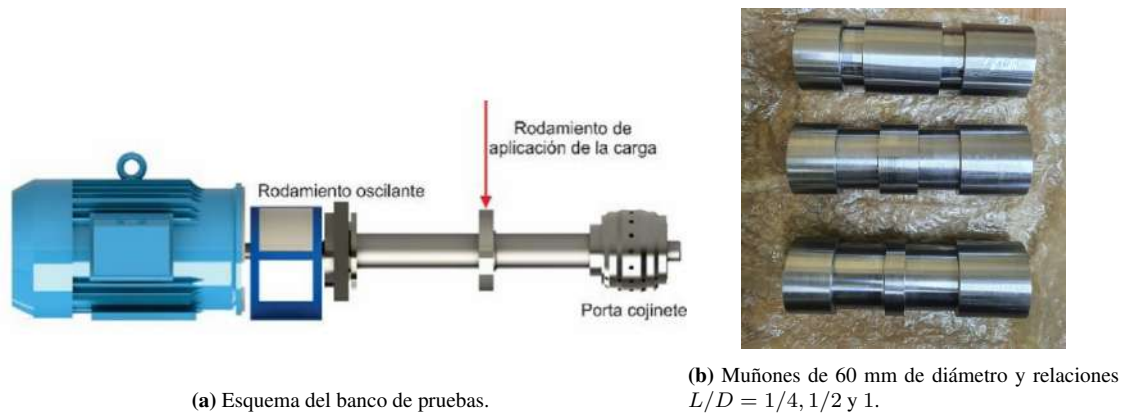
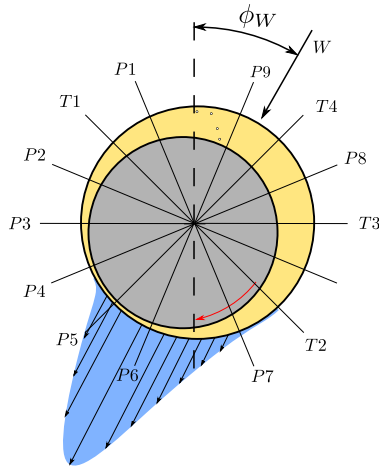


Figura 5.7: Componentes del banco de pruebas.

control del sistema son la velocidad de rotación, las dimensiones del cojinete, el tipo de lubricante y la carga aplicada. La presión se determina en nueve puntos de la película fluida distribuidas en la circunferencia en el plano medio del cojinete. La capacidad portante se determina mediante tres celdas de carga: dos verticales y una horizontal. Durante la realización de la presente tesis doctoral, se realizó la colocación de nuevos sensores de vacío capaces de determinar la presión en las regiones de cavitación.

El eje, de 60 mm de diámetro y 464 mm de distancia entre apoyos, cuenta con un extremo montado sobre un rodamiento oscilante de bolas y el otro sobre el cojinete instrumentado (Fig. 5.7a). El motor que imprime el movimiento al eje es asíncrono de 5 HP, alimentado a través de un variador de frecuencia (rango de velocidades: 500 a 5000 rpm). La unión entre motor y eje se realiza mediante un acoplamiento elástico. Los cojinetes que pueden ensayarse son de 50, 55 y 60 mm de diámetro, cada uno con relaciones L/D : $1/4$, $1/2$, y 1 (Fig. 5.7b). Los cojinetes se montan en una carcasa adecuada la cual los sujeta y, a su vez permite el anclaje de los diversos instrumentos de medición. La Fig. 5.8a esquematiza la posición de los sensores de presión $P1$ a $P7$, siendo $P8$ y $P9$ los únicos sensores de vacío. La medición de temperatura se realiza mediante el uso de termocuplas ubicadas en las posiciones $T1$ a $T4$. La separación entre sensores es de 22.5° . La Fig. 5.8b muestra la vista de frente del banco con los sensores de presión y de temperatura colocados en las posiciones mencionadas.

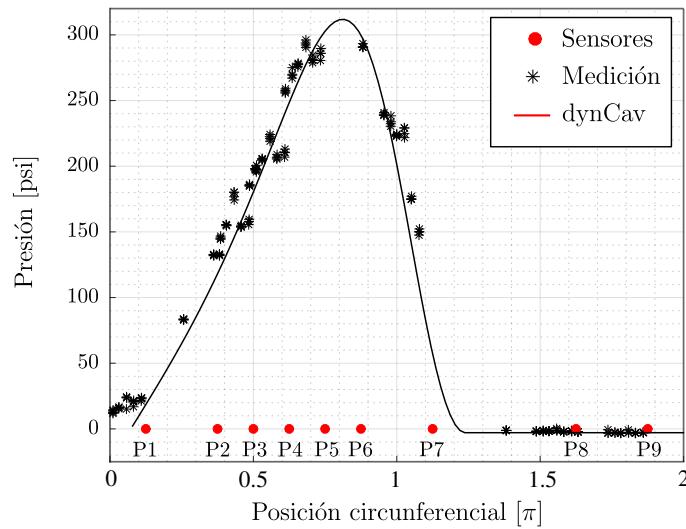
La Fig. 5.9 muestra los resultados experimentales obtenidos en el banco de pruebas en comparación con el perfil de presiones predicho por el código dynCav utilizando la condición de cavitación gaseosa (70 kPa). El cojinete estudiado tiene 60 mm de diámetro, una relación $L/D = 1$ y la velocidad de operación es de 600 RPM. La viscosidad del fluido se considera 0.0827 Pa·s y la carga externa que actúa sobre el cojinete es de 500 N. En la Fig. 5.9 también se muestra la ubicación de los sensores de presión. Para obtener puntos intermedios del perfil, se modificó el ángulo de aplicación de la carga ϕ_W en fracciones de 2.5° . Dado que el perfil de presiones mantiene su



(a) Esquema de la ubicación de los sensores.



(b) Foto de frente del banco de pruebas.

Figura 5.8: Ubicación de los sensores del banco de pruebas.**Figura 5.9:** Perfil de presiones obtenido en el plano medio del cojinete.

forma respecto a la posición del huelgo mínimo (y por lo tanto, al ángulo de la carga aplicada), esta técnica permite mejorar los resultados obtenidos.

Otras configuraciones geométricas fueron ensayadas lográndose grados de acuerdo similares entre los valores experimentales y los numéricos. Para el cojinetes de $L/D = 0.25$ se verificó que los valores experimentales ajusten correctamente con los valores esperados por la ecuación de Ocvirk (Eq. (2.80)).

5.1.4. Simulación con fluidos no-newtonianos

El modelo no-Newtoniano propuesto en la Ec. (2.209) se realiza utilizando los resultados numéricos publicados por Jang et al. [133] para un cojinete que utiliza fluidos que cumplen con la ley de potencia de viscosidades y poseen diferentes valores de n . El algoritmo modificado para la consideración del parámetro n es denominado, dynCavNN. La geometría utilizada se describe

en la Tabla 5.4. En esta instancia, el análisis se realiza de forma isotérmica, utilizando una malla de 256 elementos en la dirección circunferencial y 64 en la axial. En el trabajo de referencia, el fenómeno de cavitación es considerado a través de la condición de Reynolds (Swift-Stieber).

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	50	mm	p_{ref}	100	kPa
c	100	μm	p_{sat}	70	kPa
L	100	mm	ε	0.6	–
ω_b	104.71	s^{-1}	n	0.9 – 1.1	–
μ_0	0.0416	$\text{Pa}\cdot\text{s}$	ρ_l	881.6	kg/m^3

Tabla 5.4: Condiciones de funcionamiento y parámetros físicos utilizados por Jang et al. [133].

En la Figura 5.10a se observan los resultados de utilizar un recorte del campo de presiones bajo la condición de Gumbel. Puede apreciarse una notable diferencia entre ambos perfiles de presiones obtenidos, siendo la principal diferencia el punto de entrada en cavitación. Caracterizar de forma apropiada la cavitación resulta fundamental para poder determinar correctamente la capacidad portante del cojinete, principalmente en situaciones donde existen variaciones bruscas en la geometría del cojinete. Por otro lado, la Figura 5.10b muestra un excelente acuerdo entre los resultados de referencia y los determinados a través del método numérico propuesto en este trabajo.

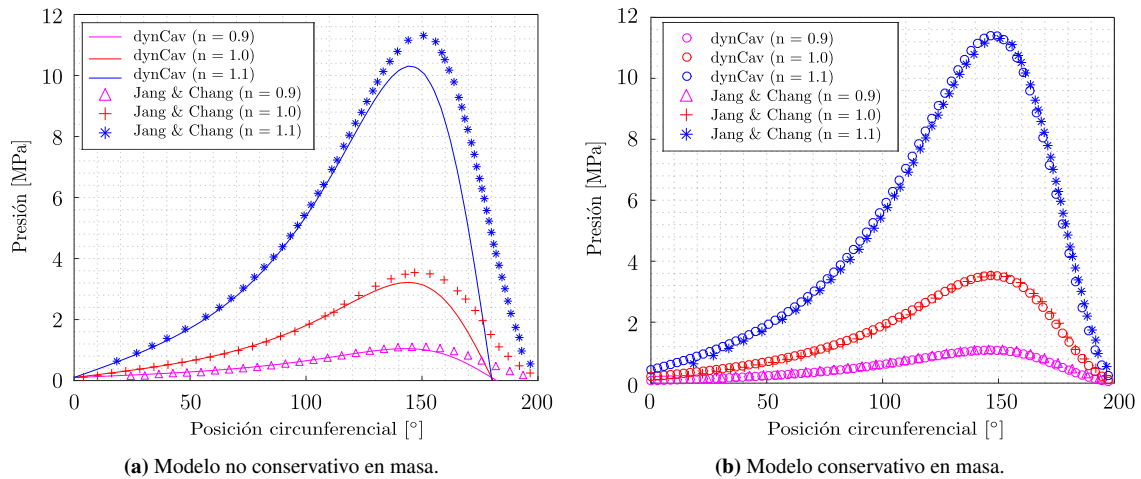


Figura 5.10: Perfil de presiones en el plano medio del cojinete.

De esta forma, se valida el modelo planteado en la Ecuación (2.209) para su implementación en el cálculo de cojinetes hidrodinámicos con fluidos no-newtonianos que sean compatibles con la ley de potencia en su viscosidad. Esto resulta importante para el grupo de trabajo, dado que una de las líneas de investigación que actualmente se viene desarrollando involucra la utilización del polímero poliacrilamida parcialmente hidrolizada (PHPA) en aplicaciones industriales. Mediante el uso de este polímero en el banco de pruebas (Fig. 5.7) se espera en un futuro contrastar los

valores numéricos con datos experimentales propios y analizar comportamientos más complejos para este tipo de polímero en particular.

5.2. Cojinetes con superficies texturadas

En primera instancia, se valida el campo de presiones para cojinetes texturados mediante la comparación con soluciones de las ecuaciones completas de Navier-Stokes isotérmicas, empleando la geometría propuesta por Manser et al. [74]. Posteriormente, se procede a la validación del modelo de fricción y temperatura contrastando los resultados obtenidos en cojinetes lisos y texturados con los datos experimentales reportados por Profito et al. [73]. Finalmente, se presenta un estudio de caso de un cojinete con texturizado en el alojamiento para evaluar la influencia de las consideraciones térmicas e isotérmicas sobre la capacidad portante (LCC), el torque de fricción y el caudal de fuga.

5.2.1. Validación del campo de presiones ante la presencia de texturas.

Con el objetivo de resaltar las variaciones en los campos de presión ante la presencia de texturas superficiales, se contrastan los resultados numéricos del modelo propuesto con simulaciones completas de Navier-Stokes, empleando para ello la geometría definida por Manser et al. [74]. Se analiza la influencia de dos tipologías de texturas dispuestas sobre la superficie del alojamiento: cuadradas (SQ - Fig. 2.17a) y cilíndricas (CY - Fig. 2.17b). Los parámetros geométricos y operativos correspondientes se detallan en la Tabla 5.5. Dado que en el estudio numérico de Manser no se consideran los efectos térmicos, el presente análisis se realiza de manera isotérmica. Para este caso de estudio, se empleó una malla de 256 elementos en dirección circunferencial y 64 en la axial.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	20	mm	C_p	2000	J/kg/K
c	50	μm	p_{ref}	100	kPa
L	40	mm	C_c	1	-
ω_b	314.15	rad/s	C_v	1	-
ε	0.6	-	r_t	6	mm
μ_l	0.05	Pa s	N_y	5	-
h_t	25	μm	N_θ	16	-
n_b	1×10^8	-	p_{sat}	100	kPa

Tabla 5.5: Condiciones de funcionamiento utilizadas por Manser et al. [74].

Posteriormente, se realiza una comparación entre el perfil obtenido mediante el modelo propuesto y los resultados generados con el software de código abierto OpenFOAM®, el cual resuelve las ecuaciones completas de Navier-Stokes. Las simulaciones en OpenFOAM® se ejecutaron

empleando el solver `interPhaseChangeFoam`, diseñado específicamente para sistemas bifásicos en los que el cambio de fase es impulsado por gradientes de presión locales. Este solver captura fenómenos de cavitación mediante el modelado de las tasas de evaporación y condensación, consolidándose como una herramienta robusta para aplicaciones hidrodinámicas complejas al considerar dominios tridimensionales y régimen de flujo laminar con un fluido newtoniano [25, 67]. Los dominios de fluido correspondientes a los casos texturados se observan en las Figs. 5.11a y 5.11b.

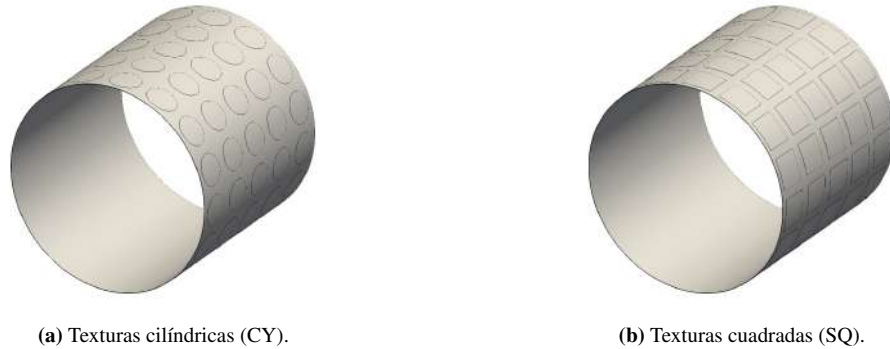


Figura 5.11: Dominio fluido utilizado en OpenFOAM® con el solver `interPhaseChangeFoam`.

Los resultados expuestos en las Figuras 5.12 y 5.13 exhiben marcadas oscilaciones de presión derivadas de las variaciones abruptas de profundidad introducidas por las texturas, comportamiento que ha sido reportado por diversos autores [11, 75–77]. El perfil de presiones derivado del modelo tridimensional (Full CFD) presenta una excelente concordancia con el modelo basado en Reynolds (`dynCav`/`dynCavFlow`), validando así la aplicabilidad de las hipótesis de la teoría de lubricación en cojinetes texturados.

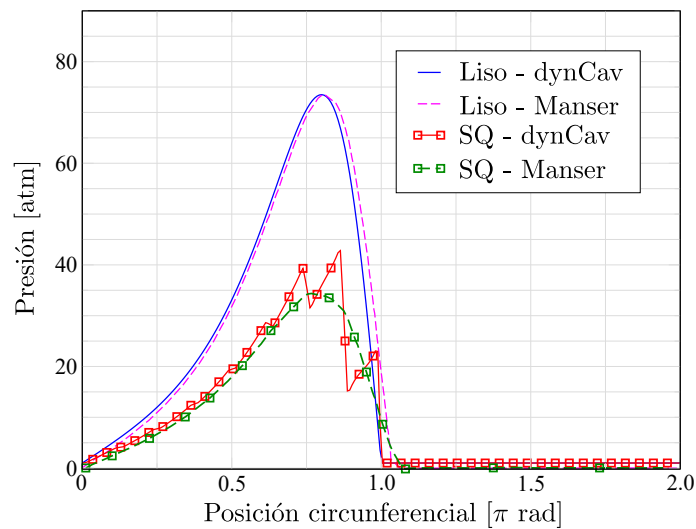


Figura 5.12: Comparación entre el perfil obtenido mediante `dynCav` / `dynCavFlow` y el reportado en la literatura para cojinetes lisos y con texturas SQ.

Complementariamente, se llevó a cabo un estudio de independencia de malla para garantizar

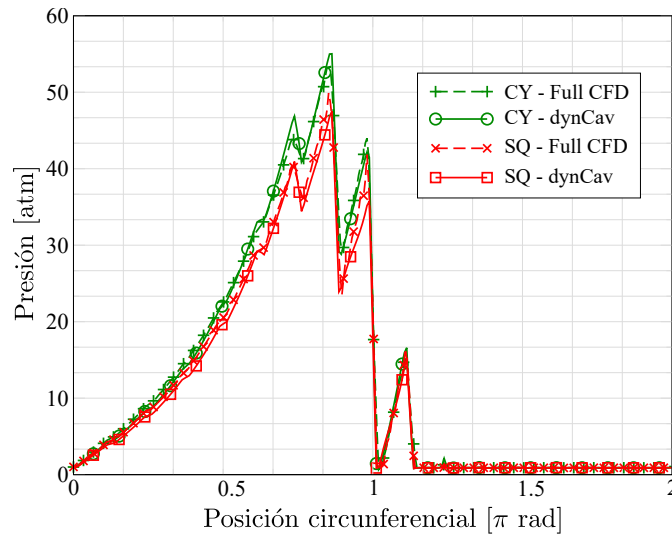


Figura 5.13: Perfil de presiones obtenido utilizando los modelos Full CFD y dynCav/dynCavFlow para cojinetes con texturas SQ y CY.

que el valor de presión máxima no se viera condicionado por el tamaño de los elementos. A partir de la Fig. 5.13, se observa que la textura cuadrada (SQ) induce un efecto menor sobre los valores de presión en comparación con la textura cilíndrica (CY). Esta diferencia podría atribuirse a un ligero efecto de bombeo generado por la geometría cilíndrica, fenómeno que no se manifiesta en la configuración cuadrada.

5.2.2. Validación del cálculo de la fricción y del modelo térmico

Para la validación de los resultados numéricos del coeficiente de fricción, se emplean los datos experimentales obtenidos en cojinetes lisos y texturados presentados por Profito et al. [73]. Los parámetros geométricos y las propiedades del lubricante utilizados se detallan en la Tabla 5.6. En este caso, las texturas analizadas consisten en cavidades de tipo casquetes (SP) con un tamaño r_t de $70\ \mu\text{m}$ y una profundidad h_t de $20\ \mu\text{m}$ (Fig. 2.17d), dispuestas a lo largo de todo el ancho L del cojinete en los intervalos angulares de $90^\circ < \phi < 135^\circ$ y $225^\circ < \phi < 270^\circ$, tal como se ilustra en la Fig. 5.14a. Esta configuración resulta en un total de 26500 texturas, lo que plantea un desafío numérico considerable debido al elevado nivel de refinamiento de malla requerido para cubrir un dominio de estas proporciones de manera precisa.

Para abordar este requerimiento, se utilizó el código dynCavFlow dentro del entorno OpenFOAM®. La malla fue refinada localmente en las regiones texturadas, alcanzando un total de aproximadamente 6 millones de celdas para garantizar que la geometría de cada cavidad fuera capturada con alta fidelidad. En la Fig. 5.14b se observan las texturas sobre la superficie del casquillo del cojinete experimental [73, 134], mientras que la Fig. 5.14c ilustra las texturas dentro del dominio numérico junto con el detalle de la malla empleada. Se consideró un orificio de su-

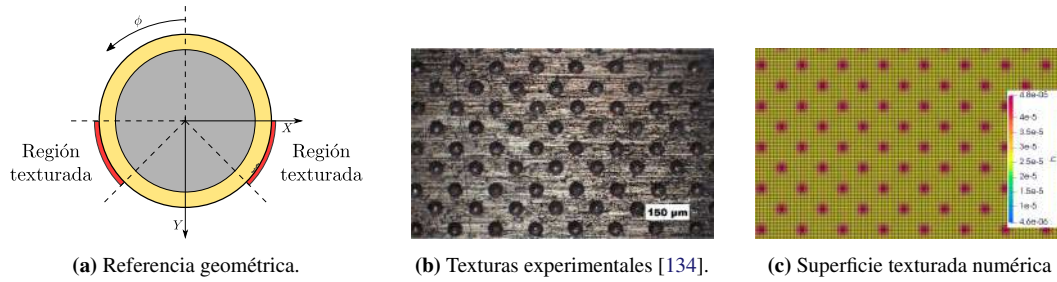


Figura 5.14: Representación experimental y numérica del cojinete hidrodinámico texturado.

ministro circular ubicado en $\phi = 0$ con un diámetro de 5 mm. El análisis térmico global se llevó a cabo para un rango de velocidades de 750 a 3500 RPM, bajo una carga externa de 3 kN. En la Figura 5.15, se contrastan los valores experimentales del coeficiente de fricción (COF) publicados por Profito et al. [73] con los resultados obtenidos mediante el código dynCavFlow.

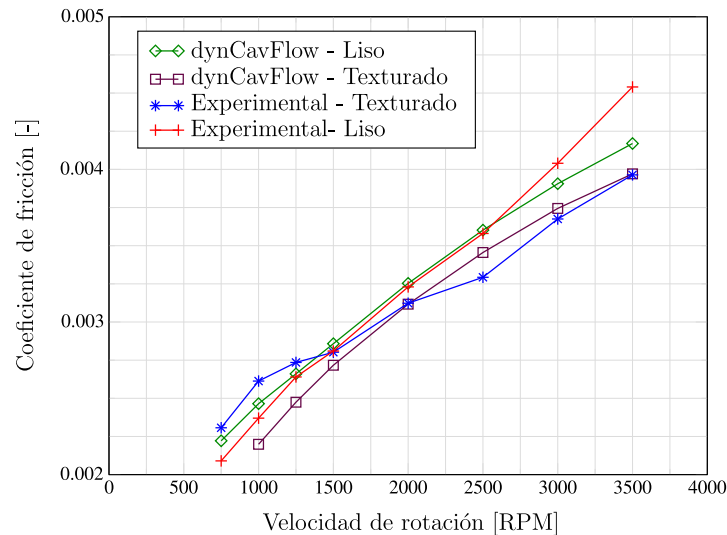


Figura 5.15: Coeficiente de Fricción experimental y numérico para una carga externa de 3 kN [73] para cojinetes lisos y texturas SP.

Los resultados obtenidos para los cojinetes lisos presentan una buena concordancia en todo el rango de velocidades angulares analizado, desde 1500 hasta 2500 RPM. En el caso de las superficies texturadas, los valores numéricos y experimentales resultan comparables para velocidades iguales o superiores a 2000 RPM. Las discrepancias observadas a regímenes de giro más elevados pueden atribuirse a las limitaciones del modelo térmico implementado, el cual únicamente contempla la disipación media global debida a la renovación del lubricante. Bajo condiciones de alta temperatura, la distribución térmica local en la película fluida y la transferencia de calor hacia el alojamiento y el entorno (mediante mecanismos de radiación y convección) adquieren mayor relevancia, lo que conduce a valores de temperatura reales inferiores a los obtenidos numéricamente.

Por otro lado, los casos texturados muestran una excelente correspondencia para velocidades

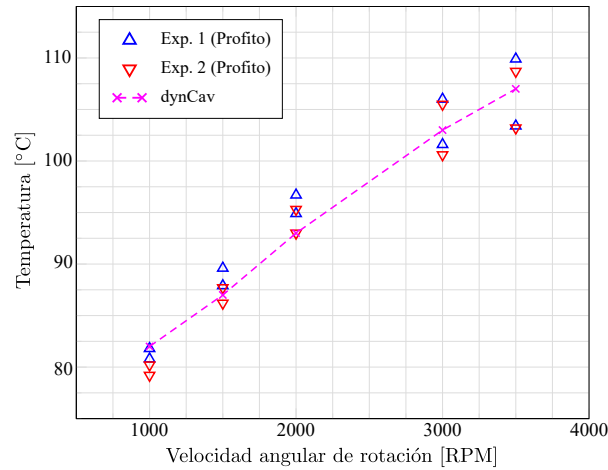


Figura 5.16: Comparación de la temperatura obtenida mediante los modelos numéricos (dynCav / dynCavFlow) y las mediciones experimentales reportadas por Profito et al. [73] para un cojinete liso ($T_s = 60^\circ\text{C}$).

superiores a los 1500 RPM. Por debajo de este umbral, la tendencia del coeficiente de fricción (COF) obtenido experimentalmente varía, llegando a superar los valores del caso liso. Esta divergencia en el comportamiento podría originarse en contactos parciales entre las superficies que ocurren ante condiciones de baja velocidad y altas cargas. Cabe destacar que estos efectos de contacto no han sido incorporados en el modelo numérico actual, el cual asume una separación completa de las superficies por la película fluida.

La validación del modelo térmico global se lleva a cabo empleando los resultados experimentales de Profito et al. [73] para la configuración geométrica detallada en la Tabla 5.6. Con el fin de replicar con exactitud las condiciones de la literatura de referencia, el análisis se realizó considerando superficies lisas y una temperatura de suministro (T_s) de 60°C .

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	29.496	mm	C_p	2040	J/kg/K
c	20	μm	T_s	100	$^\circ\text{C}$
L	17.8	mm	a_1	21.11	
p_{ref}	100	kPa	a_2	3.42	
p_{sat}	70	kPa	a_3	0.7	
h_t	20	μm	r_t	70	μm

Tabla 5.6: Condiciones de operación utilizadas por Profito et al. [73].

La Figura 5.16 presenta los resultados obtenidos con el modelo numérico en contraste con los datos experimentales. Cabe destacar que los registros de temperatura se tomaron para ambos sentidos de giro (horario y antihorario) en dos ubicaciones distintas, con el propósito de evaluar la repetibilidad de los ensayos. Durante todo el procedimiento, tanto la temperatura del lubricante en el ingreso como la carga externa aplicada se mantuvieron constantes en 60°C y 3 kN, respectivamente.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	20	mm	C_p	2000	J/kg/K
c	50	μm	p_{ref}	100	kPa
L	20	mm	β_0	0.13	K^{-1}
ω_b	Variable	s^{-1}	T_{ref}	40	K
ε	0.3 - 0.6		r_t	10	mm
$\mu_{l,ref}$	0.05	Pa s	N_y	1	
h_t	50	μm	N_θ	6	

Tabla 5.7: Condiciones operativas utilizadas para las Figs. 5.18 y 5.19.

5.2.3. Influencia de la temperatura en el análisis de cojinetes texturados

En esta sección, se evalúa la variación de la capacidad portante, la temperatura y el torque de fricción en función de la velocidad para un cojinete cuyos parámetros se detallan en la Tabla 5.7. Para este análisis, se considera un alojamiento configurado con seis texturas triangulares (Fig. 2.17c) distribuidas en sentido circunferencial y una en sentido axial (ver Fig. 5.17). El modelo numérico, desarrollado mediante el código *dynCav*, incorpora el orificio de suministro de lubricante y emplea una discretización de 256 elementos circunferenciales por 64 axiales. La elección de estas texturas se fundamenta en que la geometría triangular induce un efecto de bombeo del lubricante hacia el centro del dominio; este fenómeno incrementa la presión local y, en consecuencia, potencia la capacidad portante del cojinete [33, 78].

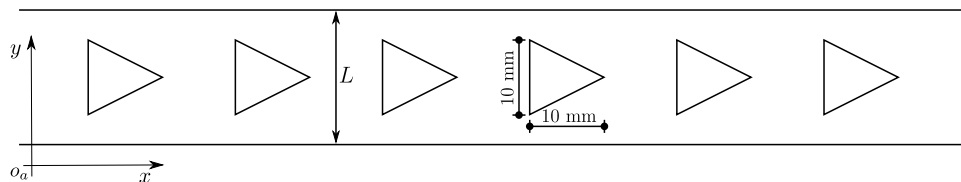


Figura 5.17: Representación de la geometría utilizada para los resultados presentados en las Figs. 5.18 y 5.19.

Los resultados correspondientes a una excentricidad relativa de 0.3 se presentan en la Fig. 5.18. Las temperaturas alcanzadas en el rango evaluado resultan ligeramente inferiores para el caso texturado en comparación con el cojinete liso, con una diferencia menor a 1 °C. En lo que respecta a la capacidad portante generada por la película hidrodinámica, se observa una mejora sustancial al emplear superficies texturadas. Cuando se considera el modelo isotérmico, la superficie con texturas logra un incremento máximo del 22 % en la capacidad de carga a lo largo de todo el rango analizado.

Por otro lado, al incluir el efecto de la temperatura, si bien ambas superficies muestran una disminución significativa en su capacidad portante, las texturas continúan proporcionando beneficios de entre el 26 % y el 29 % en el rango evaluado. Este incremento puede vincularse al efecto de bombeo reportado en la literatura para geometrías que dirigen el flujo hacia el centro del do-

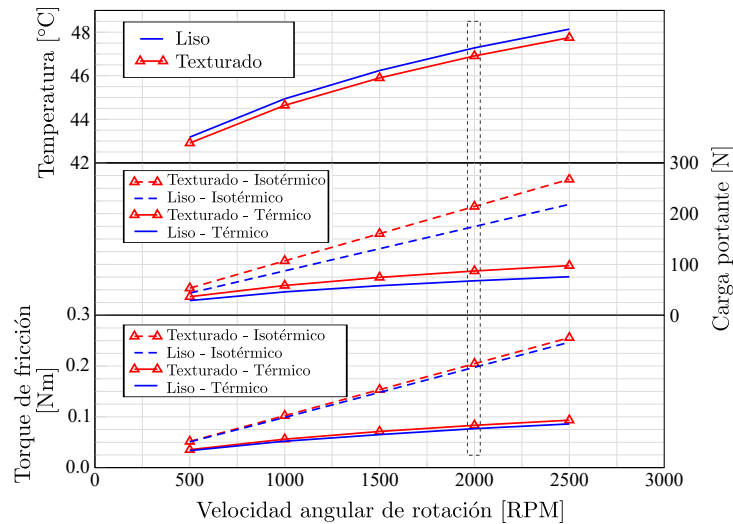


Figura 5.18: Temperatura, carga portante y torque de fricción para una excentricidad relativa $\varepsilon = 0.3$. La región delimitada por líneas de trazos corresponde a los puntos analizados en las Figuras 5.20 y 5.21 para este mismo valor de excentricidad.

minio, generando un pico de presión que eleva la capacidad de carga [33]. Cabe destacar que, aún cuando se presentan pequeñas diferencias en la temperatura de la película fluida, el impacto sobre la capacidad portante es notable, lo que subraya la relevancia de los efectos térmicos en el análisis de cojinetes. Finalmente, el torque de fricción es superior en ambos casos donde se consideran superficies texturadas, exhibiendo la misma tendencia observada en la capacidad portante.

En la Fig. 5.19, donde se considera una excentricidad relativa de 0.6, se observa una contribución menor de las texturas en el caso isotérmico, alcanzando solo un incremento del 2 % en la capacidad portante a lo largo de todo el rango evaluado. Al igual que en el caso con $\varepsilon = 0.3$, el torque de fricción es ligeramente superior en ambos casos cuando se emplean superficies texturadas. Sin embargo, al considerar los efectos térmicos, la temperatura alcanzada en el caso texturado es mayor que en el cojinete liso. Esto deriva en una disminución de la capacidad portante (de entre el -2 % y el -3 % en el rango evaluado). Esta discrepancia, en comparación con el caso de $\varepsilon = 0.3$, se relaciona con la dinámica del flujo de suministro y el caudal de fuga lateral, los cuales actúan como mecanismos de refrigeración del cojinete. Dicho flujo de fuga es más significativo a excentricidades bajas y en los casos de superficies lisas. Por otro lado, el efecto de bombeo de las texturas se vuelve más pronunciado a excentricidades menores, ya que en esas condiciones su influencia sobre el campo de presiones es más determinante que los cambios geométricos inherentes al huelgo del cojinete.

Con el fin de evidenciar la dependencia de los resultados obtenidos en función de la excentricidad relativa, se realizó un barrido entre 0.3 y 0.8 con incrementos de 0.1 a una velocidad de rotación constante de 2000 RPM, tal como se ilustra en la Fig. 5.20. Se observa que la configuración geométrica seleccionada ofrece un mejor desempeño a excentricidades bajas ($\varepsilon \leq 0.4$). En

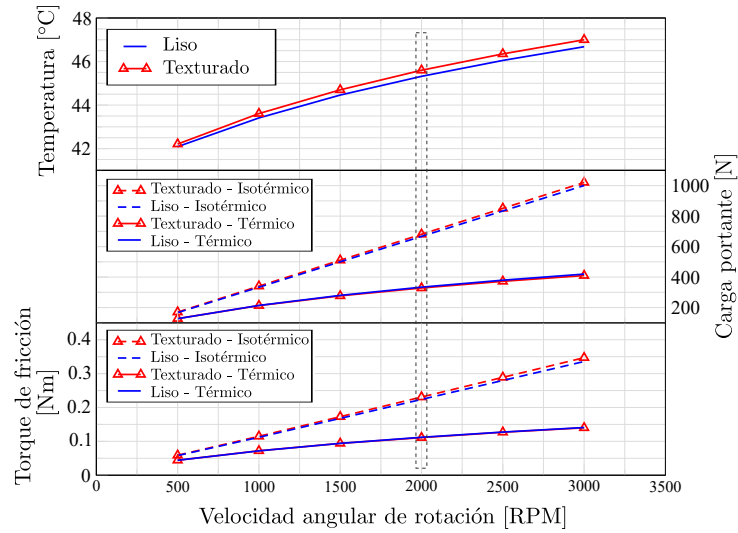


Figura 5.19: Temperatura, carga portante y torque de fricción para una excentricidad relativa $\varepsilon = 0.6$. La región delimitada por líneas de trazos corresponde a los puntos analizados en las Figuras 5.20 y 5.21 para este mismo valor de excentricidad.

cambio, para condiciones de operación más exigentes, se genera un mayor incremento de temperatura en comparación con el caso liso, lo que deriva en una pérdida de capacidad portante. Incluso bajo la hipótesis isotérmica, el caso texturado presenta una menor LCC para valores de $\varepsilon > 0.6$. De manera análoga al análisis de velocidades, en todo el rango evaluado, el torque de fricción para los casos texturados bajo el modelo térmico resulta superior al de las superficies lisas.

La Figura 5.21 exhibe las variaciones en el caudal de fuga lateral, la capacidad portante (CP) y el torque de fricción T_f del caso texturado respecto al liso, analizando tanto el escenario isotérmico como aquel donde se aplica el modelo térmico. Los cambios porcentuales para dichos parámetros se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \%Q_{\text{fuga}} &= \frac{Q_{\text{texturado}} - Q_{\text{liso}}}{Q_{\text{liso}}} \times 100 \\ \%CP &= \frac{CP_{\text{texturado}} - CP_{\text{liso}}}{CP_{\text{liso}}} \times 100 \\ \%T_f &= \frac{T_{f,\text{texturado}} - T_{f,\text{liso}}}{T_{f,\text{liso}}} \times 100 \end{aligned}$$

En primer lugar, resulta evidente que el caudal de lubricante, del cuál depende la refrigeración del cojinete, no se ve alterado por la consideración de los efectos térmicos en el modelo. No obstante, la presencia de texturas induce una reducción en dicho caudal a partir de excentricidades superiores a 0.48, lo cual guarda una estrecha consistencia con el incremento de temperatura observado en la Fig. 5.20. En segundo lugar, se aprecia un incremento en la capacidad portante (LCC) para los casos texturados hasta una excentricidad aproximada de 0.6. Dado que la estabilidad operativa de los cojinetes hidrodinámicos suele requerir excentricidades superiores a 0.7 para

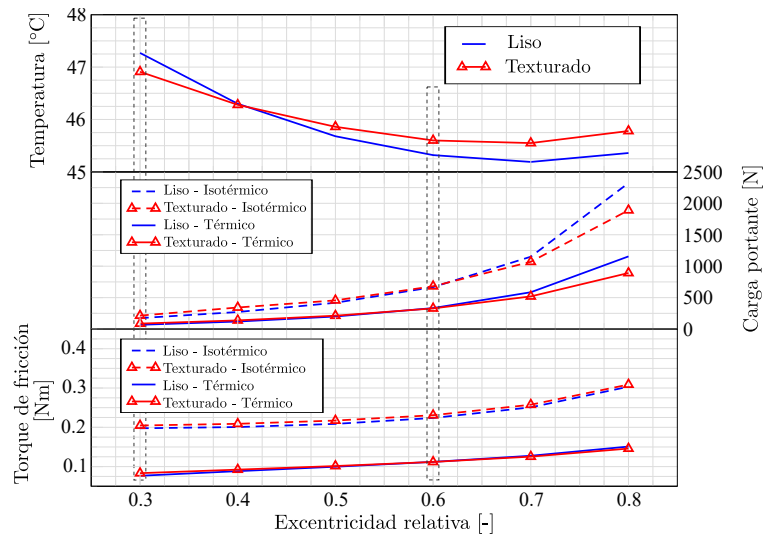


Figura 5.20: Temperatura, carga portante y torque de fricción a 2000 RPM. Se emplearon texturas triangulares (TR) en la configuración del cojinete hidrodinámico texturado.

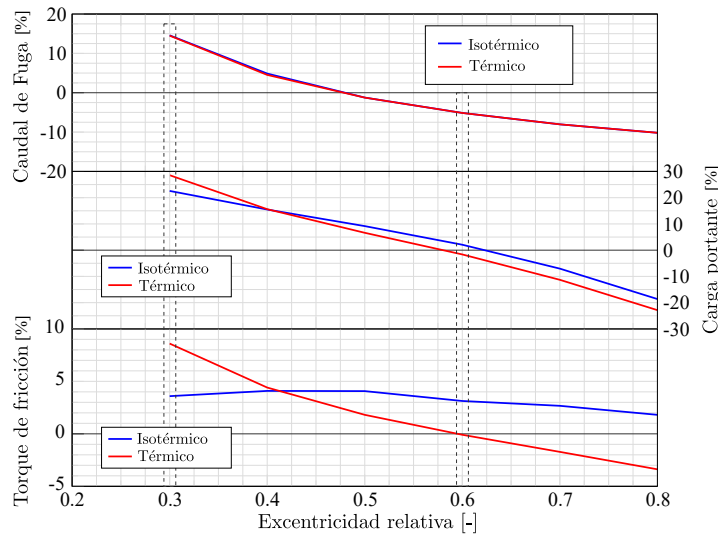


Figura 5.21: Caudal de fuga, carga portante y torque de fricción a 2000 RPM expresados como variación porcentual de las superficies texturadas respecto a las lisas; comparativa entre los modelos térmico e isotérmico.

evitar fenómenos de inestabilidad, la mejora proporcionada por estas texturas en el rango inferior podría no representar una ventaja práctica significativa en condiciones de alta carga. En tercer lugar, si bien se observa una disminución en el torque de fricción para excentricidades mayores a 0.6, este beneficio se ve contrarrestado por una pérdida sustancial en la capacidad portante. Esta degradación del desempeño es consecuencia directa de la caída en la viscosidad del lubricante provocada por el aumento de la temperatura. Tal como se ilustra en la figura, los modelos isotérmico y térmico arrojan resultados similares en cuanto a las relaciones de caudal de fuga entre casos texturados y lisos, mientras que para el torque de fricción y la LCC las discrepancias entre ambos modelos son determinantes.

Adicionalmente, se observan discrepancias notables en los valores absolutos de estos paráme-

tros al contrastar los casos lisos y texturados bajo los modelos isotérmico y térmico. Un ejemplo elocuente se presenta en la Fig. 5.20 dentro del régimen operativo habitual ($0.6 < \varepsilon < 0.8$), donde el texturado ejerce un impacto negativo tanto en la capacidad portante (LCC) como en la temperatura. Los resultados obtenidos al incorporar los efectos térmicos son aproximadamente un 50 % inferiores a los derivados de un modelo isotérmico, lo que invalida el empleo de este último tipo de resolvedores para fines de diseño mecánico.

Esta discusión subraya la trascendencia del análisis desarrollado, especialmente en lo que respecta al papel crítico de los fenómenos termohidrodinámicos en el comportamiento de los cojinetes. La inclusión de los efectos de temperatura en la película fluida revela una interacción intrincada entre la fricción, la viscosidad y la capacidad de carga, la cual no puede ser descrita fielmente mediante modelos isotérmicos simplificados.

5.2.4. Optimización de texturas

En esta sección se presenta una optimización de texturas en cojinetes hidrodinámicos realizada en forma automática, donde la variable de estudio considerada corresponde con la profundidad de las cavidades, buscando maximizar la capacidad de carga. Existen estudios preliminares [2] que reportan incrementos en la capacidad portante del cojinete, pero, generalmente, al ser analizados con modelos isotérmicos no conservativos los resultados obtenidos no son concluyentes.

En este caso de estudio, el campo de presión y por lo tanto, la capacidad portante del cojinete, se calcula utilizando la herramienta `dynCavFoam` implementada en OpenFOAM®. Se consideraron los efectos térmicos a través del modelo global que relaciona los caudales de fuga que refrigeran el dominio y la potencia disipada por la fricción (Ec. (2.166)). La influencia del incremento de temperatura en la viscosidad es considerado mediante el uso de la Ley de Vogel (Ec. (1.3)).

Para la inclusión de texturas se incorporó un módulo para la lectura de archivos STL y se modificó la generación del campo de escalar de altura de la película lubricante h mediante un sistema parametrizado que individualiza las alturas de cada textura. El proceso utiliza como parámetros la cantidad de texturas presentes en direcciones axial y circunferencial para determinar la dimensión de la matriz de alturas ($N_\theta \times N_y$), y permite dividir la cantidad total de texturas en grupos menores a los cuales asignarles el mismo valor de alturas, permitiendo así configuraciones que van desde la totalidad de las texturas hasta texturas completamente individualizadas, tal como se muestra en la Fig. 5.22.

La optimización se desarrolló mediante un sistema integrado, implementado en Python, que acopla el algoritmo estocástico CMA-ES con el resolvedor `dynCavFlow` para encontrar la com-



Figura 5.22: Implementación geométrica en el solver con individualización de texturas.

binación de alturas individuales de textura que maximice la capacidad portante. El algoritmo genera múltiples casos en paralelo a partir de un caso base preconfigurado, proponiendo un conjunto de matrices de altura como población de soluciones candidatas, le asigna una de estas alturas a cada instancia y las ejecuta independientemente mediante el resolutor. Los resultados obtenidos son recuperados e indexados por el programa para evaluar la aptitud de cada solución propuesta. Con esta información, propone la siguiente generación de soluciones candidatas basándose en aquellas que obtuvieron mejores resultados de la iteración anterior. El algoritmo actualiza automáticamente la matriz de covarianza, la media y el paso de búsqueda tras cada iteración, por lo que se encuentra activamente determinando la mejor dirección de exploración. De esta forma la búsqueda se orienta estratégicamente para reducir el número de evaluaciones requeridas y el tiempo de cómputo.

En una primera instancia de prueba se observó que las texturas en la región cavitada tendían a crecer indefinidamente sin respetar la física del problema. Esto se debe a una limitación en la Ecuación de Reynolds al calcular la variación del campo de presión producida por la discontinuidad de la cavidad. Las elevadas presiones focalizadas erróneamente mitigaban los efectos de cavitación. Es por esto, que se decidió imponer una condición de suministro para limitar la región de cavitación, tal como ocurre en cojinetes de uso industrial, y realizar el estudio de texturas únicamente sobre la región de presiones positivas.

Se comenzó con una profundidad uniforme para las texturas y se fue aumentando el número de parámetros a optimizar para mejorar los resultados, primero liberando la dirección axial y luego progresivamente la circunferencial. Para verificar los resultados obtenidos se realizaron múltiples corridas con distintas semillas, pudiendo verse una de ellas en la Fig. 5.23 donde se observa la evolución de la altura adoptada por cada parámetro. Se evidencia la gran variedad de cada parámetro en las poblaciones propuestas en el estado inicial y su convergencia al transcurrir las iteraciones.

El caso de 30 parámetros corresponde a la individualización de cada cavidad utilizando condiciones de simetría en la dirección axial. La evolución de la capacidad de carga se muestra en Tabla 5.8, observando como el aumento de parámetros permite visualizar ganancias que en una optimización generalizada no sería visible. La configuración óptima de texturas se muestra en la

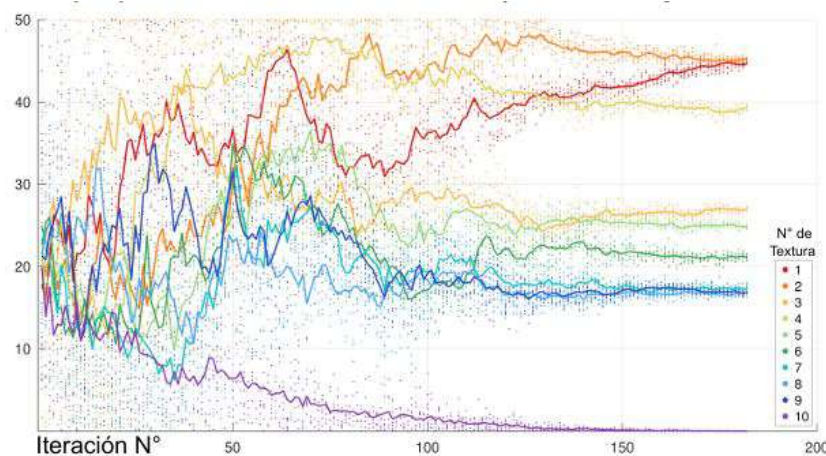


Figura 5.23: Convergencia de la población propuesta para cada parámetro.

N° de parámetros	1	2	4	8	12	30
Capacidad de carga [N]	1715	1729	1749	1791	1816	1848
Ganancia respecto al liso	0 %	0.80 %	2.01 %	4.43 %	5.58 %	7.75 %

Tabla 5.8: Incremento de la capacidad portante al refinar la cantidad de parámetros

Fig. 5.24 donde se observa que las texturas en el huelgo mínimo resultan nulas y aquellas en el huelgo máximo son las que tienden a tener mayor profundidad. Por otra parte, en dirección axial es conveniente que las texturas tengan mayor profundidad en la zona central y se reduzcan hacia el exterior. Se desarrolló con éxito una herramienta capaz de optimizar profundidades individuales, aplicable a cualquier geometría y distribución. Esta metodología permite reducir significativamente los tiempos de cómputo, agilizando el análisis de múltiples configuraciones geométricas.

5.3. Dinámica de rotores soportados por cojinetes lisos

5.3.1. Puntos de equilibrio utilizando un modelo de pseudo-cavitación

Los parámetros operativos empleados son idénticos a los utilizados en las secciones referidos al caso propuesto por Snyder et al. [7] y se detallan en la Tabla 5.2. En la Figura 5.25, se contrastan los puntos de equilibrio del cojinete obtenidos mediante el modelo de pseudo-cavitación

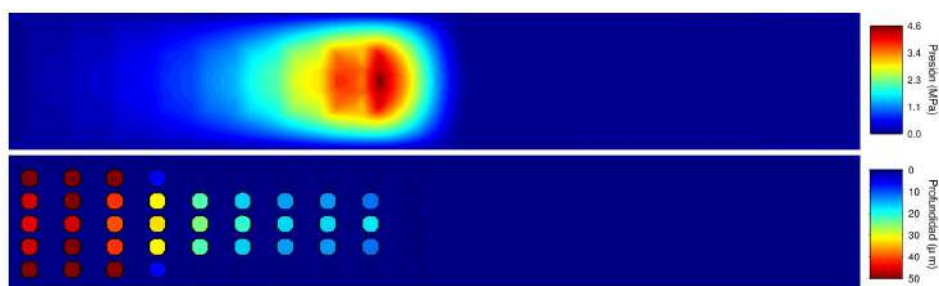


Figura 5.24: Campo de presión y profundidad de texturas para la configuración óptima.

propuesto con los resultados reportados en la literatura [7]. Se evalúan diversos valores de κ_s con el fin de analizar la influencia de este parámetro en la estabilidad del eje. Los puntos de equilibrio reportados por Snyder (representados mediante líneas de trazos) y los obtenidos con el modelo desarrollado en este trabajo (dynCav) se comparan para excentricidades relativas ε de 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 0.9. Es posible notar la influencia del parámetro κ_s sobre la posición final del eje, tomando como referencia las posiciones de equilibrio de un cojinete de longitud infinita bajo la condición de contorno de Gumbel. Tal como se discutió anteriormente, las discrepancias observadas en la distribución de presiones respecto al trabajo de referencia tienen una incidencia directa en la posición final. Debido a que la presencia de presiones negativas suele conducir a una posición de equilibrio final más inestable, el modelo empleado en este estudio predice un comportamiento más estable para la posición de equilibrio del eje.

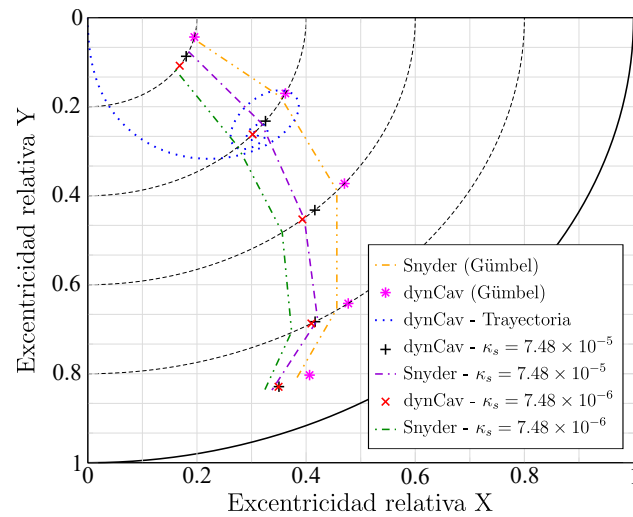


Figura 5.25: Puntos de equilibrio obtenidos para las diferentes condiciones de operación [7].

Para determinar el punto de equilibrio en un caso real, se emplea la metodología propuesta por Snyder [7]. Mediante la resolución de un caso estático, y a partir de los valores de las fuerzas radiales y tangenciales, se obtiene el ángulo de equilibrio al igualar la dirección de la fuerza neta con la de la carga aplicada. Este procedimiento permite definir el punto hacia el cual converge el cojinete en función de una carga externa constante; sin embargo, no describe la trayectoria que el eje recorre hasta alcanzar dicho estado estable ni las condiciones de amortiguamiento en las que se produce la transición. En la Figura 5.25, se ilustra mediante una línea de trazos la trayectoria obtenida numéricamente al liberar el eje desde la posición concéntrica con el alojamiento (0, 0), verificando así la convergencia efectiva hacia el punto de equilibrio determinado.

A medida que se incrementa la fuerza tangencial generada por la película fluida, el ángulo de actitud ϕ resultante es mayor, lo cual compromete la estabilidad del eje frente a la acción de cargas dinámicas. Se constata que una mayor estabilidad está asociada a aquellos casos donde la

extensión de la zona con presiones inferiores a la de saturación es menor. En consecuencia, tal como se indicó previamente, un incremento en el valor de κ_s deriva en una disminución de la estabilidad en el comportamiento dinámico del cojinete.

5.3.2. Respuesta dinámica a cargas variables en el tiempo

Para analizar el comportamiento del cojinete hidrodinámico bajo la aplicación de una carga dinámica $W(t)$, se toma como referencia el caso publicado por Ausas et al. [12]. La carga de ensayo dinámica consiste en dos impulsos separados por un intervalo de tiempo equivalente a un cuarto del periodo típico de operación de un motor de combustión interna. En este estudio, se simula un cojinete con un radio r_b de 12.5 mm, un huelgo medio c de 20 μm y una longitud L de 7.85 mm, empleando un lubricante con una viscosidad $\mu_l = 0.0075$ Pa s. Bajo una velocidad de rotación ω_b de 209.43 rad/s, el número de Reynolds resultante es $Re = 6$. La carga aplicada se expresa en función del tiempo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_X &= 2.854 [\exp(-400(t - 0.25)^2) + 0.95534 \exp(-400(t - 0.5)^2)] \\ W_Y &= 0.8433 \exp(-400(t - 0.5)^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde la carga está en Newtons y el tiempo en número de ciclos. El dominio se discretiza empleando 200 elementos en dirección circunferencial y 20 en dirección axial. El tiempo total de simulación corresponde a 3 revoluciones del eje ($t = 0.045$ s). Se utiliza un paso de tiempo de 1×10^{-4} s, condicionado por la restricción temporal que impone el carácter semi-implícito del término reactivo en la ecuación de transporte. La Figura 5.26 muestra la variación temporal de la carga externa aplicada W_X y W_Y (Ec. (5.4)), así como los parámetros ε_X , ε_Y , F_X y F_Y , que corresponden a los valores de posición y fuerzas hidrodinámicas obtenidos mediante el modelo de cavitación vaporosa de Schnerr-Sauer. De manera análoga, los parámetros ε_{Xa} , ε_{Ya} , F_{Xa} y F_{Ya} corresponden a los resultados publicados por Ausas [12] empleando el modelo de Elrod-Adams ($p-\theta$). Esta aplicación demuestra el excelente desempeño del modelo de cavitación vaporosa para adaptarse a variaciones significativas en las condiciones de operación, validando su capacidad para capturar la respuesta transitoria del cojinete frente a cargas dinámicas complejas.

5.3.3. Contacto rotor-carcasa

La dinámica del contacto entre el rotor y la carcasa durante el transitorio de arranque se validó a partir de las trayectorias publicadas por Cui et al [135]. La dinámica del cojinete se calcula desde el contacto en la parte inferior utilizando las expresiones analíticas de los factores de presión, corte y contacto reportados por Patir y Cheng [103, 104] en la ecuación de Reynolds bifásica (Ec.

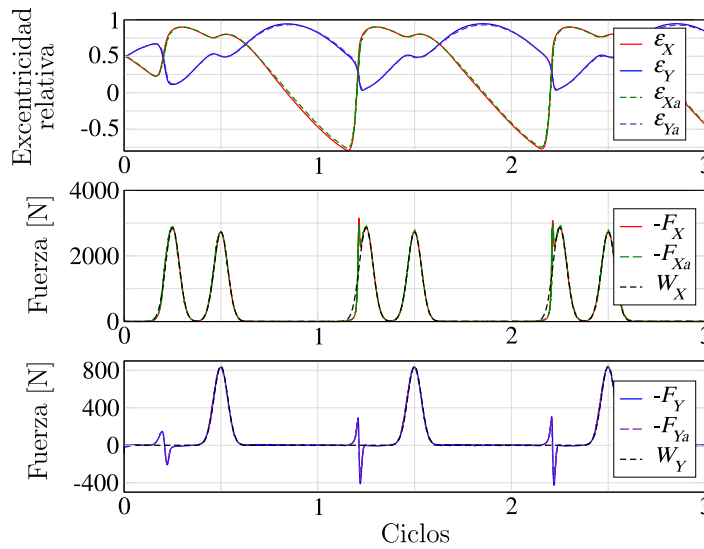


Figura 5.26: Respuesta dinámica a cargas variables.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	50	mm	W	4000	N
c	50-150	μm	σ_R	1	μm
L	50	mm			
μ	27	mPa s			
ω_b	104.07	s^{-1}			

Tabla 5.9: Parámetros utilizados para el estudio del contacto rotor-carcasa.

(2.141)). Las características del cojinete se describen en la Tabla 5.9. Se presentan tres valores de huelgo medio y se compara su influencia en la trayectoria obtenida.

La Fig. 5.27a muestra la trayectoria obtenida desde la posición de reposo en la parte inferior de la carcasa ($\varepsilon \rightarrow 1$) en comparación con los datos reportados por Cui [135]. El modelo propuesto se adapta correctamente mediante la implementación de los factores de flujo de Patir y Cheng [102, 103] y el modelo a contacto a los resultados disponibles en la bibliografía [135]. Se observa como un huelgo mayor conlleva también a que para la misma carga externa se logre una excentricidad mayor. Esto es debido a que la capacidad portante del cojinete disminuye proporcionalmente con el valor del huelgo medio, tal como muestran las expresiones analíticas (2.74) y (2.75), por ejemplo.

Por otro lado, la Fig. 5.27b muestra cómo disminuye la influencia de la fuerza de contacto F_c a lo largo del tiempo, mientras que se incrementa la fuerza hidrodinámica F_h . Durante los primeros instantes del arranque, dado que la velocidad de giro es nula, la totalidad de la carga es asumida por el contacto. Luego, a medida que se incrementa la velocidad, la fuerza hidrodinámica comienza a sustentar el eje y a separar las superficies. De esta forma, conforme avanza el tiempo cada vez hay menor fuerza de contacto, hasta que finalmente se produce la separación de ambas superficies. La suma de ambas siempre debe resultar en la magnitud de la carga externa aplicada. Se observa que en las situaciones donde el huelgo es menor, el contacto se prolonga unos instantes

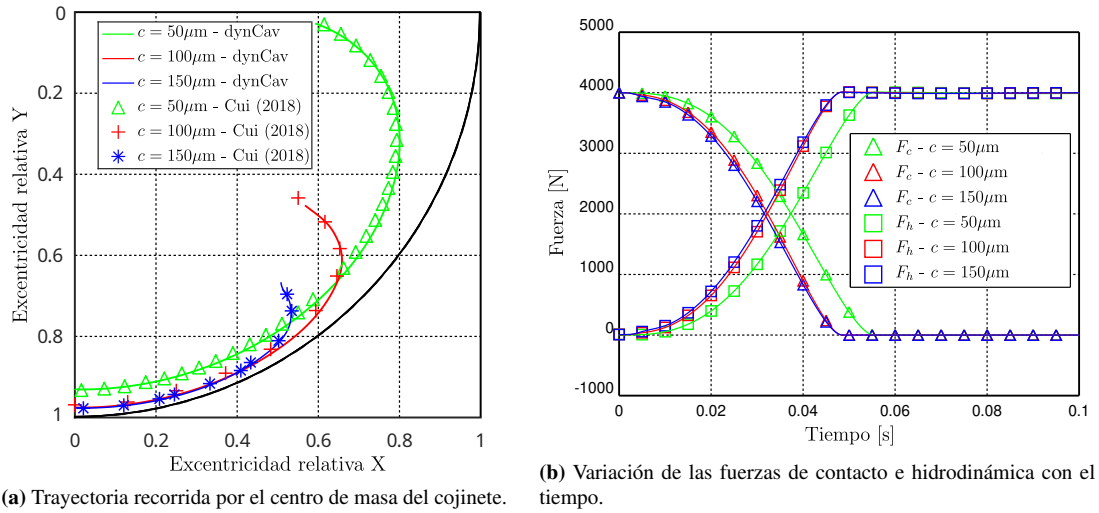


Figura 5.27: Comparación de resultados obtenidos con los reportados por Cui et al. [135].

más en el tiempo en comparación con las situaciones donde el huelgo es mayor. Esto es debido a que, si bien, la posición de equilibrio va a una excentricidad mucho mayor, la escala tan pequeña del huelgo, conlleva a que durante el transitorio sea mucho más probable que ambas superficies se encuentren separadas por una distancia menor al de la suma de sus rugosidades medias δ_R .

5.3.4. Dinámica de rotores elásticos

Sobre la base de los trabajos encontrados en la literatura, se realiza la validación del código `rotorDynCav` a partir de utilizar el rotor propuesto por Birembaut y Peigney [83] y los resultados reportados en la bibliografía de referencia. El objetivo de este análisis es, a su vez, evaluar el comportamiento de la viga flexible, presentada en el capítulo anterior, en función del modelo utilizado para caracterizar los cojinetes hidrodinámicos: Linealizado, No-lineal utilizando la teoría ISJB y No-lineal mediante el uso del modelo `dynCav`. La Fig. 5.28 muestra un esquema del eje y al que se le adicionan a su vez, tres discos ubicados a lo largo de su longitud. El eje tiene un momento de desbalance m_{unba} que genera una excitación sincrónica. La viga se considera como un elemento flexible a través del Método de Elementos Finitos. Los parámetros geométricos y de funcionamiento se muestran en la Tabla 5.10.

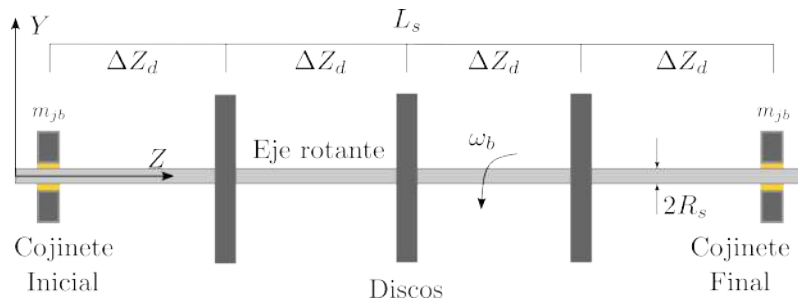


Figura 5.28: Esquema de la geometría del sistema rotor-cojinetes.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	20.056	mm	F_{ext}	518	N
c	59	μm	L_s	0.8	m
L	24	mm	E	210	GPa
μ	29	mPa s	R_s	20	mm
m_{jb}	2.29	kg	ω_b	314.15	s^{-1}
$I_{t,d}$	0.0511	m^4	$I_{p,d}$	0.102	m^4
ΔZ_d	0.2	m	m_{unba}	0.00012	kg m

Tabla 5.10: Parámetros del conjunto eje-cojinetes utilizado [83].

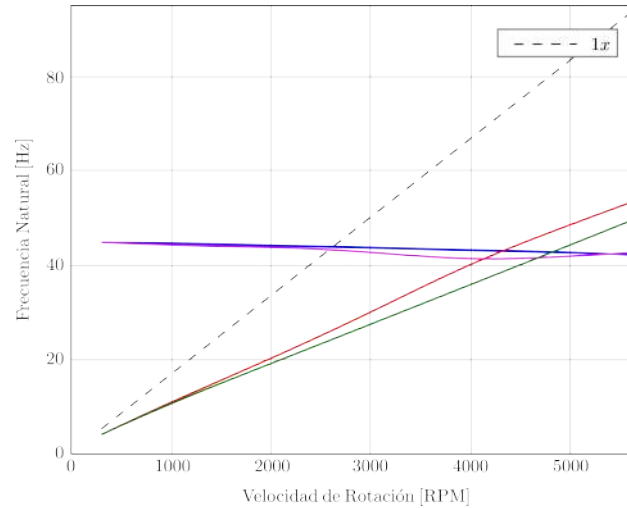


Figura 5.29: Diagrama de Campbell para el rotor analizado por Birembaut y Peigney [83].

A partir del cálculo numérico del conjunto rotor-cojinete se obtienen los desplazamientos que realiza el centro de masa del eje en cada uno de los casos propuestos. Esta comparación de los recorridos realizados permite conocer cómo es el comportamiento dinámico bajo cada una de las suposiciones realizadas.

En la Fig. 5.29 se muestra el diagrama de Campbell correspondiente al rotor en estudio. Este diagrama representa el espectro de respuestas del sistema como una función de la velocidad de rotación. Este estudio se realiza a partir de linealizar el sistema para velocidades comprendidas entre las 300 y 5700 RPM. La primera velocidad crítica obtenida es aproximadamente 2630 RPM (280 rad/s).

La dinámica del eje se calculó con cada uno de los métodos propuestos para un tiempo de 1 segundo utilizando 40 elementos lineales y un paso de tiempo $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ s. En la Fig. 5.30a se muestra la variación de posición en las coordenadas X e Y (Fig. 2.3a) del centro de masa del eje rotante para $Z = 0$ (posición coincidente con el cojinete inicial). Se observa que debido a que ambas formulaciones surgen a partir de la misma teoría, los dos modelos oscilan alrededor de la misma posición de equilibrio siendo el caso no lineal el que presenta una órbita de mayor amplitud. La Fig. 5.30b muestra la diferencia en la amplitud del desplazamiento y en la posición

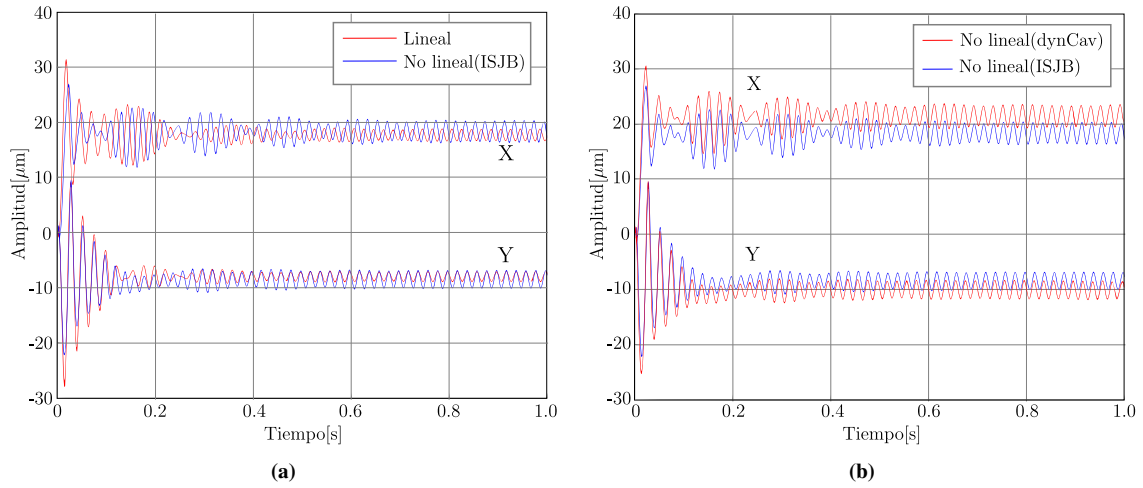


Figura 5.30: Comparación del desplazamiento en X e Y de la trayectoria entre: a modelo Lineal y No lineal (ISJB), b código dynCav y solución ISJB.

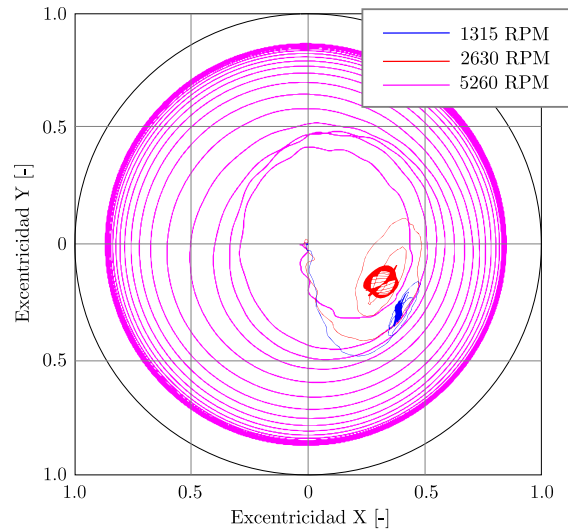


Figura 5.31: Trayectorias obtenidas según las RPM de funcionamiento: a $0.5\omega_n$ (1315 RPM), ω_n (2630 RPM) y $2\omega_n$ (5260 RPM)

de equilibrio utilizando la expresión analítica para determinar la capacidad de carga en cojinetes cortos y el código dynCav.

Se observa que el uso del modelo numérico para estimar la capacidad portante de cojinetes reales alcanza magnitudes de desplazamiento mayores lo cuál es consistente con lo esperado debido a que el la teoría ISJB tiende a sobreestimar el campo de presiones cuando es usada en cojinetes reales. Esto conduce a que se alcance hasta un 15 % de diferencia entre los valores de desplazamientos calculados con la expresión analítica y mediante el calculo del cojinete real.

Como último caso, se obtienen las trayectorias para tres velocidades de rotación a modo de reportar la influencia de la frecuencia de resonancia y del whirl/whip en la trayectoria. Como se observa en Fig. 5.31, la trayectoria que corresponde con la frecuencia de resonancia (2630 RPM) permanece orbitando alrededor de una posición de equilibrio. A velocidades menores ($0.5 \omega_n$) se

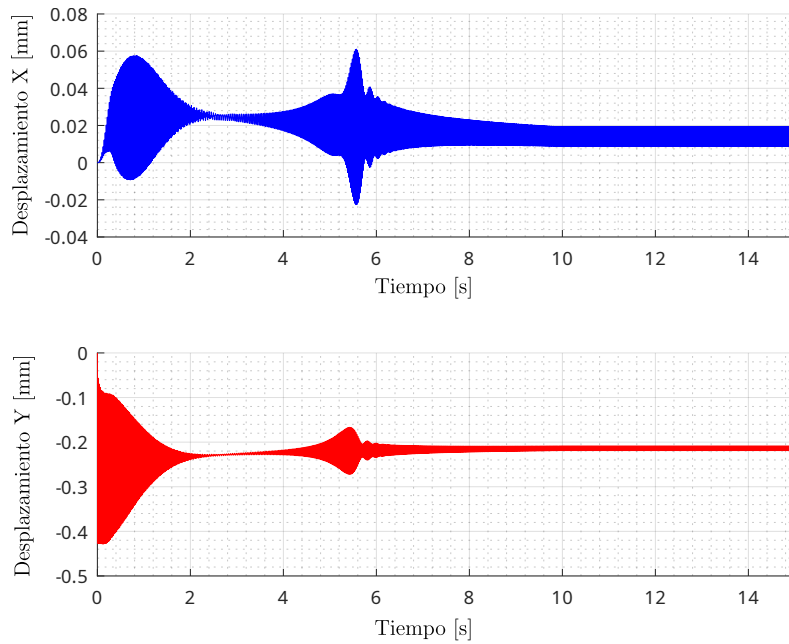


Figura 5.32: Desplazamientos del centro de masa del disco central.

observa que el eje tiende a converger a un punto de equilibrio, tal como ocurre en los casos donde se utilizan los modelos basados en un eje rígido. Por último, el caso a 5260 RPM corresponde al doble de la velocidad de resonancia, velocidad en la cuál el sistema se inestabiliza completamente y comienza a precesionar con una órbita mucho mayor. La velocidad de precesión $\dot{\phi}$ obtenida en este caso es de ≈ 280 rad/s (2635 RPM). Esta velocidad es coincidente con la velocidad reportada en la bibliografía para la ocurrencia del whip [83] lo cuál valida el código desarrollado para la caracterización del comportamiento dinámico en vigas elásticas y la determinación de este fenómeno resonante.

5.3.5. Velocidad de entrada en Oil Whip

Para analizar el comportamiento del rotor en condiciones de arranque o parada, se aplica una aceleración angular constante de forma de alcanzar 5000 RPM al cabo de 10.0 segundos y luego mantener dicha velocidad constante durante 5 segundos. La Tabla 5.10 resume la geometría del rotor y parámetros del cojinete utilizados. La Fig. 5.32 muestra el desplazamiento del rotor en la mitad de su longitud en dirección X e Y. Se observa el transitorio inicial debido a la carga externa aplicada y luego, la vibración producida por la coincidencia de la velocidad de rotación con la frecuencia natural que ocurre a los 5.3 segundos de iniciada la rotación.

Para analizar el espectro de frecuencias de la vibración, se aplica la Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) la cual es un algoritmo matemático esencial en el análisis de vibraciones que convierte señales complejas del dominio del tiempo (amplitud vs. tiempo) al dominio de la frecuencia (amplitud vs. frecuencia) [123]. Esta herramienta permite descomponer

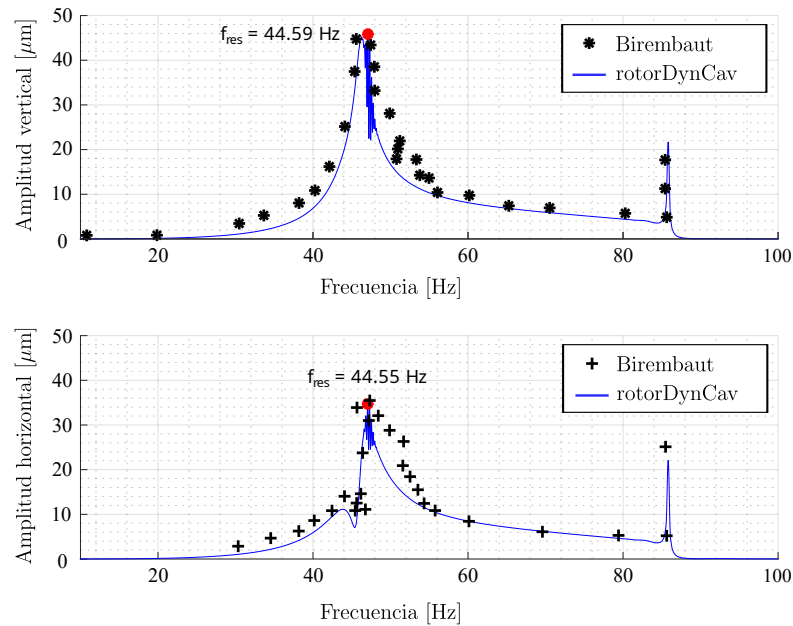


Figura 5.33: Espectro de vibración a la altura del disco central.

vibraciones e identificar fallas en la maquinaria (desequilibrio, desalineación). En la Fig. 5.33 se muestra la respuesta de la vibración para la señal de amplitud en el tiempo de la Fig. 5.32 en comparación con los resultados experimentales reportados por Birembaut [83], mostrando un excelente ajuste.

La Fig. 5.34 muestra la evolución temporal del centro de masa del rotor en la posición de los cojinetes. Puede observarse el incremento de la vibración en cercanías de la velocidad correspondiente a la frecuencia natural del sistema correspondiente a 2635 RPM ($\approx 44 \text{ Hz}$). A su vez, el análisis se realiza para diferentes magnitudes del momento de desbalanceo: $2.4 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$, $4.8 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$, $9.6 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}$. Cuanto mayor es la carga de desbalanceo, mayor es la amplitud de la vibración producida en cercanías de la frecuencia natural del sistema. Estos resultados son consistentes con la física reportada por de Castro et al. [86], que reportó la influencia de la masa de desbalanceo en el retardo de la entrada del eje en Oil Whip.

A partir de los registros de desplazamientos verticales de cada uno de los casos propuestos se obtiene la gráfica de cascada de frecuencias correspondiente. La Fig. 5.35a muestra el mapa de frecuencias para el momento de desbalance más pequeño y se observa cómo las frecuencias subsíncronas se mantienen presentes hasta que la velocidad de rotación alcanza la frecuencia natural del eje, y entonces las vibraciones sincrónicas toman mayor relevancia. Esto ocurre a la frecuencia de 44 Hz y a los 5.3 s como ya se ha comentado anteriormente. Las Figs. 5.35b, 5.35c y 5.35d muestran cómo el incremento del momento de desbalance genera una disminución de las frecuencias subsíncronas, llegando incluso a retardar la entrada en Oil Whirl como se comentó en la Fig. 5.34, pero resultando en un incremento notable de la vibración sincrónica en cercanías

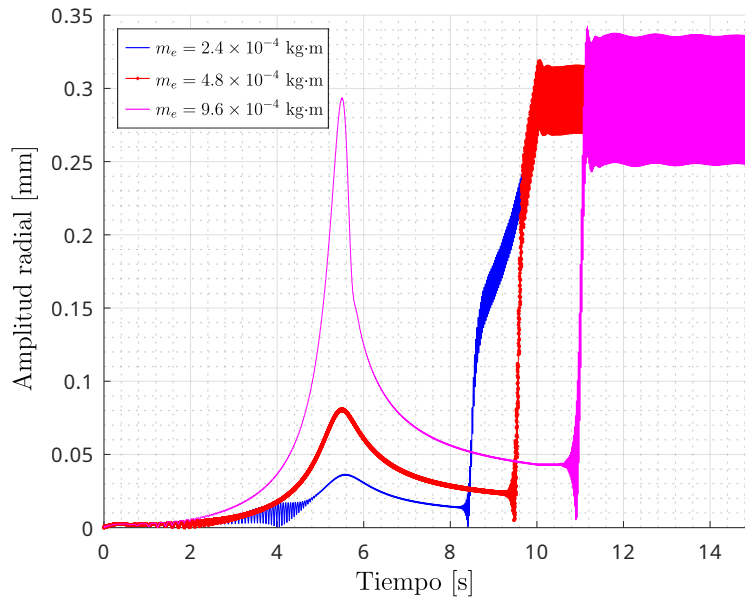


Figura 5.34: Amplitud del desplazamiento del centro de masa del disco central.

de la frecuencia natural.

En la Fig. 5.36 se muestra la cascada de desbalanceo para la respuesta del eje en su posición media ante un incremento de velocidad de 0 a 7000 RPM en 10 segundos y un momento de desbalanceo de $2.4 \text{ kg}\cdot\text{m}$. A diferencia de los casos anteriores donde las frecuencias sincrónicas luego de finalizada la aceleración se mantenían a una frecuencia constante, en esta situación continúan incrementándose. Sin embargo, las frecuencias subsincrónicas se encuentran ancladas a la frecuencia natural en el valor de 44 Hz generando amplitudes de vibración mucho mayores a las reportadas en los casos anteriores.

5.3.6. Casos de estudio adicionales

Por último, con el propósito de consolidar la validez y robustez del modelo numérico desarrollado se presenta a continuación un análisis exhaustivo de catorce casos de estudio particulares, detallados en la Tabla 5.12. Para contrastar y validar la precisión de los resultados obtenidos, se utilizó como herramienta de referencia el software comercial de elementos finitos Siemens SAMCEF [44], ampliamente reconocido por su capacidad para el análisis avanzado de sistemas rotantes, turbomaquinaria y mecanismos [136–138].

El conjunto de ensayos numéricos fue diseñado para evaluar la respuesta dinámica del eje con una configuración similar a la mostrada en la Fig. 5.28 ante una amplia variedad de condiciones operativas y configuraciones estructurales.

La Tabla 5.11 resume las condiciones de operación del rotor planteado. Entre los factores analizados, se destaca la modificación de la inercia del sistema mediante la adición y remoción

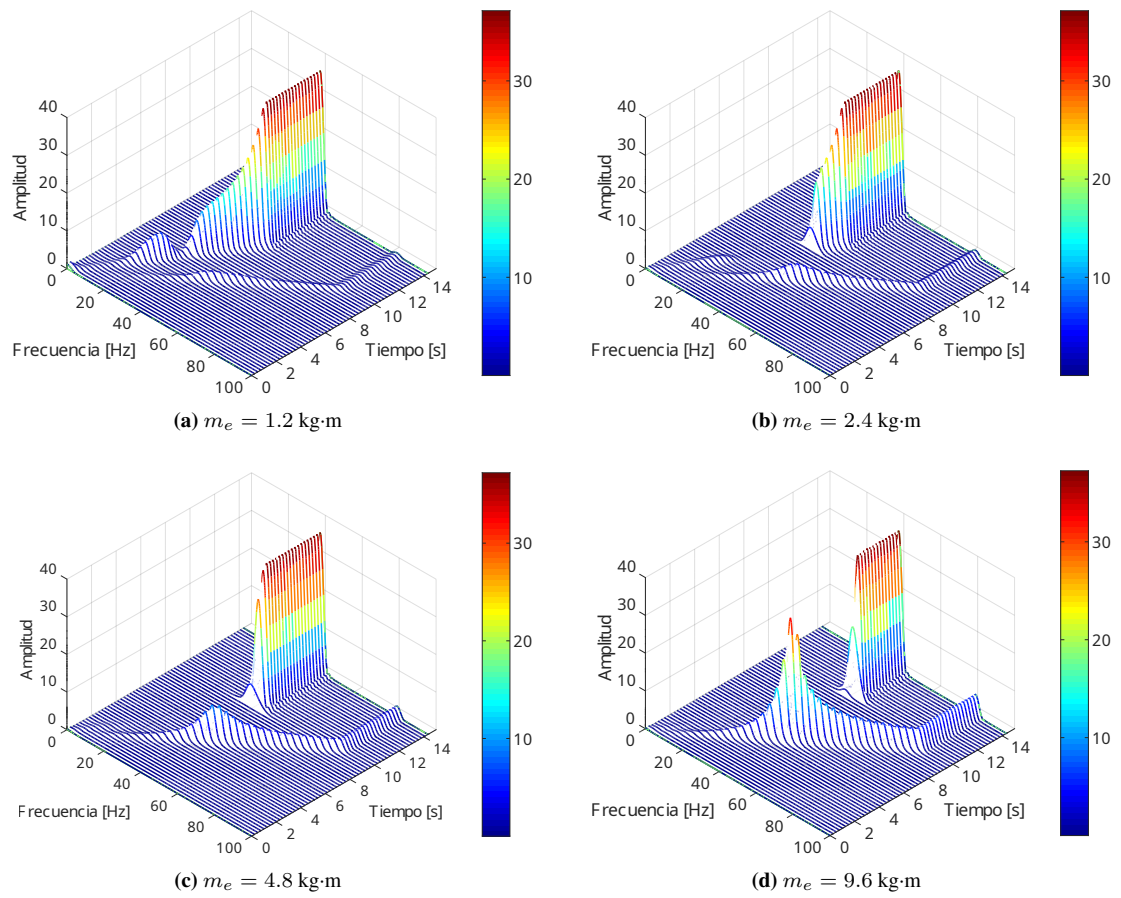


Figura 5.35: Cascadas de frecuencia para los diferentes masas de desbalance propuestas.

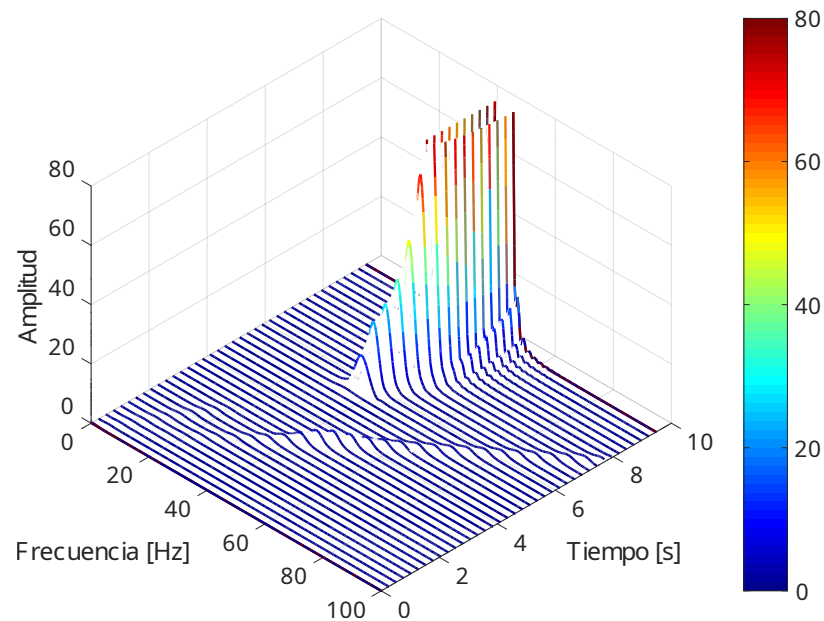


Figura 5.36: Cascada de frecuencias para la respuesta a una rampa de velocidad hasta 7000 RPM y un desbalance de 2.4 kg·m.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
r_b	20	mm	F_{ext}	518	N
c	50	μm	L_s	0.8	m
L	10	mm	E	210	GPa
μ	40	mPa s	R_s	8	mm
m_{jb}	2.29	kg	ω_b	314.15	s^{-1}
$I_{t,d}$	0.0511	m^4	$I_{p,d}$	0.102	m^4
ΔZ_d	0.2	m	m_{unba}	0.0002	kg m

Tabla 5.11: Parámetros del conjunto eje-cojinetes utilizado.

de la cantidad de discos, así como la incorporación de fuerzas de excitación derivadas de estados de desbalanceo. Asimismo, se investigó el comportamiento transitorio del sistema bajo diferentes rampas de aceleración de la rotación propia del eje hasta alcanzar diversas velocidades nominales de funcionamiento (3000 RPM y 5000 RPM).

Este análisis comparativo permite observar la sensibilidad del modelo propuesto ante variaciones en la carga y las condiciones de contorno, garantizando que el acoplamiento entre la hidrodinámica de los cojinetes y la dinámica estructural del rotor capture fielmente los fenómenos de vibración y estabilidad observados en sistemas reales.

ID	RPMs (rad/s)	Nº de Discos	Carga Externa	Balance	Tiempo de rampa
1	5000 (523.58)	Sin discos	518 N	Balanceado	Sin rampa
2	3000 (314.15)	Sin discos	518 N	Balanceado	Sin rampa
3	3000 (314.15)	Sin discos	518 N	Balanceado	1.0 s
4	3000 (314.15)	1 disco	518 N	Balanceado	Sin rampa
5	3000 (314.15)	3 discos	518 N	Balanceado	Sin rampa
6	3000 (314.15)	1 disco	518 N	Balanceado	1.0 s
7	3000 (314.15)	3 discos	518 N	Balanceado	1.0 s
8	3000 (314.15)	Sin discos	518 N	Desbalanceo	Sin rampa
9	3000 (314.15)	1 disco	518 N	Desbalanceo	Sin rampa
10	3000 (314.15)	3 discos	518 N	Desbalanceo	Sin rampa
11	3000 (314.15)	3 discos	518 N	Desbalanceo	1.0 s
12	5000 (314.15)	3 discos	518 N	Desbalanceo	1.0 s
13	5000 (314.15)	3 discos	518 N	Desbalanceo	2.0 s
14	5000 (314.15)	3 discos	518 N	Desbalanceo	0.5 s

Tabla 5.12: Resumen de los casos de simulación.

En este análisis, se evalúa la evolución temporal del centro de masa del muñón en la posición del cojinete. Al ser un problema con simetría a lo largo de la longitud respecto de la longitud media del eje, el desplazamiento en el cojinete extremo izquierdo es idéntico al desplazamiento en el cojinete extremo derecho. Los resultados obtenidos en contraste con los obtenidos por SAMCEF se indican en las Fig. 5.37-5.50.

Del análisis de los casos propuestos, se concluye que se cuenta con un modelo robusto capaz de representar la física de rotores flexibles ante diferentes estados de carga. Con la herramienta

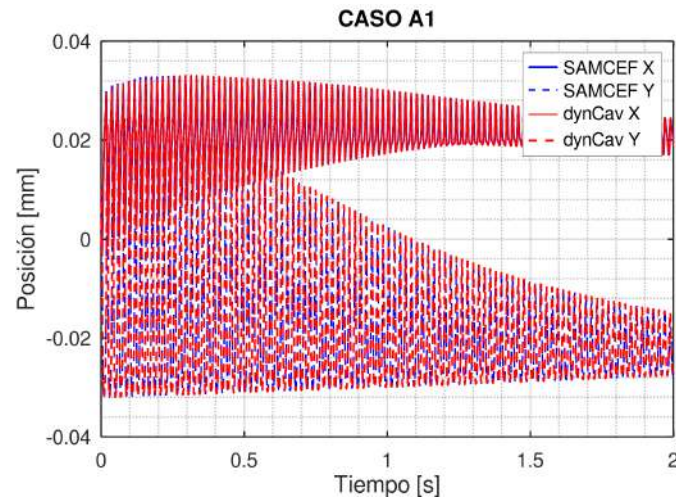


Figura 5.37: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 1.

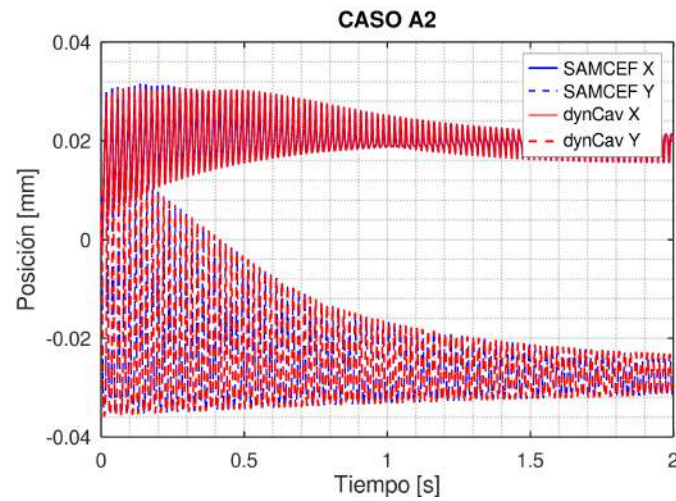


Figura 5.38: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 2.

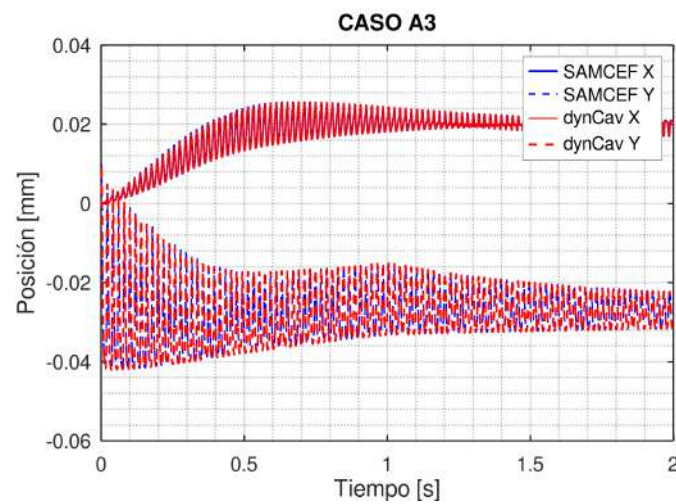


Figura 5.39: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 3.

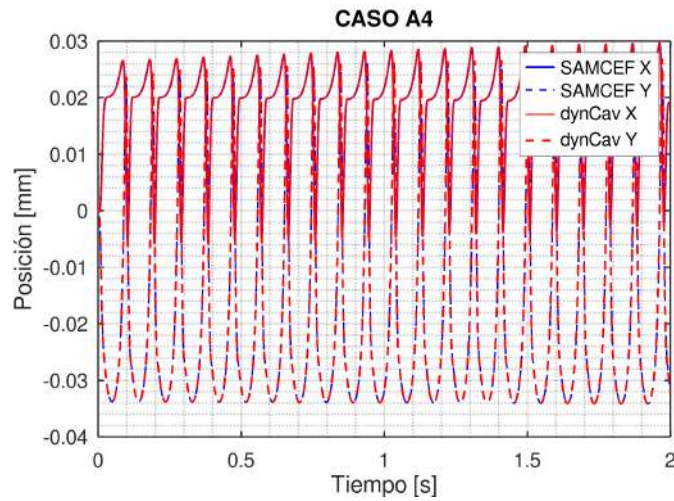


Figura 5.40: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 4.

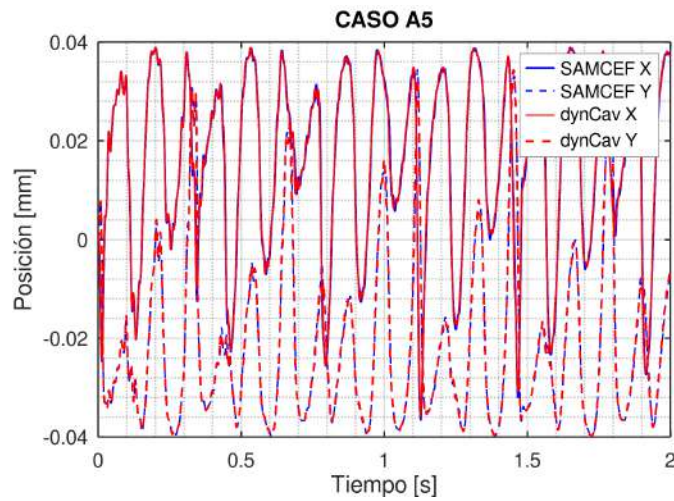


Figura 5.41: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 5.

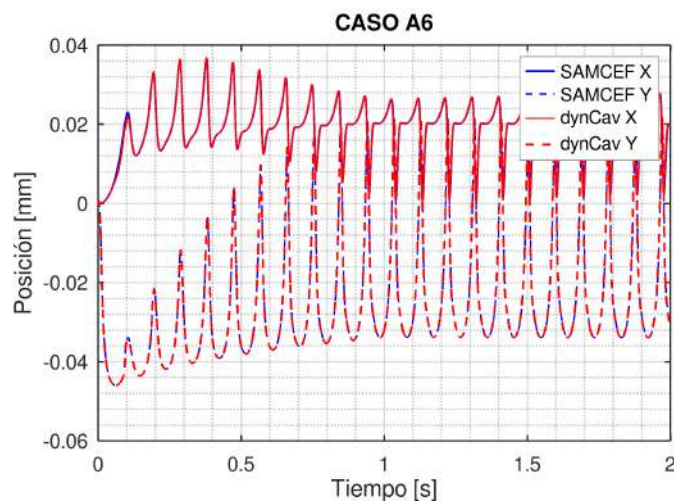


Figura 5.42: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 6.

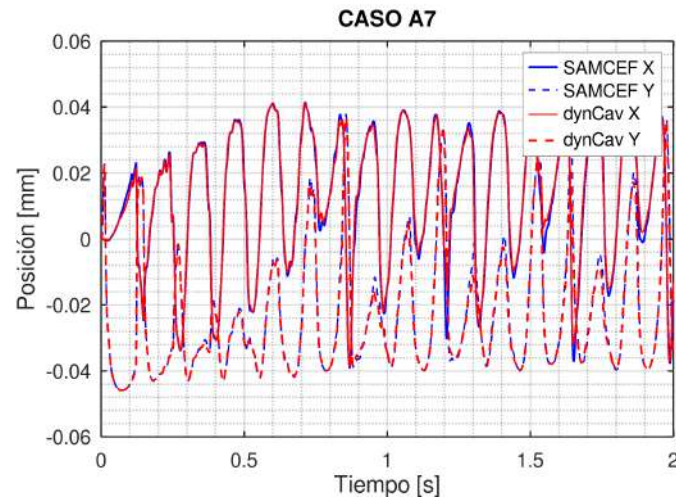


Figura 5.43: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 7.

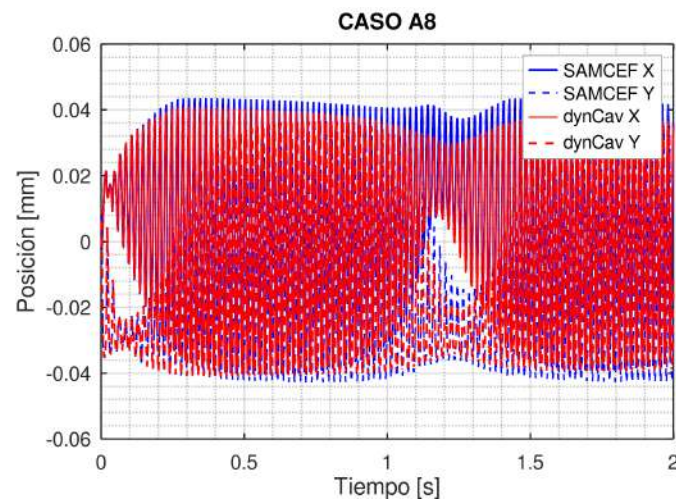


Figura 5.44: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 8.

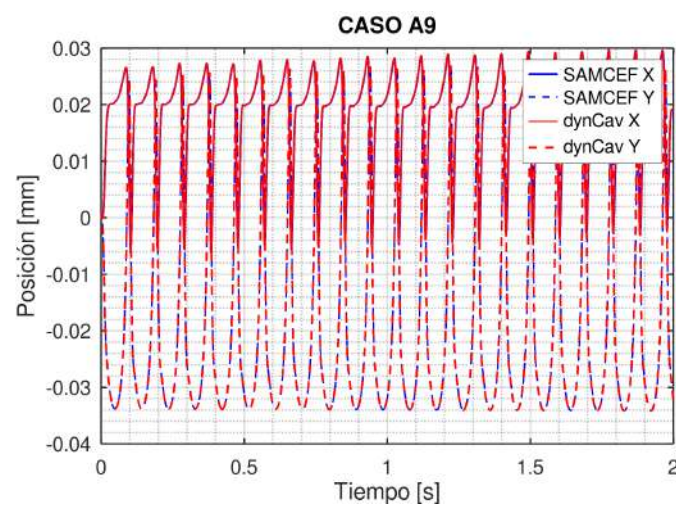


Figura 5.45: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 9.

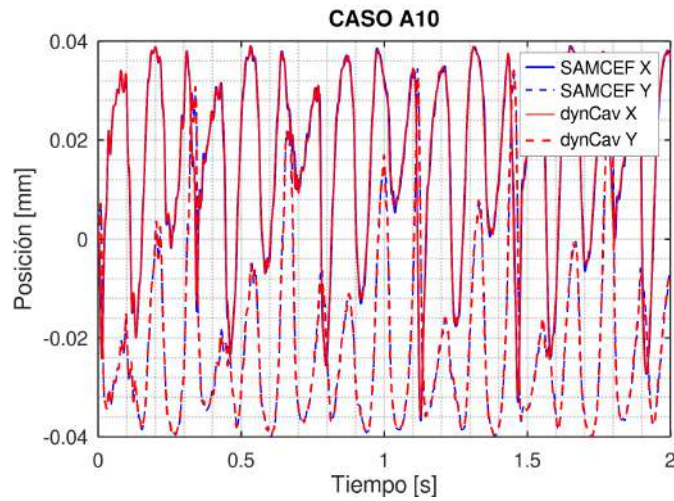


Figura 5.46: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 10.

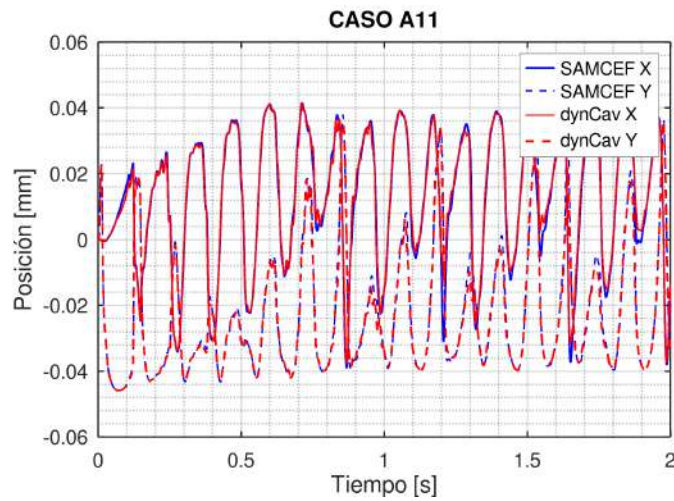


Figura 5.47: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 11.

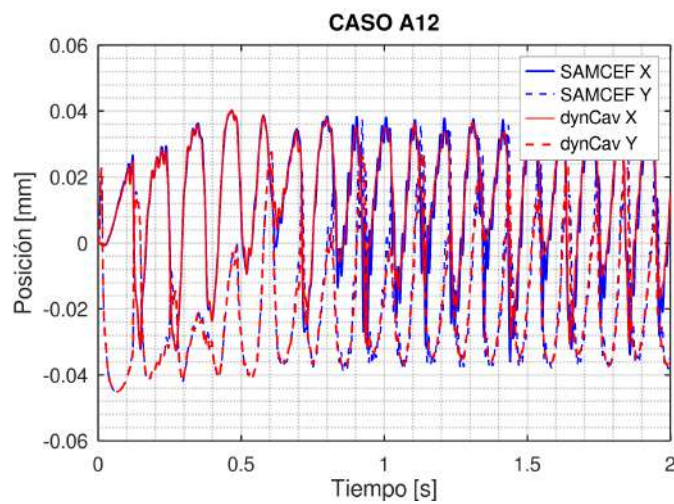


Figura 5.48: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 12.

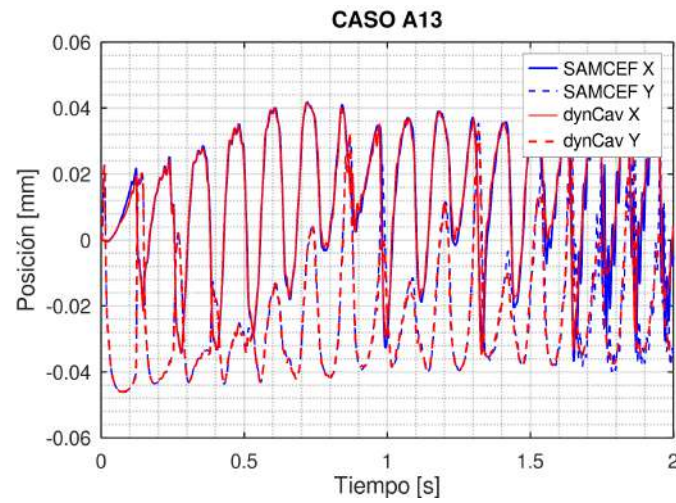


Figura 5.49: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 13.

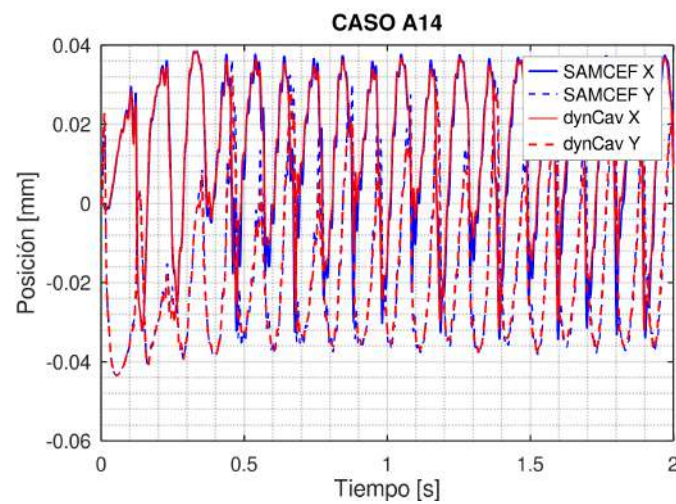


Figura 5.50: Evolución temporal de la posición del muñón para el caso 14.

numérica verificada para su uso en condiciones donde el cojinete está representado por la expresión analítica de Ocvirk, se procede a analizar el comportamiento del eje cuando se consideran los efectos de la cavitación y del texturado superficial del rotor.

5.4. Dinámica de rotores texturados

El estudio del comportamiento dinámico de ejes con superficies texturadas se aborda mediante una comparativa entre un eje liso y tres configuraciones de rotores con una, dos y cinco texturas superficiales, respectivamente, como se muestra en la Fig. 5.51. El objetivo de este análisis es evaluar si la incorporación de texturas en la superficie del rotor genera beneficios o perjuicios en términos de niveles de vibración y estabilidad del sistema rotor-cojinete. El estudio se divide en dos etapas: inicialmente se analiza el comportamiento bajo la hipótesis de rotor rígido y, posteriormente, se emplea el modelo de viga flexible previamente utilizado para determinar la incidencia de las texturas en la respuesta dinámica. Para realizar la comparativa, se adoptan los parámetros del rotor propuesto por Birembaut et al. [83], cuyas especificaciones geométricas se detallan en la Tabla 5.10 y la Fig. 5.28.

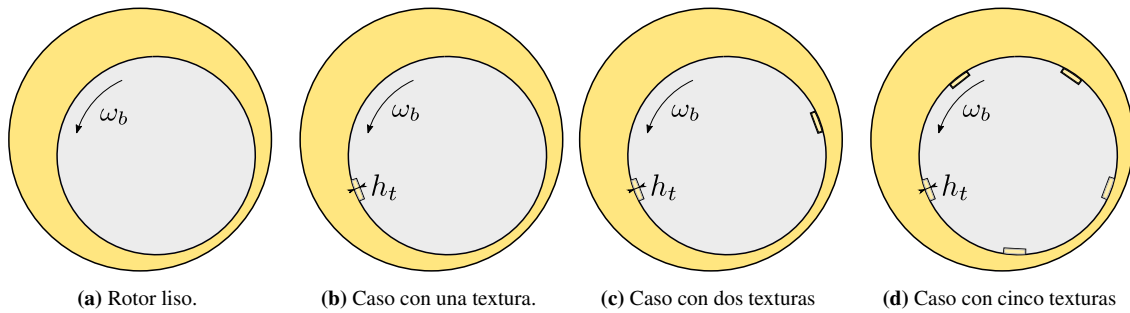


Figura 5.51: Configuraciones de rotores texturados utilizados.

5.4.1. Rotores texturados rígidos

Para simular el comportamiento rígido del eje, se utilizó el código rotorDynCav configurando un módulo elástico ficticio de 100 TPa. Dado que el estudio de superficies texturadas requiere un modelo de cavitación conservativo para predecir correctamente la presión, se empleó el modelo de Schnerr-Sauer implementado en el código acoplado. Se optó por un análisis isotérmico, considerando que el incremento de temperatura no incide significativamente en la frecuencia de vibración, que es el objetivo central de este estudio. Las texturas empleadas poseen una geometría cuadrada (SQ, Fig. 2.17a) con una longitud característica $r_t = 10$ mm y una profundidad $h_t = 50$ μ m.

Las simulaciones se realizaron a una velocidad angular constante de 1500 RPM (frecuencia sincrónica de 25 Hz) durante un intervalo de 0.5 s para asegurar un estado final estable. La Fig.

5.52 muestra la evolución temporal de la posición vertical del centro de masa del rotor en el plano del cojinete respecto a la posición concéntrica. Se observa que la presencia de texturas induce perturbaciones cíclicas en la posición de equilibrio, mientras que el rotor liso converge a un punto fijo, los rotores texturados presentan oscilaciones cuya frecuencia es proporcional al número de cavidades.

La Fig. 5.53 muestra el desplazamiento del centro de masa del rotor en el cojinete visto de frente considerando que se comienza desde una posición concéntrica. Dado que se mantiene la hipótesis de elementos rígidos, todo el largo del eje se desplaza la misma magnitud. Se observa la convergencia a un punto de equilibrio en el caso del rotor liso, mientras que para los casos texturados con una o dos cavidades existen oscilaciones alrededor de un punto, para el caso de 5 cavidades superficiales, la oscilación es de mucha mayor frecuencia y de mucha menor amplitud por lo que resulta más difícil de apreciar. Si se observa detenidamente, tanto la Fig. 5.52 como en la Fig. 5.53 muestran una pérdida de la capacidad portante del cojinete con la presencia de texturas. En términos de excentricidades relativas, para el caso liso se alcanza un valor de $\varepsilon = 0.546$, mientras que para los casos texturados este valor se incrementa: $\varepsilon = 0.56 \pm 0.04$ para el caso con 1 cavidad, $\varepsilon = 0.577 \pm 0.03$ para 2 cavidades, $\varepsilon = 0.622 \pm 0.01$ para el caso con 5 cavidades. Esto se traduce en que esta textura colocada no presenta una mejora respecto a la capacidad portante del eje, aún en condiciones isotérmicas.

Si se considera únicamente el período de tiempo de la Fig. 5.52 donde la oscilación es estable (entre 0.1 y 0.5 segundos) para los casos texturados y se aplica la Transformada Rápida de Fourier, se obtienen los espectros de vibración que se muestran en la Fig. 5.54. El caso de una única textura presenta una vibración sincrónica a 25 Hz, y otros picos similares en múltiplos de esta frecuencia. El caso del rotor con dos texturas superficiales presenta una amplitud mayor en los 50 Hz, directamente vinculada con la presencia de las dos cavidades y su paso por el huelgo mínimo como es la hipótesis de estudio. Finalmente, el caso con 5 texturas, presenta la máxima amplitud en la frecuencia de 125 Hz, correspondiente con el paso de las texturas en cada rotación del eje. En todos los casos, se encuentran amplitudes mucho menores a frecuencias que se corresponden con múltiplos de la frecuencia con la mayor amplitud.

El comportamiento observado en los rotores rígidos texturados permite postular que la perturbación periódica inducida por las cavidades superficiales podría anticipar la entrada en régimen de Oil Whip. En este sentido, la inestabilidad podría manifestarse a frecuencias de rotación inferiores al umbral teórico convencional de $\omega_b = 2\omega_n$ descrito para rotores lisos. Esta hipótesis sugiere que las frecuencias de vibración generadas por el paso de las texturas interactúa con la dinámica de la película de aceite, alterando los límites de estabilidad del sistema rotor-cojinete.

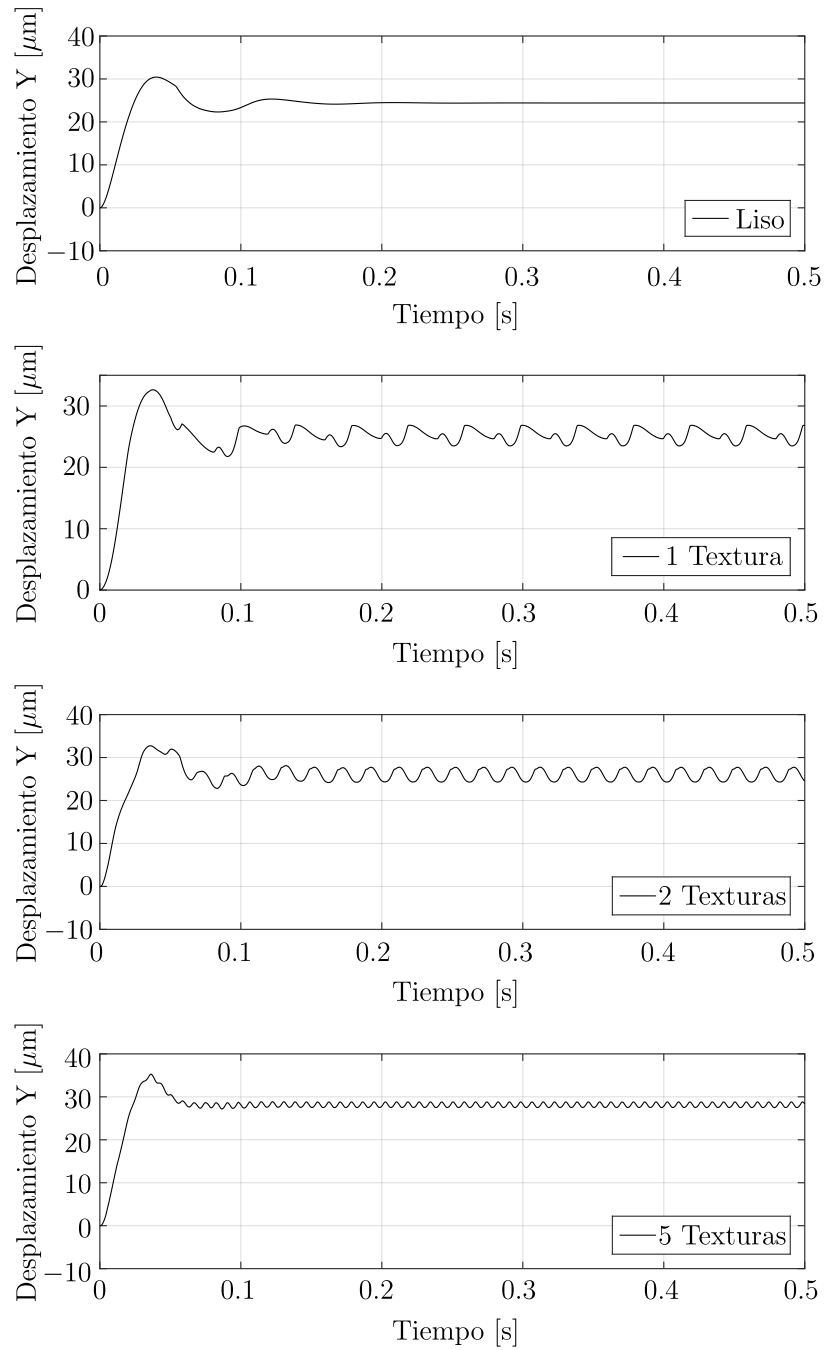


Figura 5.52: Variación del desplazamiento en el tiempo para los rotores simulados.

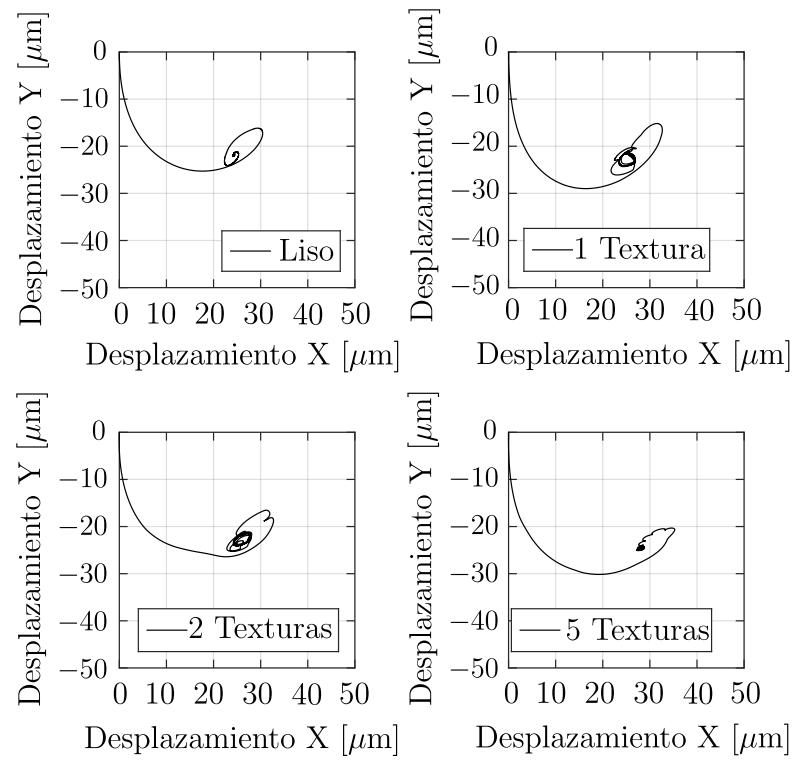


Figura 5.53: Trayectorias del centro de masa del eje en cada caso planteado.

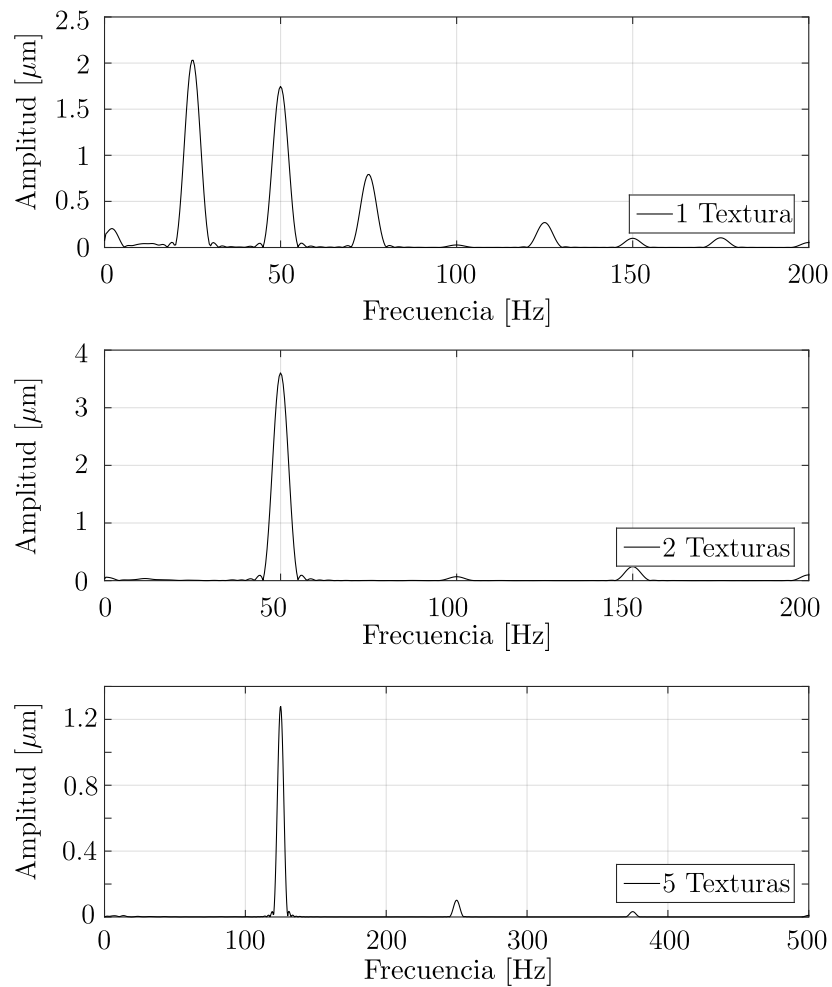


Figura 5.54: Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados.

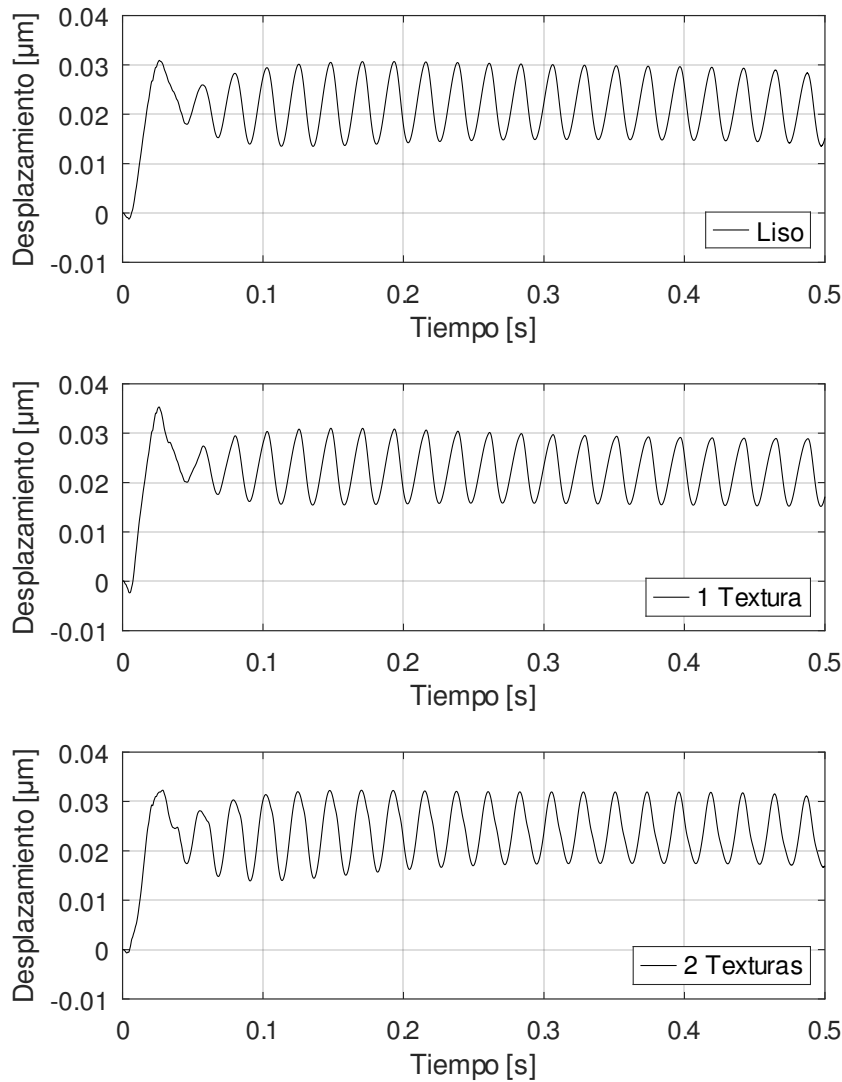


Figura 5.55: Respuesta temporal del desplazamiento vertical en el cojinete bajo condiciones de desbalanceo ($\omega = 2630$ RPM).

5.4.2. Rotores texturados elásticos

El análisis realizado anteriormente en las Secciones 5.3.4 y 5.3.5 evidencia que la frecuencia natural del rotor de Birembaut (Fig. 5.28) se sitúa en torno a las 2635 RPM (≈ 44 Hz). Con el fin de evaluar la influencia de las texturas superficiales en la respuesta dinámica de la viga flexible, se analiza el sistema operando a una velocidad crítica $\omega = \omega_n$ (2630 RPM), comparando la respuesta en presencia y ausencia del desbalanceo ($m_e = 2.4 \times 10^{-4}$ kg·m). Se evalúan tres configuraciones: rotor liso, con 1 textura y con 2 texturas.

La Fig. 5.55 muestra el desplazamiento vertical del muñón bajo una carga estática de 518 N y el momento de desbalanceo mencionado. En este régimen, la vibración debida al desbalanceo

domina la respuesta dinámica, por lo que no se aprecian diferencias sustanciales entre las tres configuraciones en el dominio del tiempo. Las órbitas resultantes (Fig. 5.56) confirman una precesión sincrónica estable alrededor del punto de equilibrio hidrodinámico para todos los casos.

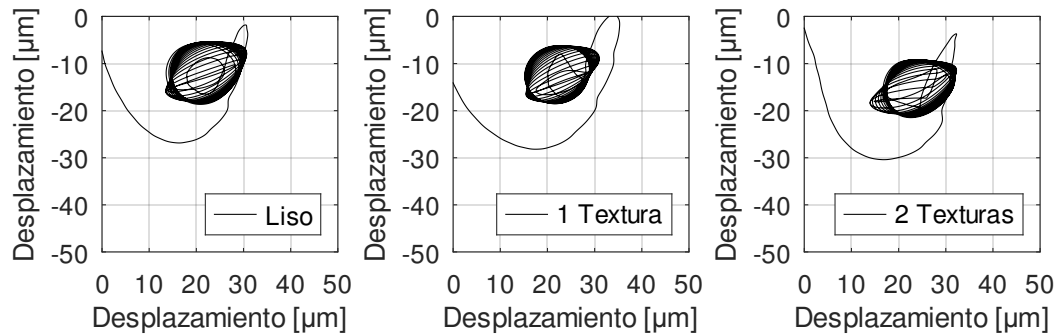


Figura 5.56: Trayectorias obtenidas para los rotores simulados en el cojinete.

Sin embargo, el análisis espectral (Fig. 5.57) revela matices importantes. Si bien la amplitud predominante corresponde a la frecuencia sincrónica ($1\times$), la presencia de texturas induce una leve redistribución de la energía. Se observa una sutil disminución en el pico de amplitud en la frecuencia natural a cambio de un incremento en la amplitud de los armónicos superiores, particularmente en la frecuencia de paso de textura ($2\times$ para el caso de dos texturas), lo cual es consistente con los resultados obtenidos en el modelo rígido.

Por otro lado, al realizar el análisis en ausencia de desbalanceo (Fig. 5.58), el comportamiento cambia radicalmente. En este escenario, la única fuente de excitación dinámica es la discontinuidad geométrica de las texturas. Las trayectorias resultantes (Fig. 5.59) muestran que en todos los casos el rotor tiende a converger a su posición de equilibrio. Como se observa en los espectros de la Fig. 5.60, las amplitudes de vibración en ausencia de desbalanceo son órdenes de magnitud inferiores, situándose en el rango de los nanómetros.

Esto demuestra que, aunque la textura genera una perturbación periódica detectable, su capacidad para excitar la flexión de la viga en condiciones de resonancia es limitada en comparación con fuerzas de desbalanceo convencionales, al menos en la situación de estudio planteada. No obstante, la persistencia de estas componentes armónicas confirma que la textura actúa como un generador de armónicos internos al cojinete.

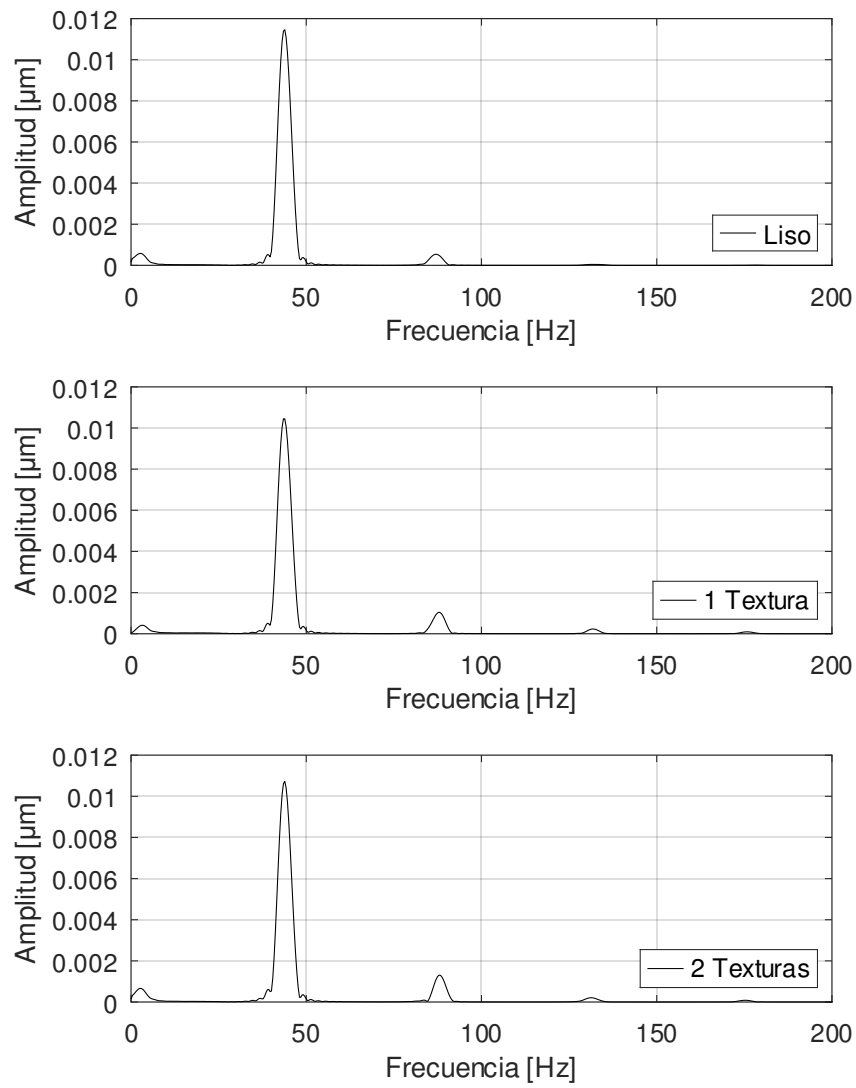


Figura 5.57: Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados en el cojinete.

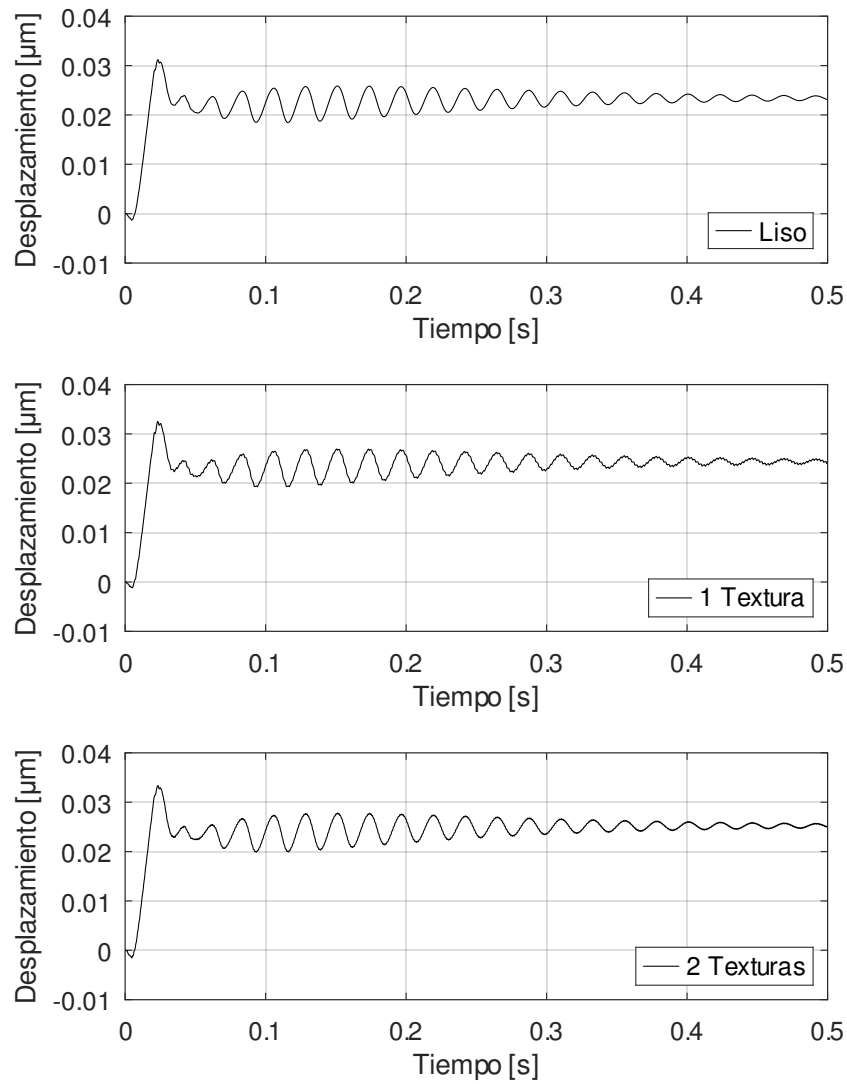


Figura 5.58: Desplazamiento vertical obtenido para los rotores simulados en el cojinete.

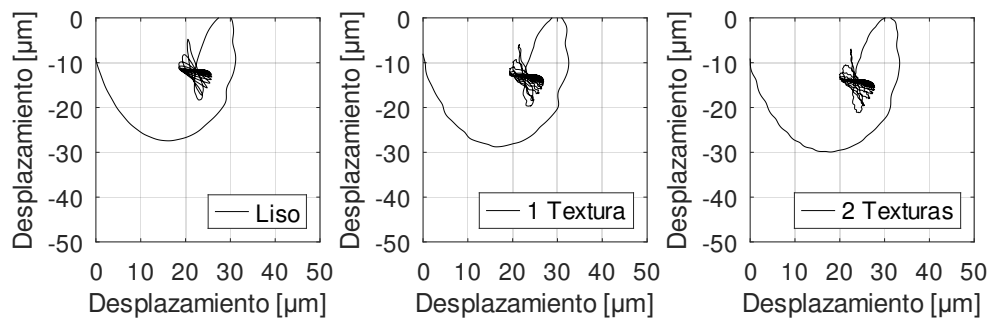


Figura 5.59: Trayectorias obtenidas para los rotores simulados en el cojinete.

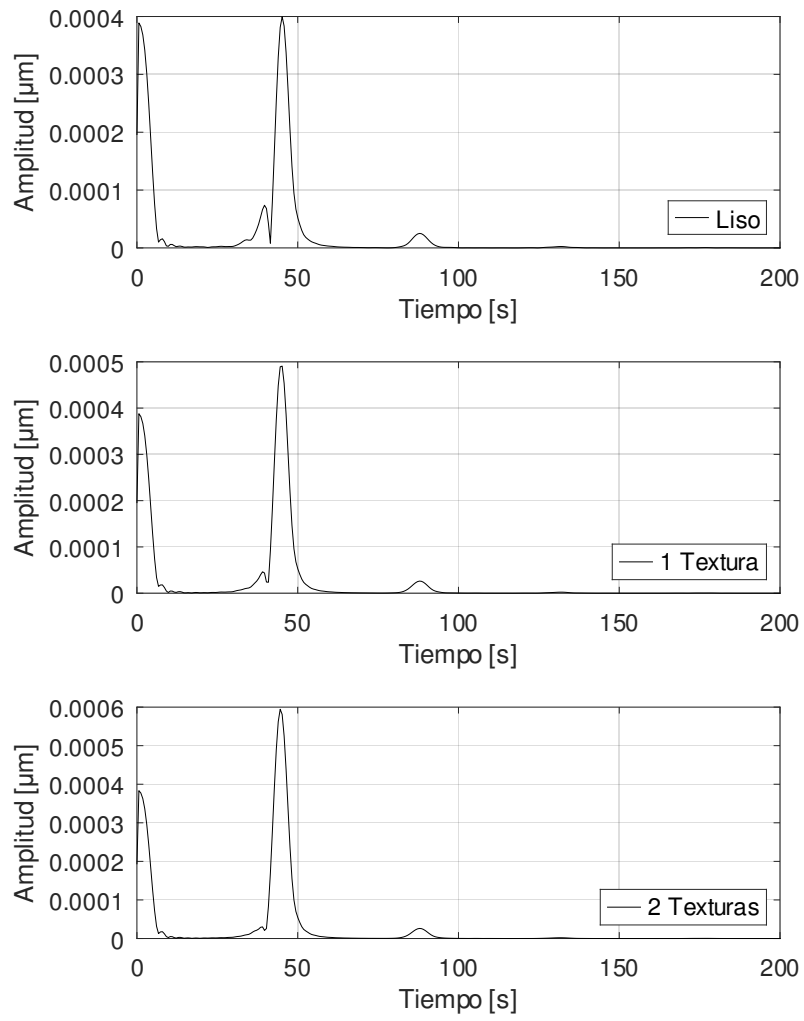


Figura 5.60: Espectro de vibración del desplazamiento para los rotores simulados en el cojinete.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

A modo de cierre, este capítulo presenta una síntesis de los conceptos y desarrollos abordados a lo largo de la presente tesis, destacando los aportes más significativos al campo de la lubricación hidrodinámica. Asimismo, se proponen diversas líneas de investigación derivadas de los hallazgos obtenidos, junto con una evaluación de las implementaciones numéricas que permitirán profundizar en el estudio de los fenómenos analizados.

6.1. Conclusiones de la tesis

A lo largo de este trabajo de tesis, se introducen los conceptos fundamentales de la mecánica de los fluidos y en particular de la lubricación hidrodinámica. Se hace un breve repaso del estado del arte en cuanto al estudio de los cojinetes hidrodinámicos, así como del uso de texturas superficiales, del análisis de la dinámica de ejes y de otros aspectos relacionados. Por otra parte, se describen las bases del Método de Volúmenes Finitos, del Método de Elementos Finitos, y del Método de Áreas Finitas, todos ellos necesarios para diferentes aplicaciones a lo largo del trabajo de tesis.

Como parte central del trabajo, se propone un modelo conservativo de dos fases formulado a partir de los primeros principios, que garantiza la conservación de la masa y la estabilidad numérica mediante un tratamiento especial de la derivada temporal de la densidad de la mezcla. El modelo propuesto puede describir la cavitación en fase vapor y gaseosa, así como la pseudocavitación, al considerar una ecuación de transporte para la fase primaria (líquido) que permite describir la distribución de las fases y su evolución a lo largo del tiempo. El modelo se ha elaborado considerando un flujo incompresible y basándose en una formulación de mezcla en la que las propiedades de la película lubricante se determinan de forma independiente, basándose en leyes específicas para la viscosidad y la densidad.

Se presentan las diferencias con respecto a modelos publicados anteriormente, como los de Zuber y Dougherty [60], Natsumeda y Someya [61], Snyder [7] o Jaramillo [69]. Se aplican métodos numéricos específicos con el objetivo de lograr una convergencia cuadrática y, en particular, se discute la aplicación de una división de tipo Strang para el acoplamiento adecuado de $p - \alpha$ con el fin de mantener el orden de convergencia. Cabe destacar que la investigación del orden de convergencia de los modelos numéricos utilizados en la resolución de cojinetes hidrodinámicos no suele abordarse en la bibliografía disponible. Esto se debe a menudo a que el uso de un método Upwind suele restringir la tasa de convergencia, lo que provoca que el error disminuya linealmente. Además, se utiliza un novedoso modelo de cavitación de gas, basado en la representación de la difusión de gas desde el líquido hacia el exterior en función del campo de presión y la concentración de gas disuelto. Este modelo permite tener en cuenta los tiempos característicos del fenómeno de difusión, un tema que no se había tratado por completo con anterioridad, tal y como se recoge en la bibliografía revisada.

Los modelos de cavitación presentados se prueban con casos de estudio propuestos en la bibliografía, logrando una muy buena concordancia. Los resultados experimentales de Jakobsson [68] permiten contrastar el perfil de presión obtenido para cojinetes hidrodinámicos sumergidos en los que se tienen en cuenta la cavitación gaseosa y la cavitación vaporosa. A su vez, los resultados numéricos de Snyder [7] y Jaramillo [69] permiten verificar el comportamiento del perfil de presión para la pseudocavitación. Se discuten los perfiles de presión obtenidos y la influencia que la región de cavitación ejerce sobre ellos. Se concluye que la advección de burbujas no es un factor fundamental en la forma del perfil de presión, tal y como informó Snyder. Sin embargo, dado que el fluido se suministra únicamente desde los laterales del cojinete, el gradiente de presión axial es decisivo para la capacidad de recuperar la película de fluido, tal y como informó Jakobsson. Por lo tanto, la presión de saturación del lubricante es el factor principal para caracterizar la región cavitada. La región cavitada se contrasta basándose en los resultados experimentales de Etsion [132], donde el solucionador numérico propuesto es capaz de capturar correctamente los puntos de entrada y salida de la burbuja de cavitación.

A estos resultados se suma la posibilidad de obtener resultados propios en el banco de pruebas que dispone el Laboratorio de Mecánica de los Fluidos de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, que permiten verificar los valores obtenidos por el código dynCav. Para la obtención de estos valores, se realizaron modificaciones al banco de pruebas de forma de adicionar sensores capaces de medir presiones por debajo de la presión atmosférica y así poder obtener valores de presión en la región de cavitación lo cual no es común de encontrar en la literatura. Por otra parte, se utilizan los resultados numéricos reportados por Jiang y Chang [77] para la validación de

la implementación del modelo para fluidos no-Newtonianos que cumplan con la ley de potencias para viscosidades. Los resultados obtenidos están en excelente acuerdo con los presentados en la literatura de referencia.

En cuanto al comportamiento dinámico del muñón, se comparan las posiciones de equilibrio obtenidas mediante el modelo de Snyder [7] y un caso dinámico con una fuerte variación de carga basado en el trabajo de Ausas [12], mostrando una respuesta excelente a situaciones donde la carga es aplicada de forma abrupta y disminuyendo los tiempos de computo en un orden de magnitud según los reportados en la literatura. También se presenta un estudio en condiciones de arranque a partir de aplicar los factores de flujo propuestos por Patir y Cheng [102] así como de un modelo de contacto de superficies rugosas [105]. Las trayectorias obtenidas validan al método propuesto en la aplicación de estos factores para el estudio de ejes que se encuentren en cercanías de la carcasa.

Por otro lado, con respecto al uso de superficies texturadas, el modelo propuesto se utiliza para calcular la capacidad de carga, el caudal de fuga y el par de fricción de cojinetes hidrodinámicos lisos y texturizados, teniendo en cuenta la influencia de la temperatura. La variación media de la temperatura del lubricante se calcula a partir del balance de los flujos de calor producidos por la disipación viscosa dentro de la película lubricante y el flujo de fuga en los lados del cojinete [8].

Se valida la aplicación de la teoría de la lubricación en cojinetes de deslizamiento texturizados comparando los resultados obtenidos mediante el solucionador `interPhaseChangeFoam` disponible en el software OpenFOAM® con las simulaciones numéricas realizadas por Manser et al. [74]. Esta comparación demostró una buena concordancia entre la mecánica del flujo de película completa isotérmica e incompresible obtenida mediante análisis CFD y el modelo propuesto basado en la ecuación de Reynolds. Esta verificación no es habitual en la bibliografía sobre cojinetes hidrodinámicos texturizados.

Además, se lleva a cabo una validación experimental de los modelos propuestos, un paso crítico dada la escasez de datos experimentales sobre cojinetes texturizados en la bibliografía. Para ello, se utilizan los resultados recientes de Profito et al. [73]. Los valores del coeficiente de fricción (COF) obtenidos con los códigos `dynCav` y `dynCavFlow` muestran una excelente concordancia con las mediciones experimentales tanto para cojinetes lisos como texturados. Esta validación se confirma además comparando las temperaturas predichas numéricamente con las medidas en el mismo trabajo experimental.

Se propone un caso particular con texturas triangulares en la superficie de la carcasa para analizar el comportamiento de la película lubricante en función de la excentricidad y la velocidad de rotación. Se observa que, aunque a bajas excentricidades se produce un aumento de la capacidad de carga y una disminución de la temperatura del lubricante en comparación con el caso liso,

a medida que aumenta la excentricidad, la introducción de texturas resulta perjudicial para la película lubricante en los casos concretos estudiados. Como se suele indicar en la bibliografía, al considerar un modelo isotérmico, el par de fricción en el caso texturizado es mayor que en el caso liso, lo que puede provocar un aumento de la temperatura. La inclusión de los efectos térmicos da lugar a diferencias significativas en la capacidad de carga del cojinete hidrodinámico, que no pueden ignorarse al utilizar texturas. La interacción entre la fricción, la temperatura y la viscosidad crea un efecto que no puede extrapolarse a partir de los parámetros analizados considerando un fluido isotérmico. Esto subraya la importancia de tener en cuenta estos factores en el diseño y análisis de cojinetes texturizados para aplicaciones prácticas.

Se realiza por su parte, un breve estudio de optimización de texturas mediante un algoritmo implementado en Python que se acopla con el resolutor dynCavFlow implementado en Open-FOAM. El análisis automatizado busca distribuir las texturas de forma de lograr un incremento en la capacidad portante del cojinete evaluando que la fricción generada por la superficie texturada no genere un incremento de temperatura capaz de terminar generando un perjuicio a la capacidad de carga.

Como parte de la última instancia, se analiza el comportamiento dinámico de ejes flexibles. Se validan los resultados tanto de trayectoria, como de frecuencias y amplitudes de vibración obtenidos mediante el resolutor rotorDynCav que emplea el Método de Elementos Finitos para la resolución de la viga elástica soportada por cojinetes. Los resultados experimentales utilizados como referencia son los reportados por Birembaut [83] para el caso de un rotor con 3 discos que favorecen la aparición de efectos giroscópicos y una masa de desbalanceo en el disco central que induce la perturbación. Del análisis de los resultados, se obtienen los espectros de vibración y las cascadas de frecuencias que muestran una excelente concordancia con los resultados de referencia y otros análisis disponibles en la literatura como los de Ma [42] o de Castro [86].

Además, la herramienta desarrollada para el análisis de la rotodinámica se contrasta contra múltiples casos simulados en el software SAMCEF® de forma de comprobar su robustez ante otras condiciones de funcionamiento. Los resultados obtenidos muestran que la herramienta es capaz de representar la física de rotores ante la multiplicidad de casos propuestos.

Finalmente, se analiza el impacto de la perturbación inducida por el paso de las texturas a través del huelgo mínimo del cojinete. Se contrastó el comportamiento dinámico de ejes lisos y texturados mediante el estudio de sus trayectorias y espectros de frecuencia bajo diversas condiciones operativas. En particular, se evaluó la respuesta del sistema en su frecuencia natural para determinar si la excitación hidrodinámica de las texturas es comparable, en términos de severidad vibratoria, a la producida por un desbalanceo residual. Los resultados permiten concluir que, si

bien se verifica la aparición de componentes sincrónicas y armónicas vinculadas a la geometría de las cavidades, su amplitud no resulta lo suficientemente significativa como para comprometer la estabilidad o generar efectos de magnitud similar a los del desbalanceo convencional, al menos para los parámetros y el caso de estudio considerados en este trabajo.

6.2. Trabajo futuro

Basado en la robustez y la confiabilidad del modelo propuesto así como de los códigos numéricos implementados, como trabajo futuro de esta tesis se plantean las siguientes líneas:

- Generar una base de datos a partir de los resultados experimentales obtenidos en el banco de pruebas de cojinetes modificando la dirección de la carga de forma de poder mejorar la apreciación del perfil y caracterizar correctamente el punto de entrada en la región de cavitación.
- Implementar un modelo térmico local (no global) en el resolutor dynCavFlow. Esto permitiría resolver la ecuación de energía punto a punto para capturar gradientes térmicos tridimensionales en la película, fundamentales para entender el comportamiento del fluido cerca de texturas individuales.
- Ampliar la herramienta de optimización evolutiva actual (que maximiza la capacidad de carga) para incluir la minimización del torque de fricción y la temperatura máxima como objetivos contrapuestos.
- Realizar un estudio sistemático del transitorio inicial, evaluando si el texturizado reduce el desgaste durante los regímenes de lubricación mixta y límite antes de que se establezca la película hidrodinámica completa.
- Extender las ecuaciones de Reynolds bifásicas para incluir términos de aceleración convectiva en casos donde el número de Reynolds local dentro de las texturas sea significativo, permitiendo el estudio de la turbulencia y su impacto en la carga portante.
- Integrar un modelo de lubricación elastohidrodinámica que contemple la deformación de las superficies de la carcasa y el muñón bajo altas presiones, evaluando cómo estas deformaciones interactúan con la geometría de las texturas.
- Utilizar los coeficientes elásticos y de amortiguamiento obtenidos de forma numérica para cojinetes de longitud real para analizar simulando mecanismos más complejos mediante cadenas cinemáticas.

Bibliografía

- [1] A. Szeri. *Fluid film lubrication, 2nd edition*. Cambridge University Press, 2011.
- [2] O. Pinkus. *Thermal aspects of fluid film tribology*. ASME Press, 1990. ISBN 9780791800119.
- [3] B.J. Hamrock. *Fundamentals of fluid film lubrication*. McGraw-Hill, 1994.
- [4] M.M. Khonsari y Booser E.R. *Applied tribology: bearing design and lubrication, 3rd edition*. John Wiley & Sons Ltd, 2017.
- [5] R.G. Budynas y J.K. Nisbett. *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. McGraw-Hill, 2012.
- [6] R. Norton. *Diseño de Máquinas: Un enfoque integrado*. Prentice Hall, México, 2011.
- [7] M. Braun, K. Pierson, y T. Snyder. Two-way coupled Reynolds, Rayleigh-Plesset-Scriven and energy equations for fully transient cavitation and heat transfer modeling. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 174:012030, 02 2017.
- [8] N. Tala-Ighil y M. Fillon. A numerical investigation of both thermal and texturing surface effects on the journal bearings static characteristics. *Tribology International*, 90:228–239, 2015. ISSN 0301-679X.
- [9] A. Muszynska. Stability of whirl and whip in rotor/bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1):49–64, 1988. ISSN 0022-460X.
- [10] Dara Childs. *Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis*. John Wiley & Sons, 1993.
- [11] R.F. Ausas, P. Ragot, J. Leiva, M. Jai, G. Bayada, y G. Buscaglia. The impact of the cavitation model in the analysis of microtextured lubricated journal bearings. *Transactions of the ASME*, 129: 868–875, 2007.
- [12] R.F. Ausas, M. Jai, y G. Buscaglia. A mass-conserving algorithm for dynamical lubrication problems with cavitation. *Journal of Tribology-transactions of the ASME*, 131, 01 2009.
- [13] D.M. Smith. *Journal Bearings in Turbomachinery*. Chapman and Hall, 1969.
- [14] W. Miranda y M. Faria. Finite element method applied to the eigenvalue analysis of flexible rotors supported by journal bearings. *Engineering*, 6:127–137, 03 2014.
- [15] F. Concli. Pressure distribution in small hydrodynamic journal bearings considering cavitation: a numerical approach based on the open-source CFD code OpenFOAM®. *Lubrication Science*, 28: 329–347, 2016.
- [16] G. Miranda. *The Detection of Journal Bearing Cavitation with Use of Ultrasound Technology*. PhD thesis, Case Western Reserve University, 2016.

- [17] M.J. Braun y W.M. Hannon. Cavitation formation and modelling for fluid film bearings: a review. *Engineering Tribology*, 224:839–863, 2010.
- [18] L. San Andrés. *Liquid cavitation in fluid film bearings. Class notes on Modern Lubrication*. College Station (TX): Texas A&M University, 2009.
- [19] R. Byron Bird, Warren E. Stewart, y Edwin N. Lightfoot. *Fenómenos de transporte*. Reverte, Barcelona, 1975.
- [20] Reynolds. On the theory of lubrication and its application to mr. beachuamp tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philos. Trans. R. Soc. A.*, 177: 157, 1886.
- [21] A. Sommerfeld. Zur hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung. *Zeit Math. Phys.*, 50:97–155, 1904.
- [22] F.W. Ocvirk. Short-bearing approximation for full journal bearings. *Cornell University*, 10, 1952.
- [23] G.G. Vignolo. *Estudio teórico-experimental de cojinetes hidrodinámicos en condiciones reales de uso*. PhD thesis, Universidad Nacional del Sur, 2016.
- [24] H.G. Elrod y M.L. Adams. A computer program for cavitation and starvation problems. *First Leeds Lyon Symposium on Cavitation and related phenomena in lubrication*, 1(103):37–41, 1974.
- [25] M. Riedel, M. Schmidt, P. Reinke, y M. Nobis, M. Redlich. Application of computational fluid dynamics on cavitation in journal bearings. *EPJ Web of Conferences*, 67:1–8, 2014.
- [26] M. Geller, C. Schemmann, y N. Kluck. Simulation of radial journal bearings using the FSI approach and a multi-phase model with integrated cavitation. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 14: 14, 2014.
- [27] D. Gropper, L. Wang, y T.J. Harvey. Hydrodynamic lubrication of textured surfaces: A review of modeling techniques and key findings. *Tribology International*, 94:509–529, 2016.
- [28] M. Muchammad, T. Mohammad, R. Yusuf Muhammad, S. Imam, M. Farikha, y A. Muhammad Imam. Elastohydrodynamic analysis of multistep texture effects and partial surface roughness on the tribological performance of steel journal bearings. *Discover Applied Sciences*, 2025.
- [29] Hongtao Wang, Wenbo Bie, Shaolin Zhang, y Tengfei Liu. Theoretical and experimental study of friction characteristics of textured journal bearing. *Micromachines*, 14(3), 2023.
- [30] Mahdi Zare Mehrjardi, Abolfazl Rasoolizadeh Shooroki, Mehran Rabani, y Mehrdad Rabani. Effect of surface texture depth with various geometric shapes on the steady-state performance and dynamic stability of noncircular lobed journal bearings. *Applied Sciences*, 15(8), 2025.
- [31] B. Manser, I. Belaidi, A. Hamrani, S. Khelladi, y F. Bakir. Performance of hydrodynamic journal bearing under the combined influence of textured surface and journal misalignment: A numerical survey. *Comptes Rendus Mecanique*, 347:141–165, 2019.
- [32] Q. Lin, Q. Bao, K. Li, M. Khonsari, y H. Zhao. An investigation into the transient behavior of journal bearing with surface texture based on the fluid-structure interaction approach. *Tribology International*, 118:246–255, 2018.
- [33] L.F. Dos Anjos, A. Jaramillo, G. Buscaglia, y R. Nicoletti. Improving the load capacity of journal bearings with chevron textures on the shaft surface. *Tribology International*, 185:108561, 2023.

- [34] A. Rajput y S. Sharma. Combined influence of geometric imperfections and misalignment of journal on the performance of four pocket hybrid journal bearing. *Tribology International*, 97:59–70, 2016. ISSN 0301-679X.
- [35] Zeljko Tukovic y Hrvoje Jasak. Simulation of free-rising bubble with soluble surfactant using moving mesh finite volume/area method. En *Proceedings of 6th International Conference on CFD in Oil & Gas, Metallurgical and Process Industries*, no. CFD08-072, 2008.
- [36] C.E. Merelli, D.O. Barilá, G.G. Vignolo, y L.M. Quinzani. Dynamic coefficients of finite length journal bearing. evaluation using a regular perturbation method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 151:251–262, 2018.
- [37] C.E. Merelli. *Cojinetes Hidrodinámicos en condiciones reales de uso. Estudio teórico y validación experimental*. Universidad Nacional del Sur, 2020.
- [38] X. Zhang, Z. Yin, G. Gao, y Z. Li. Determination of stiffness coefficients of hydrodynamic water-lubricated plain journal bearings. *Tribology International*, 85:37–47, 2015.
- [39] Michael Friswell, John Penny, Seamus Garvey, y Arthur Lees. *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press, 01 2010. ISBN 9780521850162. doi: 10.1017/CBO9780511780509.
- [40] A. Muszynska. Whirl and whip rotor/bearing stability problems. *Journal of Sound and Vibration*, 110(3):443–462, 1986. ISSN 0022-460X.
- [41] T.A. El-Sayed, Michael I. Friswell, y Hussein Sayed. Approximating fluid bearing characteristics using polynomials for the nonlinear dynamics of rotating machines. *Tribology International*, 187: 108669, 2023. ISSN 0301-679X.
- [42] Hui Ma, Hui Li, Heqiang Niu, Rongze Song, y Bangchun Wen. Numerical and experimental analysis of the first-and second-mode instability in a rotor-bearing system. *Archive of Applied Mechanics*, 84, 03 2014. doi: 10.1007/s00419-013-0815-9.
- [43] F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish, F. Moukalled, L. Mangani, y M. Darwish. *The Finite Volume Method*. Springer, 2016.
- [44] SAMCEF. Mecano v13 user manual. *Samtech SA*, 2007.
- [45] J. Halling. *Principles of Tribology*. Macmillan, 1975. ISBN 9780333154960. URL <https://books.google.com.ar/books?id=ENhQAAAYAAJ>.
- [46] L. S. Dake, J. A. Russell, y D. C. Debrodt. A review of doe ecut tribology surveys. *Journal of Tribology*, 108(4):497–501, 10 1986. ISSN 0742-4787. doi: 10.1115/1.3261252.
- [47] K. Holmberg y A. Erdemir. Influence of tribology on global energy consumption, costs and emissions. *Friction*, 2017.
- [48] Qian Wang y Dong Zhu. *Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication*. CRC Press, 12 2019. ISBN 9780429131011. doi: 10.1201/9780429131011.
- [49] NP Petrov. Friction in machines and the effect of the lubricant. *Inzh. Zh., St-Peterb.*, 1883.
- [50] Beauchamp Tower. First report on friction experiments. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 35(1):29–35, 1884. doi: 10.1243/PIME\PROC\1884\035\013\02.
- [51] O. Pinkus. The reynolds centennial: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrication. *Journal of Tribology*, 109(1):2–15, 01 1987. ISSN 0742-4787. doi: 10.1115/1.3261322. URL

<https://doi.org/10.1115/1.3261322>.

- [52] Christopher J. Seeton. Viscosity–temperature correlation for liquids. *Tribology Letters*, 22:67–78, 2006. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:97897211>.
- [53] Hans Vogel. Das temperaturabhängigkeitsgesetz der viskositat von flussigkeiten. *Phys. Z.*, 22:645–646, 1921.
- [54] L. Galda, J. Sep, A. Olszewski, y T. Zochowsky. Experimental investigation into surface texture effect on journal bearings performance. *Tribology International*, 136:372–384, 2019.
- [55] L Gümbel. Das problem der lagerreibung. *Mbl. Berlin. Bez. Ver. dtsch. Ing*, 5:87–104, 1914.
- [56] H.W. Swift. The stability of lubricating films in journal bearings. *Proc. Inst. Civil. Engrns*, 233:267–288, 1932.
- [57] W. Stieber. *Das Schwimmlager: Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers*. VDI-Verlag, 1933.
- [58] H.G. Elrod. A cavitation algorithm. *Transactions of the ASME*, 103:350–354, 1981.
- [59] D. Vijayaraghavan y T.G. Keith. Development and evaluation of cavitation algorithm. *Tribology Transactions*, 32:225–233, 1989.
- [60] N. Zuber y D. E. Dougherty. The field equations for two-phase Reynolds film flow with a change of phase. *ASLE Transactions*, 25(1):108–116, 1982.
- [61] S. Natsumeda y T. Someya. Paper III(ii) negative pressures in statically and dynamically loaded journal bearings. *Tribology Series*, 11:65–72, 1987. ISSN 0167-8922.
- [62] R.F. Kunz, D.A. Boger, D.R. Stinebring, T.S. Chyczewski, J.W. Lindau, H.J. Gibeling, S. Venkateswaran, y T.R. Govindan. A preconditioned Navier-Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction. *Computers & Fluids*, 29:849–875, 2000.
- [63] C. Merkle, J. Feng, y P. Buelow. Computational modeling of the dynamics of sheet cavitation. *Third International Symposium on Cavitation*, 1998.
- [64] J. Sauer y G. Schnerr. Physical and numerical modeling of unsteady cavitation dynamics. *4th International Conference on Multiphase Flow*, 2001.
- [65] *Assessment of Cavitation Models in the Prediction of Cavitation in Nozzle Flow*, volumen Volume 2: Development and Applications in Computational Fluid Dynamics; Industrial and Environmental Applications of Fluid Mechanics; Fluid Measurement and Instrumentation; Cavitation and Phase Change de *Fluids Engineering Division Summer Meeting*, 07 2018.
- [66] J. Palavecino, F. Cavalieri, y S. Márquez Damián. Evaluación de herramientas numéricas para el estudio de la cavitación en cojinetes hidrodinámicos texturados. *Mecánica Computacional*, XXXVIII (23):895–904, 2021.
- [67] M. Riedel, M. Schmidt, y P. Stücke. Numerical investigation of cavitation flow in journal bearing geometry. *EPJ Web of Conference*, 45:1–4, 2013.
- [68] B. Jakobson y L. Floberg. *The finite Journal Bearing, considering vaporization*. Chalmers Univ. Technology, 1957.
- [69] A. Jaramillo y A. Buscaglia. A stable numerical strategy for reynolds-rayleigh-plesset coupling. *Tribology International*, 130:191–205, 2019.
- [70] D. B. Hamilton, J. A. Walowit, y C. M. Allen. A theory of lubrication by microirregularities. *Journal*

- of Basic Engineering*, 88(1):177–185, 03 1966.
- [71] Fredrik Sahlin, Sergei B. Glavatskih, Torbjörn Almqvist, y Roland Larsson. Two-dimensional CFD-analysis of micro-patterned surfaces in hydrodynamic lubrication . *Journal of Tribology*, 127(1): 96–102, 02 2005.
 - [72] N. Tala-Ighil, P. Maspeyrot, Fillonm M., y A. Bounif. Effects of surface texture on journal-bearing characteristics under steady-state operating conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 221(6):623–633, 2007.
 - [73] F.J. Profito, S.C. Vladescu, T. Reddyhoff, y D. Dini. Numerical and experimental investigation of textured journal bearings for friction reduction. *Tribology International*, 195:109643, 2024. ISSN 0301-679X.
 - [74] B. Manser, I. Belaidi, A. Hamrani, S. Khelladi, y F. Bakir. Texture shape effects on hydrodynamic journal bearing performances using mass-conserving numerical approach. *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces*, 14:33–50, 2019.
 - [75] Saurabh Kango y Rajesh Sharma. Studies on the influence of positive roughness on the performance of journal bearing. *Journal of Tribology and Surface Engineering*, 1:243–262, 05 2010.
 - [76] Christos Papadopoulos, Lambros Kaiktsis, y Michel Fillon. Computational fluid dynamics thermohydrodynamic analysis of three-dimensional sector-pad thrust bearings with rectangular dimples. *Journal of Tribology*, 136, 01 2014.
 - [77] S. Jiang, H. Ji, D. Feng, Q. Li, S. Wu, y Z. Chen. Analysis and optimisation of grooved parallel slider bearings with cavitation. *Meccanica*, 55:1379–1391, 2020.
 - [78] I. Filgueira Filho, A. Bottene, E. Silva, y R. Nicoletti. Static behavior of plain journal bearings with textured journal - Experimental analysis. *Tribology International*, 159:106970, 2021.
 - [79] Abdurrahim Dal, Mahir Şahin, y Mustafa Kılıç. A thermohydrodynamic performance analysis of a fluid film bearing considering with geometrical parameters. *Journal of Thermal Engineering*, 9(6): 1604–1617, 2023.
 - [80] Mohammad Tauviqirrahman, Eflita Yohana, Paryanto, Jamari, Fauzan Syukri Muslim, y Paulus Wisnu Anggoro. Investigation on acoustic, thermal, and tribological properties of hydrodynamic journal bearing with heterogeneous rough/smooth surface. *Results in Engineering*, 18:101112, 2023. ISSN 2590-1230.
 - [81] Mahdi Zare Mehrjardi, Abolfazl Rasoolizadeh Shooroki, Mehran Rabani, y Mehrdad Rabani. Effect of surface texture depth with various geometric shapes on the steady-state performance and dynamic stability of noncircular lobed journal bearings. *Applied Sciences*, 15(8), 2025. ISSN 2076-3417.
 - [82] Hanqian Kong, Chunxing Gu, Di Zhang, y Lanfei Wu. Topology optimization of textured journal bearings. *Lubricants*, 13(6), 2025. ISSN 2075-4442.
 - [83] Y. Birembaut y J. Peigney. Prediction of dynamic properties of rotor supported by hydrodynamic bearings using the finite element method. *Computers & Structures*, 12(4):483–496, 1980. ISSN 0045-7949.
 - [84] Kazi Sher Ahmed y Sarvat Mushtaq Ahmad. Vibronrotor, an opensource rotordynamic code: Development and benchmarking. *Measurement*, 131:546–558, 2019. ISSN 0263-2241.

- [85] M.I. Friswell, S.D. Garvey, J.E.T. Penny, y M.G. Smart. Computing critical speeds for rotating machines with speed dependent bearing properties. *Journal of Sound and Vibration*, 213(1):139–158, 1998. ISSN 0022-460X. doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1503>.
- [86] Helio Fiori de Castro, Katia Lucchesi Cavalca, y Rainer Nordmann. Whirl and whip instabilities in rotor-bearing system considering a nonlinear force model. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1): 273–293, 2008. ISSN 0022-460X.
- [87] Ashish Srivastava y Faisal Rahmani. Effect of surface texturing on the dynamic characteristics of hydrodynamic journal bearings. *Journal of Tribology*, 147(12):124103, 08 2025.
- [88] O. Pinkus y Sternlicht B. *Theory of hydrodynamic lubrication*. Mc-Graw Hill, 1961.
- [89] P.R. Trumpler. *Design of film bearings*. Macmillan, 1966.
- [90] Luis San Andrés. Modern lubrication theory. Lecture notes, Texas A&M University, 2010. URL <http://oaktrust.library.tamu.edu/handle/1969.1/93197>. Accessed: 2025-12.
- [91] R. G. Kirk y E. J. Gunter. Short bearing analysis applied to rotor dynamics—part 2: Results of journal bearing response. *Journal of Lubrication Technology*, 98(2):319–329, 04 1976. ISSN 0022-2305. doi: 10.1115/1.3452838. URL <https://doi.org/10.1115/1.3452838>.
- [92] S. Dyk, J. Rendl, M. Byrtus, y L. Smolík. Dynamic coefficients and stability analysis of finite-length journal bearings considering approximate analytical solutions of the reynolds equation. *Tribology International*, 130:229–244, 02 2019. doi: 10.1016/j.triboint.2018.09.011.
- [93] Luboš Smolík, Jan Rendl, Milan Omasta, Miroslav Byrtus, Petr Šperka, Pavel Polach, Martin Hartl, y Michal Hajžman. Comprehensive analysis of fluid-film instability in journal bearings with mechanically indented textures. *Journal of Sound and Vibration*, 546:117454, 2023.
- [94] S. Márquez Damián y N. Nigro. An extended mixture model for the simultaneous treatment of small-scale and large-scale interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 75 (8):547–574, 2014.
- [95] B. Jakobson. A survey of swedish lubrication research 1957–69 at Chalmers and Lund technical universities. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, 183 (16):164–171, 1968.
- [96] J. Palavecino, F. Cavalieri, y S. Márquez Damián. A second-order in time and space model to solve the coupled Reynolds–Rayleigh–Plesset equations for the dynamics of cavitated hydrodynamic journal bearings. *Tribology International*, 192:109206, 2024. ISSN 0301-679X.
- [97] C.E. Brennen. *Cavitation and Bubble Dynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [98] Y. Liu, Jianhua Wm, y Decheng W. Numerical simulations of cavitation flows around clark-y hydrofoil. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 7(08):1660, 2019.
- [99] J.P. Franc. *The Rayleigh-Plesset equation: a simple and powerful tool to understand various aspects of cavitation*, páginas 1–41. Springer Vienna, 2007.
- [100] J. Zhou, A. Vacca, y B. Manhartgruber. A Novel Approach for the Prediction of Dynamic Features of Air Release and Absorption in Hydraulic Oils. *Journal of Fluids Engineering*, 135(9):091305, 07 2013.
- [101] Muchammad Muchammad, Tauviqirrahman Mohammad, Rizki Yusuf Muhammad, Syafaat Imam,

- Maharani Farikha, y Ammarullah Muhammad Imam. Elastohydrodynamic analysis of multistep texture effects and partial surface roughness on the tribological performance of steel journal bearings. *Discover Applied Sciences*, 7, 2025.
- [102] Nadir Patir y H. S. Cheng. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Journal of Lubrication Technology*, 100(1):12–17, 01 1978. ISSN 0022-2305. doi: 10.1115/1.3453103.
- [103] Nadir Patir y H. S. Cheng. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 101(2):220–229, 04 1979. ISSN 0022-2305. doi: 10.1115/1.3453329.
- [104] N. Patir. A numerical procedure for random generation of rough surfaces. *Wear*, 47(2):263–277, 1978. ISSN 0043-1648.
- [105] J. A. Greenwood y J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442):300–319, 12 1966. ISSN 0080-4630.
- [106] James A Greenwood y John H Tripp. The contact of two nominally flat rough surfaces. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 185(1):625–633, 1970.
- [107] A. Pantokratoras. Classical plane couette flow with viscous dissipation and variable fluid properties. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 21(2):437–442, 2007.
- [108] Rui Magno. Aplicação da transformada integral generalizada em mancais radiais operando com fluidos não-newtonianos tipo lei da potência. *Universidade Federal do Pará*, página 145, 2016.
- [109] Christopher Greenshields y Henry Weller. *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*. CFD Direct Ltd, Reading, UK, 2022.
- [110] S. Márquez Damián. *An Extended Mixture Model for the Simultaneous Treatment of Short and Long Scale Interfaces*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, 03 2013.
- [111] H. Jasak. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- [112] R. Courant, K.O. Friedrichs, y H. Lewy. über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [113] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 01 2007. doi: 10.1016/B978-0-7506-6594-0.X5037-1.
- [114] S.K. Godunov. *Dissertation: Different Methods for Shock Waves*. PhD thesis, Moscow State University, 1954.
- [115] S. K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *translated US Joint Publ. Res. Service*, páginas 271–306, 1959.
- [116] Peter K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21:995–1011, 1984.
- [117] R. LeVeque. *Finite Volume Methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathe-

- matics. Cambridge University Press, 2002.
- [118] J. Gimenez, H. Aguerre, S. Idelsohn, y N. Nigro. A second-order in time and space particle-based method to solve flow problems on arbitrary meshes. *Journal of Computational Physics*, 11 2018.
 - [119] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM journal on numerical analysis*, 5(3):506–517, 1968.
 - [120] M. Rauter y Ž. Tuković. A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces. *Computers & Fluids*, 166:184–199, 2018. ISSN 0045-7930.
 - [121] J.W. Lund. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. *Journal of tribology*, 109:37–41, 1987.
 - [122] J. W. Lund. The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible, damped supports. *Journal of Applied Mechanics*, 32(4):911–920, 12 1965. doi: 10.1115/1.3627335.
 - [123] M.L. Adams. *Rotating Machinery Vibration: from analysis to troubleshooting*. CRC Press, Taylor & Francis, 2010.
 - [124] H.H. Jeffcott. Xxvii. the lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed — the effect of want of balance. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 37(219):304–314, 1919.
 - [125] R. L. Ruhl y J. F. Booker. A finite element model for distributed parameter turborotor systems. *Journal of Engineering for Industry*, 94(1):126–132, 02 1972.
 - [126] H. D. Nelson y J. M. McVaugh. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2):593–600, 05 1976.
 - [127] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation, 2009.
 - [128] E. Oñate. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis elástico lineal*. Springer, 1992.
 - [129] R.L. Taylor O.C. Zienkiewicz y David Fo. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2014.
 - [130] H.F. de Castro. *Análise de mancais hidrodinâmicos em rotores sob instabilidade fluido-induzida*. PhD thesis, University of Campinas, 2007.
 - [131] B. Jakobson y L. Floberg. The finite journal bearing, considering vaporization: (das gleitlager von endlicher breite mit verdampfung). *Chalmers Tekniska Högskolas Handlingar*, 1957.
 - [132] I. Etsion y L. Burstein. A model for mechanical seals with regular microsurface structure. *Tribology Transactions*, 39:677–683, 1996.
 - [133] Jang Jiin-Yuh y Chang Chong-Ching. Adiabatic analysis of finite width journal bearings with non-newtonian lubricants. *Wear*, 122(1):63–75, 1988. ISSN 0043-1648. doi: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(88\)90007-5](https://doi.org/10.1016/0043-1648(88)90007-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0043164888900075>.
 - [134] S.C. Vladescu, M.Fowell, L.Mattsson, y T. Reddyhoff. The effects of laser surface texture applied to internal combustion engine journal bearing shells – an experimental study. *Tribology International*, 134:317–327, 2019. ISSN 0301-679X.

- [135] S. Cui, L. Gu, M. Fillon, L. Wang, y C. Zhang. The effects of surface roughness on the transient characteristics of hydrodynamic cylindrical bearings during startup. *Tribology International*, 128: 421–428, 2018. ISSN 0301-679X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.06.010>.
- [136] F.J. Calavallieri y A. Cardona. An augmented lagrangian method to solve three-dimensional nonlinear contact problems. *Latin American applied research*, 42(3):281–289, 2012.
- [137] F. Cavalieri y A. Cardona. An augmented lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93:420–442, 01 2013. doi: 10.1002/nme.4391.
- [138] F. Cavalieri y A. Cardona. Numerical solution of frictional contact problems based on a mortar algorithm with an augmented lagrangian technique. *Multibody System Dynamics*, 35, 03 2015. doi: 10.1007/s11044-015-9449-8.