

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

Resolución numérica de problemas estructurales dinámicos por medio de una aproximación dinámica no suave

Eliana Selén Sánchez

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO
PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN
DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

$\text{sinc}(i)$

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES,
SISTEMAS E INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Tesis de Doctorado **2025**

Doctorado en Ingeniería

Mención mecánica computacional

Título de la obra:

**Resolución Numérica de Problemas
Estructurales Dinámicos por medio
de una Aproximación Dinámica No Suave**

Autora: Eliana Selén Sánchez

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Elementos Finitos, Contacto dinámico no suave,
Fricción, Impactos, Múltiples Impactos,
Fuerza de Contacto, Tensión de contacto,
Sistemas Multicuerpo, Mecanismos, Rodamientos de Bolas.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Resolución numérica de problemas estructurales dinámicos por medio de una aproximación dinámica no suave

Mtr. Ing. Eliana Selén Sánchez

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de

DOCTORA EN INGENIERÍA

Mención Mecánica Computacional

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2025

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria,
Paraje "El Pozo", S3000, Santa Fe, Argentina.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

Resolución Numérica de Problemas Estructurales Dinámicos por medio de una Aproximación Dinámica No Suave

Eliana Selén Sánchez

Lugar de trabajo:

CIMEC

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

Director:

Dr. Federico J. Cavalieri CIMEC (CONICET)/ Universidad Tecnológica Nacional

Co-director:

Dr. Alberto Cardona CIMEC (CONICET)/ Universidad Nacional del Litoral

Jurado Evaluador:

Dr. Bruno Rocca

Universidad De Bergen, Noruega

Dr. Eduardo Corral

Universidad Carlos III, Madrid, España

Dr. Martín Pucheta

(CONICET)/ Universidad Tecnológica Nacional/ FRC

2025

ACTA DE EVALUACIÓN DE TESIS DE DOCTORADO

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a los quince días del mes de septiembre del año dos mil veinticinco, se reúnen en forma online sincrónica los miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis de Doctorado en Ingeniería, Mención Mecánica Computacional titulada *“Resolución Numérica de Problemas Estructurales Dinámicos por medio de una Aproximación Dinámica No Suave.”*, desarrollada por la Ing. Eliana SÁNCHEZ, DNI N° 34.109.091, bajo la dirección del Dr. Federico Cavalieri y la codirección del Dr. Alberto Cardona. Ellos son: Dr. Bruno Roccia, el Dr. Eduardo Corral y el Dr. Martín Pucheta.-----

La Presentación oral y la defensa de la Tesis se efectúan bajo la modalidad online sincrónica según lo establecido por Resolución CS N° 382/21.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar la Tesis, el Jurado considera:

Que la tesis presenta un gran trabajo teórico y de implementación computacional en el campo de la dinámica no suave para cuerpos rígidos y flexibles sometidos a contacto e impacto con fricción.

La tesis ha sido escrita con un lenguaje técnico adecuado, una buena revisión bibliográfica y discusión de diferentes resultados y aplicaciones en el ámbito de la Ingeniería.

Adicionalmente, como producto de la tesis se han publicado tres artículos en revistas internacionales de gran prestigio en dinámica de sistemas multicuerpos.

La presentación ha sido clara y concisa y ha respondido con solvencia las preguntas del Jurado.

Por lo tanto, el Jurado aprueba la Tesis con calificación 10 (Diez) Sobresaliente.

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del Jurado al pie de la presente. -----

Dr. Bruno Roccia

Dr. Eduardo Corral

Dr. Martín Pucheta



Dr. JOSE LUIS MACOR
SECRETARIO DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería y Cs. Hídricas

Secretaría de Posgrado
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Ciudad Universitaria - C.C.217
Ruta Nacional 168 - Km 472,4
3000, Santa Fe, Argentina
+54 (0342) 4575233/245/246 int. 103
posgrado@fich.unl.edu.ar

Declaración legal del autor

Esta disertación ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctora en Ingeniería ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en Repositorio Institucional de Acceso Abierto -RIAA- de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disponible a sus lectores bajo las condiciones estipuladas. Citaciones breves de esta disertación son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para una citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concedidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Eliana Selén Sánchez

*Dedicado a mi alentador incansable Dari,
y al mejor regalo que me dio la vida Sami.*

Agradecimientos

“El éxito no es el resultado de una sola persona, sino del trabajo y la cooperación de muchas.”

Mahatma Gandhi.

Agradezco, en primer lugar, a la educación pública, que me brindó la oportunidad de crecer y aprender desde muy temprana edad. En particular, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (FICH-UNL) y al Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), por darme la posibilidad de realizar esta tesis doctoral. Asimismo, extendiendo mi agradecimiento a la Universidad Tecnológica Nacional (UTN-FRSF) por brindar parte del financiamiento que permitió dar a conocer este trabajo en numerosos congresos.

Quiero expresar mi especial agradecimiento a mi director, Federico, una persona excepcional, que estuvo siempre presente, acompañándome en cada paso de este largo y complejo camino. Por su infinita paciencia, confianza y generosidad, le estaré eternamente agradecida. Gracias por trabajar codo a codo conmigo y ayudarme a transitar este proceso.

Agradezco también a Alberto Cardona, por su genialidad, dedicación y generosidad. Su capacidad para tomarse el tiempo necesario para estar cuando lo necesitábamos y ayudarnos a encontrar las mejores soluciones a los problemas que surgían en el camino. Su participación fue invaluable.

Extiendo mi gratitud a los investigadores y profesores del doctorado, especialmente a los del CIMEC, por su apoyo constante, no solo durante el cursado, sino también durante el desarrollo de esta tesis.

A mis compañeros de CIMEC, agradezco especialmente a aquellos con quienes compartí experiencias más allá del ámbito laboral, por ser esas personas que contribuyen al crecimiento personal y profesional.

A mi tribu de mamis y amigas, por ser quienes me brindaron la fortaleza necesaria para continuar en este camino de madre y doctoranda.

A mi familia, les agradezco profundamente. A mis padres, por ser quienes siempre confiaron en mí; a mi esposo, por enseñarme tanto, por comprenderme en cada momento y por ser mi pilar fundamental. Finalmente, a mi hija Sami, esa personita tan especial, que me ha acompañado con paciencia y amor desde el momento en que llegó a este lado del mundo.

Resumen

En el ámbito industrial, una gran variedad de máquinas y mecanismos — tales como turbinas aeronáuticas, equipos de perforación utilizados en la industria petrolera, sistemas de separación en vehículos espaciales, rodamientos y engranajes — operan bajo condiciones físicas extremas, caracterizadas por movimientos de rotación de alta frecuencia, fricción e impactos múltiples. En este contexto, las simulaciones computacionales constituyen una herramienta fundamental en las etapas de diseño y optimización de estos dispositivos. Su aplicación permite evaluar de manera virtual diversas configuraciones geométricas, materiales y condiciones operativas, antes de avanzar hacia la fabricación física o la construcción de modelos prototipo. Este enfoque no solo contribuye a la reducción de costos y tiempos de desarrollo, sino que también posibilita un análisis detallado del comportamiento del sistema bajo diversos escenarios de funcionamiento.

A raíz de ello, la principal contribución de esta Tesis radica en el desarrollo, implementación y validación de modelos numéricos, orientados a la simulación de sistemas mecánicos complejos sujetos a impacto en el marco de la dinámica de contacto no suave. Luego, el estudio de la fricción se realiza mediante las leyes de fricción de Coulomb y Coulomb-Contensou. La estrategia elegida para describir el movimiento general de los cuerpos se basa en el Método de los Elementos Finitos no lineal. La regularización del problema variacional asociado al contacto con fricción se aborda mediante una formulación basada en un método del tipo Lagrangiano aumentado. Las ecuaciones de movimiento se integran mediante el esquema temporal α -generalizado no suave desacoplado, donde en esta Tesis se propone una extensión para incorporar los efectos de fricción cuando se consideran múltiples impactos entre cuerpos rígidos esféricos.

Dado que los enfoques de dinámica no suave no permiten calcular directamente las fuerzas de contacto, esta Tesis introduce una metodología novedosa que permite obtener fuerzas mediante la combinación de modelos de contacto suave con los resultados impulsivos y de velocidades derivados de las formulaciones no suaves.

En esta Tesis, las herramientas desarrolladas permiten predecir el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos complejos, posibilitando la evaluación de impactos, deformaciones, así como de fuerzas y tensiones de contacto, con una mayor eficiencia computacional respecto a los modelos utilizados actualmente.

El aporte de este trabajo se refleja en las publicaciones con referato que compila esta Tesis, contribuyendo de manera significativa al avance del conocimiento en el campo de la simulación de sistemas multicuerpos.

Abstract

In the industrial field, a wide variety of machines and mechanisms — such as aircraft turbines, drilling equipment used in the oil industry, separation systems in spacecraft, bearings, and gears — operate under extreme physical conditions, characterized by high-frequency rotational motions, friction, and multiple impacts. In this context, computational simulations constitute a fundamental tool in the design and optimization stages of these devices. Their application allows for the virtual evaluation of different geometric configurations, materials, and operating conditions before proceeding to physical manufacturing or prototype model construction. This approach not only contributes to reducing development costs and time but also enables a detailed analysis of the system's behavior under various operating scenarios.

As a result, the main contribution of this Thesis lies in the development, implementation, and validation of numerical models aimed at simulating complex mechanical systems subjected to impact, within the framework of non-smooth contact dynamics. The study of friction is carried out using Coulomb's friction law and the Coulomb-Contensou law. The strategy chosen to describe the general motion of the bodies is based on the nonlinear Finite Element Method. The regularization of the variational problem associated with contact with friction is addressed through a formulation based on an augmented Lagrangian method. The equations of motion are integrated using the decoupled non-smooth α -generalized time integration scheme, for which this Thesis proposes an extension to incorporate friction effects when considering multiple impacts between rigid spherical bodies.

Since non-smooth dynamics approaches do not allow for the direct computation of contact forces, this Thesis introduces a novel methodology that enables the calculation of forces through the combination of smooth contact models with the impulsive and velocity results derived from non-smooth formulations.

Moreover, the tools developed allow for the prediction of the dynamic behavior of complex mechanical systems, enabling the evaluation of impacts, deformations, as well as contact forces and stresses, with greater computational efficiency compared to currently used models.

The contribution of this work is reflected in the publications compiled in this Thesis, significantly advancing knowledge in the field of multibody systems simulation.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	1
1.2.1. Objetivos Específicos	2
1.3. Metodología	2
1.4. Estado del Arte	3
1.4.1. Sistema Multicuerpo	3
1.4.2. Problema del Contacto	4
1.4.3. Leyes de Impacto	6
1.4.4. Integradores Temporales	7
1.5. Estructura de la Tesis	9
2. Conceptos Generales	11
2.1. Sistemas Multicuerpo	11
2.1.1. Marcos de Referencia	12
2.2. Ecuaciones de Movimiento para Sistemas sin Restricciones	13
2.3. Ecuaciones de Movimiento para Sistemas Restringidos	15
2.3.1. Restricciones Bilaterales	15
2.3.2. Restricciones Unilaterales	16
2.3.3. Enfoque Subdiferencial para Problemas de Contacto sin Fricción	17
2.3.4. Ley de Newton	19
2.3.5. Ecuaciones de Movimiento a Nivel Velocidad	20
2.4. Integrador Temporal No Suave	21
2.4.1. Integrador Temporal α -generalizado no suave para problemas de contacto con fricción.	21
2.5. Fuerza de Contacto	25
2.5.1. Modelos de Fuerza de Contacto Continuo	25

3. Metodología	29
3.1. Contacto con Fricción entre una Esfera y un Plano	29
3.1.1. Formulación Matemática	31
3.1.2. Elemento de Contacto Esfera-Plano	35
3.1.3. Ejemplo Numérico	37
3.2. Múltiple Impacto con Fricción	40
3.2.1. Formulación Matemática	41
3.2.2. Elemento de Contacto Esfera-Esfera	43
3.2.3. Ejemplo Numérico	44
3.3. Cálculo de la Fuerza de Contacto en el Marco de la Dinámica no suave	46
3.3.1. Proceso de Filtrado	48
3.3.2. Cálculo de la Fuerzas de Contacto en el Marco de la Dinámica de Contacto no suave	50
3.3.3. Ejemplo Numérico	52
4. Rodamiento y Aplicaciones	57
4.1. Introducción	57
4.2. Elemento Rodamiento	58
4.3. Procedimiento para Calcular la Tensión de Contacto	59
4.4. Velocidad Angular de la Jaula	60
4.5. Ejemplos Numéricos	62
5. Conclusiones y Trabajos Futuros	67
5.1. Conclusiones	67
5.2. Trabajos Futuros	68
Bibliografía	71
A. Non-smooth numerical solution for Coulomb friction and sliding, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics	85
A.1. Introduction	86
A.2. Time integration of non-smooth equations of motion	90
A.3. Contact formulation	94
A.4. Internal force vectors	100
A.5. Sphere-plane frictional contact model	104
A.6. Numerical examples	107
A.7. Conclusions	117

B. Simulation of impacts between spherical rigid bodies with frictional effects	127
B.1. Introduction	127
B.2. Time Integration of Nonsmooth Equations of Motion	131
B.3. Frictional Contact Formulation	134
B.4. Sphere-Sphere Contact Model	138
B.5. Numerical Examples	141
B.6. Conclusions	158
C. Contact force multiscale calculation in the framework of the non-smooth dynamic approach	163
C.1. Introduction	163
C.2. Continuous contact force models	167
C.3. Non-smooth generalised- α time integration scheme	171
C.4. Calculation of contact forces with the non-smooth integrator	175
C.5. Filtering Algorithm	181
C.6. Numerical examples	181
C.7. Conclusions	193

Índice de figuras

1.1. Modelos de Contacto.	4
2.1. Sistema Multicuerpo.	12
2.2. Sistemas Coordinados de Referencia.	13
2.3. Condición de complementariedad de contacto.	17
2.4. Contacto entre dos cuerpos rígidos.	17
2.5. Contacto entre dos cuerpos rígidos.	18
2.6. Colisión elástica de dos esferas duras deformables.	26
2.7. Impacto elástico de dos esferas duras deformables.	26
3.1. Configuración esquemática de los casos de fricción.	30
3.2. Conos de fricción.	33
3.3. Elemento de Contacto Esfera-Plano.	36
3.4. Configuración del mecanismo biela-manivela con rodillo.	37
3.5. Aceleración angular para el caso con cuerpos rígidos. Comparación con las soluciones de Marques <i>et al.</i> , véase [102].	38
3.6. Aceleración angular del rodillo. Caso flexible vs. rígido.	39
3.7. Resultados Caso Flexible	40
3.8. Elemento de Contacto Esfera-Esfera.	43
3.9. Configuración inicial del rompimiento en el billar.	44
3.10. Velocidades calculadas en el problema de rompimiento de billar.	45
3.11. Comparación con el enfoque basado en penalización en el problema de rompimiento de billar.	46
3.12. Evolución logarítmica de la norma del residuo.	46
3.13. Evolución de λ en el tiempo.	48
3.14. Funciones de impacto simple y auxiliar.	49
3.15. Filtrado de Función Suave.	49
3.16. Funciones de filtrado.	49

3.17. Velocidad relativa de interpenetración vs. tiempo, para varias masas de impacto (tomado de Chen <i>et al.</i> [26])	51
3.18. Velocidad relativa de interpenetración propuesta vs. tiempo.	51
3.19. Configuración inicial del mecanismo biela-manivela flexible con huelgo.	53
3.20. Trayectoria y velocidad del centro del muñón para diferentes pasos de tiempo para un huelgo de 0.05 m	54
3.21. Fuerza de contacto vs. ángulo de la manivela para un huelgo de 0.05 mm.	54
3.22. Fuerza de contacto vs. ángulo de la manivela para un huelgo de 0.1 mm.	55
3.23. Componentes continua e impulsiva de la fuerza de contacto vs. ángulo de manivela.	55
3.24. Deformación de la biela vs. ángulo de la manivela. Paso de tiempo $h = 1 \times 10^{-6}$ s.	56
4.1. Elementos de Contacto.	59
4.2. Rodamiento de bolas.	59
4.3. Coeficientes vs. B/A	61
4.4. Modelo de rodamiento de bolas.	62
4.5. Fuerza vs. tiempo y posición vs. tiempo de la bola 6.	63
4.6. Resultados de fuerzas y velocidades.	64
4.7. Mecanismo biela manivela.	65
4.8. Resultados obtenidos para el ejemplo biela-manivela.	66
A.1. Schematic configuration of the sliding, the rolling and the spinning resistance on a spherical body.	89
A.2. Augmented Coulomb isotropic friction cone, and rolling and drilling resistance cones.	99
A.3. General configuration for the three-dimensional sphere-plane contact model.	104
A.4. General configuration for the three-dimensional sphere-plane contact model.	108
A.5. Numerical solutions for the sliding resistance example.	109
A.6. Numerical solutions for the rolling resistance example.	109
A.7. Numerical solutions for the spinning resistance example.	110
A.8. Numerical solutions for the sphere rolling and sliding on a plane.	111
A.9. Slider-crank mechanism configuration.	112
A.10. Angular acceleration for the rigid bodies case. Comparison with solutions of Marques <i>et al</i> , see [49].	113
A.11. Angular acceleration of the roller. Flexible vs. rigid case.	114
A.12. Angular deformation of the connecting-rod.	115
A.13. Vertical displacement of the roller for the flexible case.	115

A.14. Linear velocity and rolling behaviour curves.	116
A.15. Angular velocity in the X and Z directions.	117
A.16. Spinning velocity of the sphere.	117
B.1. Configuration of the three-dimensional sphere-sphere contact model.	138
B.2. Validation example. Frictional spheres configuration.	142
B.3. Numerical solution for the frictional spheres example.	143
B.4. Convergence rate for the frictional contact between spheres example.	144
B.5. Impact between two spheres.	145
B.6. Numerical vs. analytical solutions when friction between balls is considered and e_N is different to 1.	146
B.7. Energy evolution in time for the single collision example (case $f = 0.5$, $e_N = 0.94$, $\mu_{ball} = 0.06$, $\omega_{zOB} = \omega_{zCB} = 0$ without spin motion).	146
B.8. Logarithmic evolution of residual norm.	147
B.9. Convergence rate for the single collision example.	147
B.10. Throw angle effect in two spherical bodies.	148
B.11. Throw angle vs. spin angular velocity.	149
B.12. Evolution of energies in time (case $\mu = 0$, $e_N = 1$, $\mu_{ball} = 0.06$, $\phi = 30^\circ$, $\omega_{xCB} = 0.5 \times \omega_{roll} = 23.46$ rad/s, $v^- = 1.341$ m/s, $R\omega_{xCB}/v^- = 0.9$).	150
B.13. Logarithmic evolution of residual norm.	150
B.14. Convergence rate for the effect of friction on the throw angle example.	151
B.15. Multiple impacts collision of three balls.	151
B.16. Frictionless case. Displacement and velocity of the spheres.	152
B.17. Frictional case. Displacements and velocities of the spheres.	153
B.18. Evolution of energies in time, frictional case.	153
B.19. Convergence analysis for the multiple impact example with friction.	154
B.20. The Bernoulli problem.	154
B.21. Velocity of the balls.	155
B.22. Convergence analysis for the Bernoulli problem.	155
B.23. Billiard break configuration.	156
B.24. Computed velocities in the billiard break problem.	157
B.25. Comparison with penalty-based approach in the billiard break problem.	158
B.26. Logarithmic evolution of residual norm.	158
C.1. Elastic collision of two hard deformable spheres.	167

C.2. Impact process between two solid spheres.	168
C.3. Relative interpenetration velocity vs. time, for several impact masses (taken from Chen <i>et al.</i> [14]).	176
C.4. Piecewise linear function $g(\tau)$ in terms of non-dimensional time, for different values of coefficient of restitution.	177
C.5. Parameter a in terms of the normal restitution coefficient e_N	178
C.6. Factor I_δ in terms of the normal restitution coefficient e_N	179
C.7. Block diagram for the calculation of the contact force $F_N(t)$	180
C.8. Discrete impulse vs. time.	181
C.9. Components of the Lagrange multiplier Λ obtained by filtering.	182
C.10. Bouncing ball problem description.	182
C.11. Bouncing ball example. Evolution with respect to time of ball position, velocity and impulse, computed with $h = 1 \times 10^{-3}$ s and $e_N = 0.8$. Convergence rate in terms of time-step size.	183
C.12. Bouncing ball example.	184
C.13. Impact of two rigid spheres.	185
C.14. Impact of two spheres for different coefficients of restitution by using the Hu <i>et al.</i> model [34].	186
C.15. Impact of two spheres for different coefficients of restitution by using the Zhang <i>et al.</i> model [72].	186
C.16. Crank rod mechanism with impact at the initial configuration.	187
C.17. Impulse evolution vs. time for a time step $h = 1 \times 10^{-4}$ s.	188
C.19. Evolution of contact forces in terms of penetration for the slider-crank mechanism for time steps $h = 1 \times 10^{-3}$ s, $h = 5 \times 10^{-4}$ s, and $h = 1 \times 10^{-4}$ s.	188
C.18. Position and velocity evolution vs. time for the slider-crank mechanism for time steps $h = 1 \times 10^{-3}$ s, $h = 5 \times 10^{-4}$ s, and $h = 1 \times 10^{-4}$ s.	189
C.20. Initial configuration of the flexible crank rod mechanism with clearance.	189
C.21. Journal centre path relative to the bearing for different time steps.	190
C.22. Contact force vs. crank angle for a clearance of 0.05 mm.	191
C.23. Contact force vs. crank angle for a clearance of 0.1 mm.	192
C.24. Continuous and impact components of contact force vs. crank angle.	192
C.25. Deformation of the connecting-rod vs. crank angle. Time step $h = 1 \times 10^{-6}$ s.	193
C.26. Relative velocity deformation vs time.	194

Índice de tablas

2.1. Diferentes modelos para el factor de amortiguamiento por histéresis.	28
3.1. Dimensiones, masa y propiedades de inercia de los cuerpos.	38
4.1. Propiedades geométricas y mecánicas del rodamiento.	63
4.2. Propiedades geométricas y masas del rodamiento y del mecanismo biela-manivela.	65
A.1. Initial angular velocity and friction coefficient for each case.	111
A.2. Dimensions, mass and inertia properties of the bodies.	113
C.1. Different hysteresis damping factor models.	171
C.2. Dimensions, mass and inertia properties of the bodies for crank-rod mechanism.	187

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Numerosas máquinas y mecanismos utilizados en la industria, como por ejemplo robots manipuladores, rodamientos, cajas de engranajes, disyuntores eléctricos, entre otros, están sujetos a impactos entre sus componentes, lo que genera vibraciones de muy alta frecuencia que pueden propagarse por los restantes componentes del mecanismo. Estos impactos, junto con los efectos de la fuerza de fricción, luego de un determinado ciclo de trabajo, provocan desgaste y/o fatiga en los componentes del mecanismo, reduciendo la vida útil y afectando negativamente el funcionamiento global del sistema.

La motivación central de esta Tesis radica en el desafío que presentan estos mecanismos para la predicción de los desplazamientos, las velocidades y las fuerzas que ocurren en períodos de tiempo muy breves y que son requeridos para alcanzar un diseño eficiente desde el punto de vista de la resistencia de materiales y los costos de producción.

Hasta el momento, no se dispone de modelos suficientemente precisos en los resultados y eficientes desde el punto de vista computacional, para modelar mecanismos complejos, combinando de manera simultánea los efectos de fricción, impacto o múltiple impacto [142, 58].

1.2. Objetivos

El objetivo general de esta Tesis consiste en desarrollar herramientas de simulación computacional, orientadas al estudio de la dinámica estructural no lineal, producida por el impacto entre diferentes componentes de un sistema mecánico complejo. Se estudiarán problemas académicos y de aplicación industrial con el fin de proveer algoritmos de mayor precisión en los resultados respecto de los disponibles actualmente.

1.2.1. Objetivos Específicos

El objetivo específico consiste en analizar el efecto del impacto en componentes mecánicos modelados como cuerpos rígidos y flexibles en el marco de la dinámica de contacto no suave, mediante la formulación de nuevos algoritmos o modificación de existentes. Para ello, se propone:

- Desarrollar un elemento de contacto entre un cuerpo rígido esférico y un plano, considerando la fricción por deslizamiento, rodadura y rotación en el marco del integrador temporal α -generalizado no suave [17] (Anexo A).
- Desarrollar un elemento de contacto entre dos cuerpos rígidos esféricos, considerando la fricción por deslizamiento en el contexto del integrador temporal α -generalizado no suave [17], y extender dicha formulación al caso de contacto con fricción y múltiples impactos (véase Anexo B).
- Implementar una nueva metodología que permita evaluar la fuerza de contacto en los componentes de mecanismos compuestos por cuerpos rígidos, flexibles o una combinación de ambos, en los cuales se produzcan impactos (véase Anexo C).
- Desarrollar un elemento tipo rodamiento que sea capaz de capturar los efectos de impacto que surgen por los huelgos entre sus componentes, bolas y pistas, con el objetivo de predecir las fuerzas y tensiones generadas en el mismo.
- Validar los desarrollos propuestos con soluciones analíticas o de referencia.

1.3. Metodología

La mecánica computacional es una disciplina interdisciplinaria que integra conocimientos provenientes de la Física, la Matemática, la Ingeniería y la Informática. La metodología general empleada para la resolución de problemas mediante métodos numéricos contempla las siguientes etapas: (i) formulación física del problema, (ii) esquema de discretización numérica, (iii) programación, y (iv) validación/verificación de resultados.

La metodología particular que se desarrolla a lo largo de esta Tesis se sustenta en los siguientes lineamientos generales:

1. Se utiliza el Método de los Elementos Finitos (MEF) no lineal, considerando grandes desplazamientos y rotaciones, y donde la descripción cinemática de los cuerpos rígidos o flexibles se realiza siguiendo la metodología propuesta por Géradin y Cardona [55].
2. La integración temporal de las ecuaciones de movimiento se efectúa mediante el integrador temporal α -generalizado no suave [32]. Esta elección permite una mayor precisión en el cálculo de los campos de desplazamiento, velocidad y aceleración, superando las limitaciones de los integradores convencionales, como por ejemplo el Newmark, el Hilbert-Hughes-Taylor (HHT), Moreau-Jean [109, 68, 79].

3. En los algoritmos de contacto propuestos se consideran los efectos de fricción, modelados mediante la ley de Coulomb. La regularización del problema varacional de contacto con fricción se realiza siguiendo la formulación de Alart y Curnier [3]. Esta estrategia asegura el cumplimiento exacto de las restricciones de desigualdad asociadas al modelo de contacto con fricción.
4. Siguiendo la propuesta de Cósimo et al. [33], se implementa un nuevo algoritmo de contacto orientado a la simulación de impactos múltiples entre cuerpos rígidos esféricos, considerando los efectos de fricción.
5. Tomando como base los modelos de fuerza de contacto continuo [51] y, mediante una nueva metodología de post-procesamiento, se calculan las fuerzas y tensiones de contacto a partir de las velocidades e impulsos determinados por el integrador temporal α -generalizado no suave [32].
6. Como casos de aplicación, se estudian los efectos inducidos en sistemas mecánicos que incluyen juntas y/o rodamientos de bolas, producto de los huelgos presentes entre sus componentes. Se analiza la propagación de las ondas de vibración mecánica generadas en dichos elementos hacia el resto del sistema, y se determinan las fuerzas y tensiones de contacto desarrolladas en el conjunto.
7. Todos los algoritmos desarrollados son incorporados al código de elementos finitos *Oofelie* [21] (Object Oriented Finite Elements Led by Interactive Executor), el cual comprende un conjunto de herramientas implementadas en lenguaje C++, destinadas a la resolución de problemas en Mecánica del Continuo mediante el MEF.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Sistema Multicuerpo

Un sistema multicuerpo se define como un conjunto de cuerpos rígidos o flexibles interconectados mediante uniones cinemáticas, como por ejemplo bisagras o pasadores, y/o a través de elementos de fuerza, tales como actuadores, resortes, amortiguadores, entre otros [47]. Los sistemas multicuerpo presentan dos características fundamentales. Por un lado, los componentes mecánicos pueden experimentar grandes desplazamientos tanto de traslación como de rotación. Por otro lado, las uniones cinemáticas y elementos de fuerza restringen el movimiento relativo entre los cuerpos [47].

En este contexto, un cuerpo rígido es aquel cuyas deformaciones son despreciables durante el análisis, de modo que las distancias relativas entre sus puntos materiales permanecen constantes a lo largo del movimiento [125]. En contraste, un cuerpo flexible presenta deformaciones internas no despreciables, y su movimiento incluye tanto el desplazamiento global típico de un cuerpo rígido como la deformación [55].

Las fuerzas aplicadas sobre los distintos componentes de un sistema multicuerpo se originan en fenómenos físicos como la gravedad o la inercia. Estas fuerzas pueden representarse mediante funciones puntuales o bien como funciones dependientes del estado de los cuerpos que conforman el sistema [30]. Dentro de este último grupo se incluyen los fenómenos de contacto e impacto, los cuales están presentes en un gran número de mecanismos.

1.4.2. Problema del Contacto

El contacto mecánico con fricción es un fenómeno presente en muchos sistemas de ingeniería y tiene una influencia determinante en su comportamiento dinámico [102]. La interacción entre las superficies de contacto genera disipación de energía y puede inducir tanto variaciones graduales como discontinuidades abruptas en el estado del sistema, dependiendo de si el contacto se mantiene cerrado o si se producen impactos [102]. Asimismo, la fricción puede incrementar efectos no deseados, como vibraciones, ruido y desgaste [102], por lo que su modelización precisa es fundamental para conseguir diseños eficientes.

Las ecuaciones que gobiernan el problema de contacto son no lineales y no diferenciables, por este motivo, poseen grandes dificultades para ser resueltas por medio de un esquema Newton Raphson convencional [130]. A lo largo de las últimas décadas, se han propuesto diversas formulaciones para abordar este problema; sin embargo, hasta la fecha no se dispone de un algoritmo de contacto universalmente robusto que permita resolver con eficacia la amplia variedad de casos prácticos.

Como se presentará más adelante en el Cap. 2, el problema de contacto está sujeto a restricciones de desigualdad. Existen dos enfoques principales para resolver estas ecuaciones: los métodos de penalización y los métodos no suaves [30].

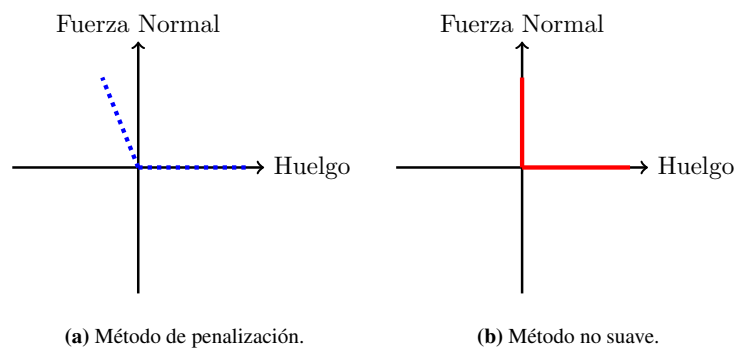


Figura 1.1: Modelos de Contacto.

- *Método de penalización:* También denominado método regularizado o método basado en la fuerza de contacto [6, 30]. Este enfoque define la fuerza de contacto como una función continua que depende de la penetración relativa entre los cuerpos en contacto y de su derivada temporal (en el caso de problemas dinámicos) [30]. En el marco de esta aproximación, se observa que la fuerza de contacto no se genera

de manera instantánea, sino que aumenta progresivamente con la amplitud de la penetración relativa o huelgo, ver Fig. 1.1-a. En estos modelos, la pendiente de la recta define el denominado coeficiente de penalización; por lo tanto, para aproximarse a la solución exacta, esto es, evitar la penetración, es necesario emplear factores de penalización tendientes a infinito, lo que resulta en matrices mal condicionadas, que afectan la estabilidad numérica del sistema de las ecuaciones que tiene que resolver [86].

Los modelos basados en este método introducen el factor de penalidad que se representa por la constante de un resorte elástico y un amortiguador en la interfaz de contacto [48]. Los valores numéricos de las constantes del resorte y el amortiguador se calculan a partir de la penetración relativa, su derivada temporal, las propiedades materiales de los cuerpos involucrados y la geometría de sus superficies contactoras [50]. En general, estos modelos resultan relativamente sencillos de implementar, ya que evitan la complejidad asociada al tratamiento explícito de las condiciones unilaterales de contacto [121].

Un problema a remarcar es que, en problemas dinámicos, la utilización de resortes altamente rígidos induce la aparición de frecuencias elevadas en el sistema, lo que obliga a reducir el paso temporal incrementando el costo computacional [30].

- *Método no suave:* También denominado método basado en restricciones geométricas, de formulación rígida o por partes [6, 30]. Este enfoque se caracteriza por dos supuestos principales, por un lado, las deformaciones de los cuerpos involucrados son pequeñas en relación con su geometría, por lo que pueden modelarse como cuerpos rígidos, y por otro lado, el contacto se modela como un fenómeno instantáneo, de duración nula, y se formula mediante una condición de complementariedad del tipo Signorini [128]. La fuerza de reacción del impulso se determina de manera tal que impide la penetración entre los cuerpos. El principio de complementariedad establece que tanto la fuerza de reacción como la restricción unilateral o huelgo deben ser no negativas, con la condición de que al menos una de ellas sea nula, ver Fig. 1.1-b.

Para resolver el problema de contacto sujeto a la condición de complementariedad, puede recurrirse al uso de multiplicadores de Lagrange [1], los cuales imponen las restricciones de forma exacta, reformulando el problema como uno de punto silla. Este enfoque incrementa el tamaño del sistema por los multiplicadores de Lagrange y consecuentemente el costo computacional. Otra forma de resolver el problema del contacto, es mediante la combinación del método de multiplicadores de Lagrange con un algoritmo tipo Uzawa [62]. En este algoritmo de doble bucle, los multiplicadores de Lagrange se mantienen constantes durante un bucle de iteración interno para resolver los desplazamientos. Posteriormente, dentro de un bucle externo, los multiplicadores de Lagrange se actualizan a un nuevo valor y la iteración interna se reinicia hasta la convergencia del proceso completo. Como contrapartida este método aumenta el costo computacional debido al uso del doble bucle.

Como alternativa intermedia, el método del Lagrangiano aumentado combina el método de penalización con el de multiplicadores de Lagrange, ofreciendo una formulación robusta que evita el uso del método de Uzawa. En este caso, el parámetro de penalización afecta únicamente la tasa de convergencia sin comprometer la precisión del resultado. El método del Lagrangiano aumentado fue desarrollado originalmente por Hestenes [67] y Powell [118] para problemas de optimización y luego fue aplicado al problema de contacto mecánico [3].

La principal limitación de los métodos no suaves radica en que no permiten calcular directamente las fuerzas de contacto durante el proceso de impacto, y que los procedimientos algorítmicos asociados resultan altamente complejos [132].

Además, estos métodos presentan dificultades para abordar problemas en los que ocurre la paradoja de Painlevé, un fenómeno clásico de la mecánica de cuerpos rígidos con contacto y fricción, que evidencia que los modelos de contacto basados en la ley de Coulomb pueden conducir a soluciones indeterminadas (es decir, múltiples soluciones) o inconsistentes (ninguna solución) en sistemas mecánicos simples [23].

Para la resolución de problemas dinámicos con impactos, se utilizan principalmente dos formulaciones: el problema de complementariedad lineal LCP (linear complementarity problem) y la desigualdad variacional diferencial DVI (differential variational inequality) [30].

El enfoque LCP emplea restricciones unilaterales en el análisis dinámico para calcular las fuerzas de contacto, evitando la penetración relativa entre cuerpos. Solo se permite un valor mínimo de penetración para detectar el instante inicial de contacto, pero este valor no se emplea en el cálculo de la magnitud del impulso [30]. Una de las principales limitaciones de este método es su dificultad para adaptarse a diferentes situaciones, como contactos permanentes o intermitentes, lo cual condiciona el desarrollo de programas genéricos basados en LCP para sistemas multicuerpo dinámicos [132]. Además, la inclusión de fricción puede dar lugar a múltiples soluciones o a ninguna, así como también a las violaciones del principio de conservación de la energía [135, 119].

La formulación DVI se considera más adecuada respecto a los enfoques LCP para sistemas en los que ocurren múltiples impactos simultáneos, teniendo en cuenta las fuerzas de fricción [50]. A pesar de que presentan una formulación algorítmica compleja [30], este tipo de enfoque es ampliamente utilizado para el estudio de flujos con partículas [132, 103].

1.4.3. Leyes de Impacto

Según Gilardi y Sharf [57], un impacto entre dos cuerpos se caracteriza por una interacción de muy corta duración, típicamente del orden de milisegundos [111], que involucra elevados niveles de fuerza, una rápida disipación de energía, deformaciones locales (elásticas o plásticas), cambios abruptos en las velocidades y la

generación de vibraciones. La complejidad asociada a su modelado radica en la necesidad de determinar de manera simultánea, las velocidades, las fuerzas y los impulsos involucrados bajo restricciones impuestas por el sistema [61].

Las discontinuidades provocadas por impactos son generalmente modeladas mediante leyes que relacionan el estado del sistema antes y después del mismo [42], utilizando habitualmente un coeficiente de restitución. Entre las formulaciones más empleadas en la literatura especializada se destacan la ley de impacto de Newton [110] y la ley de Poisson [117]. La primera posee un carácter eminentemente cinemático, ya que establece una relación directa entre las velocidades relativas pre y post impacto. En tanto que, la ley de Poisson es de naturaleza cinética, puesto que vincula los impulsos generados durante las fases de compresión y restitución [15].

1.4.4. Integradores Temporales

Para resolver las ecuaciones que gobiernan el problema de impacto, resulta fundamental contar con métodos de integración temporal que permiten resolverlas numéricamente con precisión. Los integradores temporales estándar, como los métodos de Newmark, Hilbert-Hughes-Taylor (HHT) y los α -generalizados [27], fueron desarrollados bajo la hipótesis de que los desplazamientos y las velocidades evolucionan suavemente en el tiempo. Como consecuencia, estos métodos no pueden tratar de forma consistente los saltos en la velocidad que se producen durante los impactos. Esta limitación ha motivado el desarrollo de esquemas consistentes y técnicas de estabilización específicamente orientadas al análisis de problemas dinámicos [24, 90, 9].

Los esquemas de integración numérica para el análisis dinámico no suave pueden clasificarse en dos grandes categorías: los esquemas controlados por eventos (*event-driven*) y los esquemas de paso de tiempo fijo (*time-stepping*) [53].

- *Esquemas controlados por eventos*: se basan en la detección precisa del instante de impacto mediante la modificación del paso temporal, de modo que este coincida con el instante de impacto. Entonces, las ecuaciones de la dinámica se resuelven aplicando una ley de impacto consistente. Este tipo de esquemas resulta adecuado cuando los impactos son poco frecuentes; sin embargo, su precisión se ve comprometida en escenarios con múltiples impactos o impactos recurrentes [63].
- *Esquemas de paso de tiempo fijo*: mantienen constante el tamaño del paso temporal a lo largo de toda la simulación. Si bien son métodos robustos, presentan precisión de primer orden incluso cuando no hay impacto, lo que limita su eficacia y obliga al uso de pasos de integración muy pequeños para alcanzar resultados aceptables [131].

Dentro de esta última clasificación, los integradores más ampliamente utilizados para sistemas dinámicos no suaves son el esquema de Moreau-Jean [79, 107, 78], basado en un método θ , y el esquema de Schatzman-Paoli

[113, 114], basado en diferencias centradas. A pesar de la robustez para abordar problemas que involucran un gran número de impactos, ambos esquemas presentan una precisión de primer orden y sufren elevados niveles de disipación numérica, lo que conduce, en general, a una aproximación deficiente de los fenómenos vibratorios en componentes flexibles. De hecho, cuando se emplea un método de primer orden, es necesario utilizar pasos de tiempo muy pequeños para alcanzar resultados adecuados. Además, en el esquema de Moreau-Jean [79], las restricciones se imponen únicamente a nivel de velocidad, lo que puede dar lugar a una violación de las restricciones a nivel de posición y, en consecuencia, a un fenómeno denominado *drift*.

Con el objetivo de mejorar la precisión, Chen et al. [25] propusieron un enfoque híbrido en el cual las fuerzas suaves, como las elásticas, se integran mediante un esquema de mayor orden (por ejemplo, el método α -generalizado [27]), mientras que las fuerzas impulsivas se tratan mediante esquemas implícitos de primer orden. Si bien el orden de convergencia global se mantiene en uno, se observó una mejora sustancial en los resultados para sistemas con componentes flexibles, en comparación con el método propuesto por Moreau [106]. Posteriormente, Brüls, Acary y Cardona [17] desarrollaron el integrador α -generalizado no suave, el cual introduce dos avances claves: i) las fuerzas asociadas al movimiento suave se integran mediante un esquema de segundo orden, lo que permite alcanzar un orden de convergencia global superior a uno; y ii) las restricciones unilaterales, tanto a nivel de velocidad como de posición, se satisfacen de manera exacta. Este integrador fue evaluado en diversos casos de validación [17], evidenciando mejores propiedades de convergencia y precisión en comparación con esquemas anteriores [27, 25, 116, 115]. No obstante, su eficiencia disminuye en presencia de componentes flexibles y restricciones bilaterales, lo que obliga a emplear pasos de tiempo reducidos para mantener la estabilidad y la precisión numérica.

Para superar esta limitación, Cosimo et al. [32] propusieron un nuevo integrador temporal basado en la formulación de Brüls, Acary y Cardona [17], en el cual las ecuaciones del movimiento suave, de posición y de velocidad están completamente desacopladas. Este esquema permite satisfacer de manera exacta las restricciones tanto a nivel de posición como de velocidad, y respecto al integrador original mejora la robustez frente a la presencia de componentes flexibles y restricciones bilaterales, sin comprometer la precisión global de la solución.

Más recientemente, otros autores como por ejemplo Capobianco et al. [20] propusieron un método α generalizado no suave, donde las restricciones se satisfacen a nivel de aceleración. El esquema presentado por Capobianco et al. [20] puede reproducir adecuadamente la dinámica de contacto por fricción, en sistemas multicuerpo con partes flexibles evitando la penetración entre los cuerpos en contacto. La principal desventaja de dicho enfoque es que los subproblemas de posición, velocidad y aceleración no están desacoplados, limitado así por ejemplo el tratamiento del múltiple impacto. Luego, Luo et al. [98] propusieron un esquema de integración simple modificado no suave (NMSI, por sus siglas en inglés) para el tratamiento de la dinámica de contacto con fricción en sistemas multicuerpo rígido-flexibles.

En síntesis, el estudio de la dinámica de contacto no suave con fricción ha evolucionado desde formulaciones teóricas fundamentales [106, 45] hasta metodologías numéricas [53, 20, 58]. No obstante, aún no se dispone de una metodología que sea, al mismo tiempo, robusta desde el punto de vista físico-matemático y eficiente desde el punto de vista computacional para el análisis del impacto o múltiple impacto con fricción en sistemas mecánicos complejos que involucren tanto elementos rígidos como flexibles. Incluso con la incorporación de enfoques avanzados, como los métodos no suaves, persisten limitaciones importantes: estos métodos no permiten estimar de forma directa las fuerzas ni las tensiones de contacto que se generan en cada impacto.

1.5. Estructura de la Tesis

El texto principal de la tesis está estructurado en cinco capítulos organizados de la siguiente manera:

- El Capítulo 1 introduce la temática central de la investigación, junto con la motivación que sustenta este trabajo. Además, se presentan los objetivos generales y específicos, así como la metodología empleada a lo largo del desarrollo de la Tesis.
- El Capítulo 2 proporciona los conceptos generales y fundamentos teóricos necesarios para comprender los temas específicos abordados en esta investigación. Este capítulo establece el marco teórico conceptual que sustenta los desarrollos posteriores.
- El Capítulo 3 sintetiza las principales metodologías aplicadas en el desarrollo de la Tesis. Asimismo, se describen los conceptos específicos asociados a cada una de las publicaciones presentadas en los anexos, vinculándolos con los objetivos planteados.
- El Capítulo 4 presenta ejemplos numéricos y casos de estudio en los que se aplican los desarrollos teóricos y metodológicos expuestos en el capítulo anterior. Estos ejemplos permiten validar y demostrar la utilidad de los aportes de la investigación.
- Finalmente, el Capítulo 5 expone las conclusiones generales derivadas de los resultados obtenidos. Además, se discuten posibles líneas de investigación futuras que podrían ampliar o profundizar los hallazgos obtenidos por esta Tesis.

Capítulo 2

Conceptos Generales

Este capítulo establece los fundamentos teórico-metodológicos para el estudio de sistemas multicuerpo con impactos, sentando las bases para los desarrollos que se presentan en los capítulos siguientes de esta Tesis. En particular, se detallan las ecuaciones de movimiento y las restricciones asociadas al fenómeno de impacto en sistemas multicuerpo. Asimismo, se revisan los métodos clásicos de integración numérica y sus limitaciones en procesos dinámicos no suaves, como por ejemplo el impacto, lo que justifica la adopción del integrador temporal α -generalizado no suave (NSGA, por sus siglas en inglés). Este integrador se destaca por su eficacia en el tratamiento de impactos, por su robustez numérica y por su capacidad para satisfacer con precisión las restricciones unilaterales y bilaterales de un mecanismo.

Finalmente, en este apartado, dado que las aproximaciones no suaves presentan limitaciones en el cálculo de las fuerzas de contacto, se incluye una revisión de los modelos de fuerza de contacto existentes hasta el momento, los cuales serán incorporados en la metodología propuesta en los siguientes capítulos.

2.1. Sistemas Multicuerpo

Los Sistemas Multicuerpo (MS, por sus siglas en inglés) en el ámbito de la ingeniería mecánica están compuestos por elementos como vigas, motores, actuadores y resortes, entre otros, ver Fig. 2.1. De acuerdo con Nikravesh [112], estos sistemas pueden incluir tanto cuerpos rígidos como flexibles, interconectados mediante juntas cinemáticas o elementos de fuerza. La principal diferencia entre los cuerpos rígidos y flexibles radica en que los primeros no experimentan deformaciones, lo que simplifica las ecuaciones que describen su comportamiento dinámico. En contraste, los cuerpos flexibles se deforman bajo la acción de fuerzas externas, lo que aumenta significativamente la complejidad de las ecuaciones que rigen su dinámica [55, 12, 136].

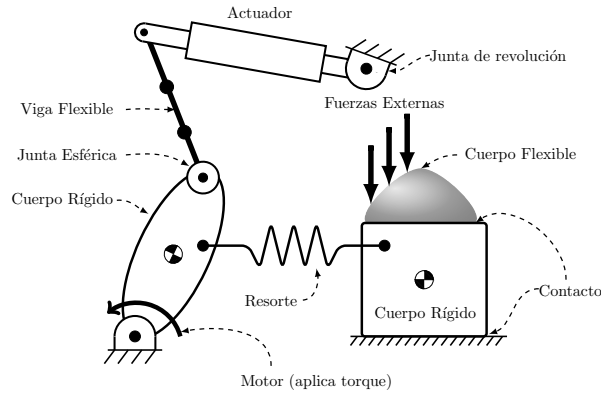


Figura 2.1: Sistema Multicuerpo.

2.1.1. Marcos de Referencia

Las metodologías utilizadas para analizar la evolución temporal de sistemas multicuerpo con componentes rígidos pueden clasificarse, en términos generales, en tres categorías según el tipo de marco de referencia empleado: i) *Marco Inercial*, ii) *Formulación de Coordenadas del Punto de Referencia* [38] que incluye ángulos de Euler, parámetros de Euler u otro conjunto de parámetros de orientación y, iii) la *Formulación de Coordenadas Naturales* [39]. En comparación con la mecánica de cuerpos rígidos, la selección del sistema de coordenadas en la dinámica de cuerpos flexibles representa un problema más complejo [125]. Según Wasfy y Noor [136] existen tres grandes categorías según el tipo de marco de referencia empleado: i) *marco flotante*, ii) *marco corotacional* y iii) *marco inercial*. Esta clasificación permite organizar los distintos enfoques de modelado en función de cómo se separan las deformaciones relativas del movimiento rígido de los componentes.

Los *marcos flotantes* y *marcos corotacionales* se basan en la introducción de un marco de referencia intermedio que facilita el desacople entre la deformación del cuerpo y su movimiento rígido, no así en el marco inercial que utiliza un único sistema de referencia.

Específicamente, en el **enfoque de marco flotante** (*floating frame of reference*), se asigna un sistema de coordenadas móviles al cuerpo flexible que se traslada y rota siguiendo el movimiento de un cuerpo rígido representativo del componente. Las deformaciones se modelan como desviaciones respecto a ese movimiento rígido global [136, 126]. Este método es adecuado para cuerpos que experimentan desplazamientos y rotaciones grandes, pero con deformaciones pequeñas o moderadas comparado con la escala del componente completo, ver Fig. 2.2-a.

En contraste, el **enfoque corotacional** (*corotational formulation*) introduce un marco local para cada elemento finito individual. Cada uno de estos marcos se mueve siguiendo el comportamiento de un cuerpo rígido asociado al elemento, y las deformaciones se miden localmente respecto a ese movimiento [46, 56]. Este enfoque resulta especialmente útil cuando se requiere capturar deformaciones grandes a nivel local sin

que el movimiento global del sistema complique innecesariamente la formulación, ver Fig. 2.2-b.

Por otro lado, el **marco inercial** no emplea un marco de referencia intermedio, sino que las deformaciones se calculan directamente con respecto a un marco de referencia global, ver Fig. 2.2-c. Este enfoque permite considerar grandes desplazamientos, rotaciones y deformaciones [136].

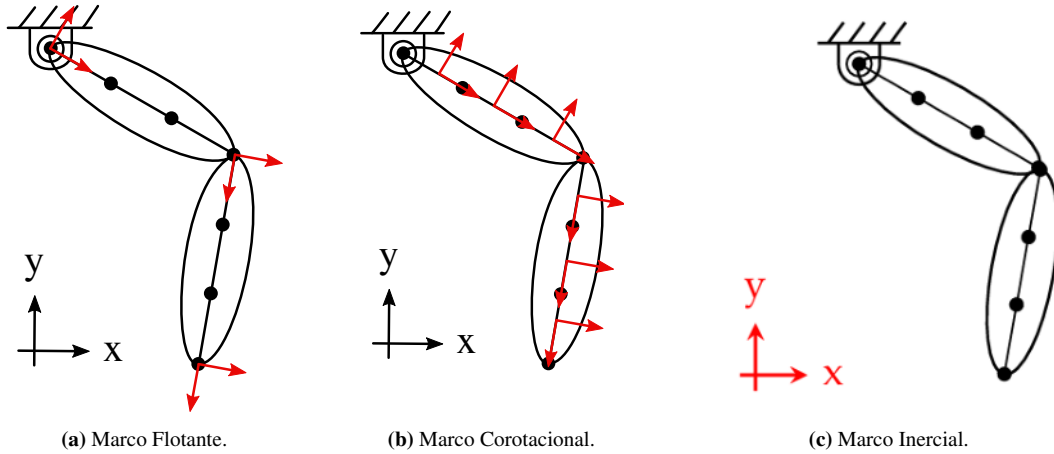


Figura 2.2: Sistemas Coordenados de Referencia.

Dado que el objetivo de esta tesis es estudiar sistemas multicuerpo en el contexto del método de los elementos finitos con grandes desplazamientos y rotaciones, y que el uso del marco inercial evita la definición de marcos de referencia intermedios, en este trabajo se adopta dicho enfoque para representar la cinemática y la dinámica tanto para elementos rígidos como flexibles.

2.2. Ecuaciones de Movimiento para Sistemas sin Restricciones

Para definir las ecuaciones de movimiento de un sistema multicuerpo sin restricciones, se emplea el principio de d'Alembert [36], que reformula la segunda ley de Newton mediante la introducción de las fuerzas inerciales. La idea de d'Alembert [36] puede abordarse a partir de la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F}^{ext} = m\mathbf{a}. \quad (2.1)$$

donde la fuerza externa aplicada a un sistema $\mathbf{F}^{ext}$, es igual al producto de la masa m por la aceleración $\mathbf{a}$. Reescribiendo esta ecuación,

$$\mathbf{F}^{ext} - m\mathbf{a} = 0 \quad (2.2)$$

y definiendo al vector $\mathbf{F}^{iner}$ como:

$$\mathbf{F}^{iner} = -m\mathbf{a} \quad (2.3)$$

la ecuación de Newton puede reformularse para el equilibrio dinámico del sistema como:

$$\mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{iner} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

A raíz de esta formulación surge el concepto de "fuerza inercial" $\mathbf{F}^{iner}$ la cual puede ser considerada como una fuerza creada por el movimiento. La expresión de la segunda ley de Newton como un equilibrio de fuerzas es relevante porque permite la aplicación del principio de los trabajos virtuales, como en el caso estático [87].

En el estudio de un sistema sin restricciones, el trabajo virtual se define como el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el sistema mecánico ante un conjunto de desplazamientos virtuales. Por lo tanto, el trabajo virtual total en un sistema multicuerpo se expresa como:

$$\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{W}^{iner} + \delta\mathcal{W}^{ext} - \delta\mathcal{W}^{int} - \delta\mathcal{W}^{amo} \quad (2.5)$$

donde $\delta\mathcal{W}^{iner}$, $\delta\mathcal{W}^{ext}$, $\delta\mathcal{W}^{int}$ y $\delta\mathcal{W}^{amo}$ son los trabajos virtuales de las fuerzas inerciales, externas, internas y de amortiguamiento, respectivamente. Suponiendo que el sistema está representado por las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$, estos trabajos virtuales se definen como:

$$\delta\mathcal{W}^{iner} = -\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f}^{gyr}(\mathbf{v})) \quad (2.6a)$$

$$\delta\mathcal{W}^{ext} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, t) \quad (2.6b)$$

$$\delta\mathcal{W}^{int} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}) \quad (2.6c)$$

$$\delta\mathcal{W}^{amo} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}^{amo}(\mathbf{v}) \quad (2.6d)$$

donde $\delta\mathbf{q}$ son desplazamientos virtuales continuos, es decir, desplazamientos arbitrarios que satisfacen las condiciones cinemáticas de contorno [120]. A su vez $\mathbf{M}$ es la matriz de masa, $\mathbf{v}$ es la derivada de $\mathbf{q}$ con respecto al tiempo, $\dot{\mathbf{v}}$ son las aceleraciones del sistema, y $\mathbf{f}^{gyr}$, $\mathbf{f}^{ext}$, $\mathbf{f}^{int}$, $\mathbf{f}^{amo}$ son las fuerzas giroscópicas, externas, internas y de amortiguamiento del sistema. Luego, reemplazando la Ec.(2.6) en la Ec.(2.5) el trabajo virtual total se puede expresar como:

$$\delta\mathcal{W} = \delta\mathbf{q}^T (-\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)) \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}^{amo}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}^{gyr}(\mathbf{v})$ es la suma de las fuerzas externas, internas, de amortiguamiento y giroscópicas.

El principio de d'Alembert también puede formularse en términos del trabajo virtual, especialmente en el contexto de la mecánica analítica. En esta formulación, el principio establece que un sistema está en equilibrio dinámico, si el trabajo virtual realizado por las fuerzas inerciales y las fuerzas externas es cero para cualquier

desplazamiento virtual $\delta \mathbf{q}$:

$$\delta \mathcal{W} = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{q} \quad (2.8)$$

Por lo tanto, a partir de la Ec.(2.7), las ecuaciones de movimiento para un sistema no restringido tienen la forma de:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \quad (2.9)$$

2.3. Ecuaciones de Movimiento para Sistemas Restringidos

En el estudio de sistemas multicuerpo, las restricciones desempeñan un papel fundamental al limitar los movimientos relativos entre los componentes del sistema. Estas restricciones pueden clasificarse en dos categorías fundamentales según su naturaleza: (1) bilaterales $\bar{\mathcal{U}}$, que permanecen activas durante todo el movimiento, y (2) unilaterales $\mathcal{U}$, que pueden activarse o desactivarse dependiendo de la configuración del sistema. Las primeras son comúnmente empleadas para modelar conexiones cinemáticas permanentes entre cuerpos, como articulaciones o pares cinemáticos, mientras que las segundas resultan esenciales para describir fenómenos de contacto intermitente o colisiones.

2.3.1. Restricciones Bilaterales

Extendiendo la formulación presentada anteriormente para sistemas no restringidos (Ec. 2.9), la dinámica de un sistema con restricciones bilaterales $\bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q})$ introduce fuerzas de restricción $\mathbf{f}^c$. El manejo de estas restricciones requieren un tratamiento especial ya que generalmente implican una relación no lineal entre las coordenadas naturales del problema y el desplazamiento $\mathbf{q}$. Estas pueden escribirse en forma general como:

$$\bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.10)$$

lo que indica que generalmente deben tratarse de manera implícita. Se puede observar que si se aplica la variación a la restricción bilateral $\bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q})$ se obtiene:

$$\delta \bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}) = \frac{\delta \bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q})}{\delta \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \bar{\mathbf{g}}_q^{\bar{\mathcal{U}}} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.11)$$

donde $\bar{\mathbf{g}}_q^{\bar{\mathcal{U}}}$ denota la matriz gradiente de las restricciones bilaterales.

Una restricción bilateral $\bar{\mathbf{g}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q})$ se considera ideal cuando, para cualquier desplazamiento virtual compatible con las restricciones, el trabajo virtual asociado a las fuerzas de restricción es nulo. Matemáticamente, esta

condición se expresa como:

$$\delta \mathcal{W}^c = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}^c = 0 \quad \forall \quad \delta \mathbf{q} \text{ satisfaciendo } \bar{\mathbf{g}}_q^U \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Esta condición establece que las fuerzas de restricción ideales son ortogonales al espacio de movimientos virtuales permitidos. Como consecuencia directa de este postulado, las fuerzas de restricción no contribuyen al trabajo virtual del sistema y, por tanto, no aparecen explícitamente en la formulación del principio de d'Alembert. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, la dinámica del sistema restringido se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{g}}_q^U(\mathbf{q})^T \bar{\boldsymbol{\lambda}}^U = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \quad (2.13b)$$

$$-\bar{\mathbf{g}}^U(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.13c)$$

donde $\mathbf{v}$ es el vector velocidad y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^U$ representa el vector de multiplicadores de Lagrange de las bilaterales (que físicamente corresponden a las fuerzas generalizadas de restricción).

2.3.2. Restricciones Unilaterales

Las restricciones unilaterales asociadas a la condición de contacto se formulan bajo la hipótesis de que no ocurren impactos en el sistema. En este contexto, es posible que se produzca una separación durante el movimiento o que las velocidades sean lo suficientemente bajas como para que la contribución del impacto resulte despreciable. Bajo esta suposición, las ecuaciones de movimiento con restricciones unilaterales ideales [104] se expresan como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g}_q(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \quad (2.14b)$$

$$-\mathbf{g}^U(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.14c)$$

$$g^j(\mathbf{q}) \geq 0, \quad \lambda^j \geq 0 \quad \text{y} \quad g^j(\mathbf{q}) \lambda^j = 0 \quad (2.14d)$$

donde la Ec. (2.14-d) expresa la condición de complementariedad entre g^j que es la separación entre los cuerpos y λ^j que representa la fuerza de reacción entre los cuerpos para cada uno de los contactos j que se producen en el sistema.

En el ámbito del contacto mecánico, la condición de complementariedad se conoce como la condición de Hertz-Signorini-Moreau [137], y se ilustra en la Fig. 2.3. Esta condición describe el comportamiento de un

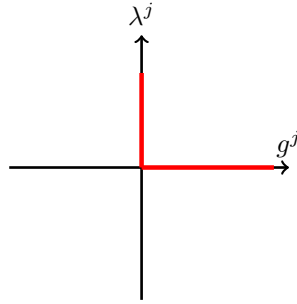
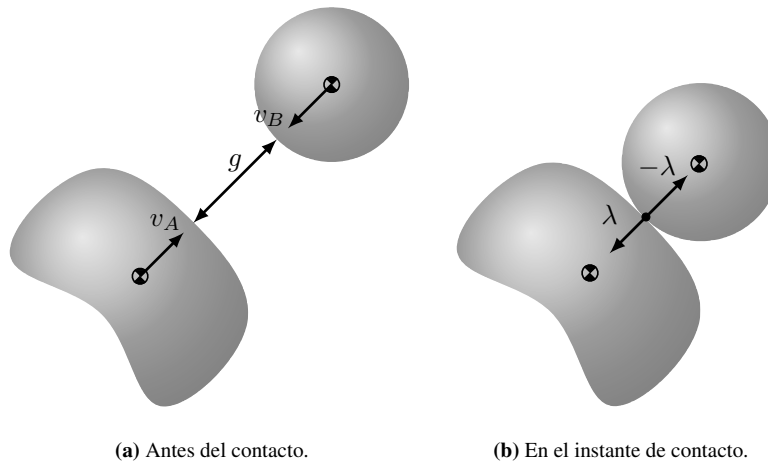


Figura 2.3: Condición de complementariedad de contacto.

contacto sin fricción, garantizando la no penetración entre los cuerpos e imponiendo que solo puedan actuar fuerzas de reacción repulsivas. Esta condición establece dos posibles escenarios: i) *huelgo*, donde los cuerpos no están en contacto, de modo que $g^j(\mathbf{q}) > 0$ y $\lambda^j = 0$ (véase la Fig. 2.4-a); y ii) *contacto*, donde los cuerpos se encuentran en interacción, cumpliéndose que $g^j(\mathbf{q}) = 0$ y $\lambda^j > 0$ (véase la Fig. 2.4-b). Como se observa en



(a) Antes del contacto.

(b) En el instante de contacto.

Figura 2.4: Contacto entre dos cuerpos rígidos.

la Ec. (2.14-d), la ley de contacto que relaciona la separación g^j con la fuerza de reacción λ^j no está definida por una función que permita calcular la fuerza de manera unidireccional en función del espacio. En su lugar, se trata de una relación establecida por valores determinados, donde un mismo valor de g^j puede asociarse con distintos valores de λ^j , según el estado del sistema. No obstante, ambas variables deben cumplir en todo momento la condición $g^j(\mathbf{q})\lambda^j = 0$. Como se ilustra en la Fig. 2.3, cuando el contacto está activo, es decir, $g^j = 0$, la fuerza de reacción puede adoptar cualquier valor dentro del rango $[0, +\infty)$.

2.3.3. Enfoque Subdiferencial para Problemas de Contacto sin Fricción

Como se desarrolló previamente, en la Sección de Restricciones Unilaterales, las desigualdades de la Ec.(2.14-d) muestran que la ley de contacto constituye una relación no suave y multivaluada, tal como se ilustra en la Fig. 2.5-a. En esta sección, se empleará el concepto de subdiferencial para abordar la no

diferenciabilidad del problema de contacto. Para ello, primero se define una función no diferenciable ψ en

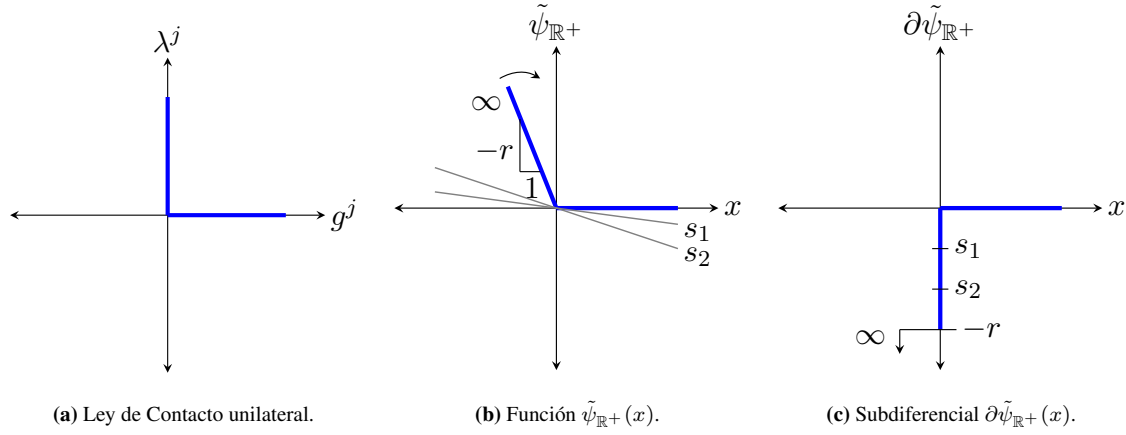


Figura 2.5: Contacto entre dos cuerpos rígidos.

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, denominada función indicadora,

$$\psi_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Luego, $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$ puede aproximarse con una función lineal-constante (por partes) $\tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x)$, esto es,

$$\tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -rx & \text{si } x < 0 \text{ y } r \gg 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

ver Fig. 2.5-b. Finalmente, derivando la función de la Ec.(2.16) cuando $x \neq 0$ se tiene,

$$\frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -r & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig.2.5-c. En un sentido clásico de análisis matemático, la función de la Ec.(2.16) no es diferenciable en el origen. Sin embargo, las derivadas a izquierda y a derecha existen y son las que se presentan en la Ec.(2.17). A partir del análisis convexo, la generalización de la derivada de $\tilde{\psi}$ en el origen es el segmento $[0, -r]$. Este conjunto se llama subdiferencial de $\tilde{\psi}$ en $x = 0$ y se denota como $\partial\tilde{\psi}(0)$. Luego, cualquier elemento s de este conjunto se llama subgradiente y se escribe de la siguiente manera,

$$s \in \partial\tilde{\psi}(0) = [0, -r] \quad (2.18)$$

En el marco del análisis convexo [100], el subdiferencial de una función $f(x)$ en un punto $\bar{x}$ también se define como,

$$\partial f(\bar{x}) = \{s | f(x) \geq f(\bar{x}) + s(x - \bar{x})\} \quad (2.19)$$

Desde un punto de vista geométrico, un subgradiente en $\bar{x}$ es la pendiente de cualquier línea que soporta la gráfica de una función convexa en ese punto, ver por ejemplo s_1 y s_2 en la Fig. 2.5-b. En la Ec.(2.18), haciendo que r tienda al infinito, el subdiferencial $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$ de la función indicadora $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$ es,

$$\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(0) = [0, -\infty) \quad \text{si } x = 0. \quad \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x) = \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_{\mathbb{R}^+}(x) = 0 \quad \text{si } x > 0 \quad (2.20)$$

Notar que $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$ no está definido para $x < 0$. La Fig. 2.5-c muestra que el subdiferencial de la función indicadora es análoga a la función de la Fig. 2.5-a y que representa las condiciones de contacto, ver Ec.(2.14-d). Por lo tanto, la Ec.(2.14-d) se puede escribir de manera equivalente utilizando la Ec.(2.20), como una inclusión subdiferencial, es decir, están representadas por el subdiferencial de la función indicadora,

$$-\lambda^j \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(g^j) \quad (2.21)$$

Esto muestra que la función indicadora $\psi_{\mathbb{R}^+}(x)$ se puede considerar como una función de un pseudopotencial y la fuerza de contacto λ^j se deriva de ella en forma subdiferencial.

2.3.4. Ley de Newton

Los problemas dinámicos abordan el estudio del movimiento de cuerpos rígidos o flexibles, sometidos a un conjunto de fuerzas, considerando de manera explícita la evolución temporal y la aparición de aceleraciones. En sistemas que involucran *impactos*, pueden producirse discontinuidades en variables como la velocidad. Estas discontinuidades se modelan mediante leyes de restitución, que relacionan los estados del sistema antes y después del contacto a través de un coeficiente de restitución que caracteriza la naturaleza del impacto, como es el caso de la ley de Poisson [117] y la ley de Newton [110]. Esta última es adoptada en la presente Tesis para modelar los impactos entre cuerpos rígidos. Esta elección se justifica por su formulación directa en términos de velocidades, lo que facilita su implementación en esquemas de integración temporal formulados a nivel de velocidad. Además, este enfoque permite caracterizar diversos regímenes de impacto, desde colisiones perfectamente elásticas hasta completamente inelásticas.

Matemáticamente, la ley de Newton se expresa como:

$$g_q^j(q)v^+ + e^j g_q^j(q)v^- = 0 \quad \forall j \in \mathcal{U} \quad (2.22)$$

donde j representa los contactos producidos en el sistema, $g_q^j(q)$ denota el gradiente de la restricción de

contacto, $e^j \in [0, 1]$ es el coeficiente de restitución, $\mathbf{v}^-$ es la velocidad previa al impacto, $\mathbf{v}^+$ es la velocidad posterior al impacto y $\mathcal{U}$ es el conjunto de restricciones unilaterales activas. El coeficiente de restitución e^j cuantifica la relación entre la velocidad previa y posterior al impacto, caracterizando la disipación energética de los cuerpos contactores durante la colisión. Un valor $e^j = 1$ corresponde a un impacto perfectamente elástico (conservación de energía), mientras que $e^j = 0$ representa un impacto completamente inelástico (máxima disipación). El principio de conservación de energía impone que el coeficiente de restitución siempre sea menor o igual a uno ($e^j \leq 1$), ya que no puede generarse energía durante un impacto [15].

2.3.5. Ecuaciones de Movimiento a Nivel Velocidad

Para escribir las ecuaciones de movimiento a nivel velocidad se procede a derivar respecto al tiempo las restricciones bilaterales, Ec.(2.14-c), expresándose como:

$$\frac{d}{dt} \left(-\mathbf{g}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}(t)) \right) = -\mathbf{g}_{\mathbf{q}}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}) \mathbf{v} \quad (2.23)$$

Entonces, tras la semidiscretización espacial de las Ecs.(2.14) , las ecuaciones de movimiento para un sistema multicuerpo con restricciones unilaterales y bilaterales se escriben de la siguiente forma a nivel de velocidad:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}^+ \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\mathbf{v} - \mathbf{g}_{\mathbf{q}}^T d\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) dt \quad (2.24b)$$

$$-\mathbf{g}_{\mathbf{q}}^{\bar{\mathcal{U}}} \mathbf{v}^+ = \mathbf{0} \quad (2.24c)$$

$$-\left(\mathbf{g}_{N\mathbf{q}}^j \mathbf{v}^+ + e_N^j \mathbf{g}_{N\mathbf{q}}^j \mathbf{v}^- \right) \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(d\mathbf{i}_N^j), \quad \text{if } g_N^j(\mathbf{q}) \leq 0, \forall j \in \mathcal{U} \quad (2.24d)$$

$$-\left(\mathbf{g}_{T\mathbf{q}}^j \mathbf{v}^+ + e_T^j \mathbf{g}_{T\mathbf{q}}^j \mathbf{v}^- \right) \in \partial\psi_{C(d\mathbf{i}_N^j)}(d\mathbf{i}_T^j), \quad \text{if } g_N^j(\mathbf{q}) \leq 0, \forall j \in \mathcal{U} \quad (2.24e)$$

donde

- $d\mathbf{i}$ es la medida del impulso de la reacción de contacto y de las fuerzas bilaterales.
- $\mathbf{g}_{N\mathbf{q}}$ y $\mathbf{g}_{T\mathbf{q}}$ son las matrices gradientes de restricción en la dirección normal y tangencial al punto de contacto, respectivamente.
- $d\mathbf{i}_N$ y $d\mathbf{i}_T$ son las medidas de impulso de las fuerzas de reacción de contacto en las direcciones normal y tangencial, respectivamente.
- $e_N^j \in [0, 1]$ y $e_T^j \in [-1, 1]$ son los coeficientes de restitución normal y tangencial en el punto de contacto $j \in \mathcal{U}$, respectivamente.
- $\psi_{\mathbb{R}^+}$ es la función indicadora de la semirrecta real $\mathbb{R}^+$ y $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}$ es la subdiferencial de $\psi_{\mathbb{R}^+}$. Mientras que, $\psi_{C(d\mathbf{i}_N)}$ es la función indicadora de una sección del cono de fricción de Coulomb. Las Ecs.(2.24-d-e)

representan las condiciones unilaterales de fricción.

- $d\mathbf{v}$ es la medida diferencial asociada con la velocidad $\mathbf{v}$, que se supone tiene una variación acotada.
- t es el tiempo y dt es su correspondiente medida estándar de Lebesgue.

Como se observa en los trabajos de Brüls, Acary y Cardona [18] y Capobianco et al. [20], las ecuaciones de movimiento pueden ser formuladas a nivel de aceleración, con la limitación de no poder tratar el problema de múltiple impacto.

2.4. Integrador Temporal No Suave

2.4.1. Integrador Temporal α -generalizado no suave para problemas de contacto con fricción.

La versión desacoplada del integrador temporal α -generalizado no suave propuesto por Cosimo et al. [32] se emplea en esta Tesis para integrar las ecuaciones de movimiento (Ec. 2.24). Este integrador da lugar a un sistema de ecuaciones que puede organizarse en tres subproblemas, los cuales pueden resolverse de manera secuencial y desacoplada. Al igual que el integrador de Brüls et al. [17], se caracteriza por una separación entre los campos impulsivos, que se integran con precisión de primer orden, y los campos suaves, que se tratan con precisión de segundo orden mediante el método α -generalizado. La ecuación de movimiento se reformula de manera que las restricciones unilaterales y bilaterales se imponen tanto a nivel de posición como de velocidad. Este procedimiento se inspira en la reducción de índice propuesta por Gear, Leimkuhler y Gupta [54] para sistemas mecánicos con restricciones bilaterales. Diversas estrategias de separación han sido discutidas en trabajos previos [25, 17, 18, 32]. A continuación, se presenta el conjunto final de ecuaciones discretizadas en el tiempo.

Consideremos un paso de tiempo $(t_n, t_{n+1}]$ con tamaño de paso $h = t_{n+1} - t_n$. En el instante t_{n+1} , la separación propuesta por Brüls et al. [17] y considerada también por Cosimo et al. [32] descompone los campos físicos de desplazamiento y de velocidad en contribuciones suaves $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$, y contribuciones no suaves, $\mathbf{U}_{n+1}$ y $\mathbf{W}_{n+1}$ producto de los impactos, de acuerdo con,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{U}_{n+1} \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (2.25b)$$

donde $\mathbf{U}_{n+1}$ es la corrección a nivel posición y $\mathbf{W}_{n+1}$ representa el salto de velocidad.

Cálculo del movimiento suave

Según la versión desacoplada del integrador temporal α -generalizado no suave, el denominado *movimiento suave* se introduce mediante una formulación modificada de las ecuaciones de movimiento presentadas en secciones anteriores, correspondiente al paso de tiempo $n + 1$, en la cual se omiten explícitamente las contribuciones provenientes de las restricciones unilaterales y de las fuerzas de reacción asociadas. Esta aproximación conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1})\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}},T} \left(k_s \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} - p_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \right) = \mathbf{0} \quad (2.26a)$$

$$-k_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.26b)$$

donde $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1}$ es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad en la contribución suave y $\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^T = \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}}}^T(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1})$. En esta formulación, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\bar{\mathbf{U}}}$ es el multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones bilaterales, $p_s \geq 0$ es el parámetro de penalidad, y $k_s > 0$ es un factor de escalado para el multiplicador de Lagrange. El factor de escala k_s contribuye a mejorar el número de condición de la matriz de iteración, lo que produce una mejor tasa de convergencia. La inclusión de este último factor contribuye a mejorar el número de condición de la matriz involucrada en el proceso iterativo, lo cual se traduce en una mayor estabilidad numérica y en una mejor tasa de convergencia del método propuesto sin alterar el resultado final.

Las Ecs. (2.26) se complementan con las relaciones en diferencias definidas por el esquema de integración temporal α -generalizado,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (2.27a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (2.27b)$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_n \quad (2.27c)$$

donde $\mathbf{a}_{n+1}$ representa un término de pseudoaceleración que surge en el marco del integrador α -generalizado [8]. Luego, los coeficientes numéricos γ , β , α_m y α_f pueden ser seleccionados de manera adecuada para lograr un nivel deseado de disipación en alta frecuencia, controlado mediante el radio espectral en el infinito, $\rho_\infty \in [0, 1]$ minimizando al mismo tiempo la disipación no deseada a baja frecuencia [27]:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = 0.5 + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = 0.25(\gamma + 0.5)^2 \quad (2.28)$$

Las Ecs. (2.26) y (2.27) involucran únicamente los desplazamientos suaves $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}$ y las velocidades suaves $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$, por lo que se encuentran desacopladas de las variables $\mathbf{W}_{n+1}$, $\mathbf{U}_{n+1}$, $\mathbf{q}_{n+1}$ y $\mathbf{v}_{n+1}$. En consecuencia, este sistema de cinco ecuaciones puede resolverse de forma independiente para las cinco incógnitas: $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}$,

$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$, $\tilde{\lambda}_{n+1}^{\bar{\mathcal{U}}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ y $\mathbf{a}_{n+1}$, mediante un procedimiento iterativo basado en el algoritmo de Newton-Raphson.

Cálculo de la corrección a nivel posición

Una vez calculado el movimiento suave, se computa la corrección de posición $\mathbf{U}_{n+1}$ con el fin de obtener el desplazamiento $\mathbf{q}_{n+1}$ que satisfaga tanto las restricciones bilaterales, como las restricciones unilaterales de no penetración. Para ello, se adopta un enfoque de tipo Lagrangiano aumentado, siguiendo el método propuesto por Alart y Curnier [3] y aplicado por Galvez et al. [53] para problemas dinámicos con fricción. A nivel de posición, el multiplicador de Lagrange correspondiente a las restricciones unilaterales y bilaterales se denota por $\boldsymbol{\nu}$, y el multiplicador aumentado se define como,

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = k_p \boldsymbol{\nu}_{n+1} - p_p \mathbf{g}_{n+1} \quad (2.29)$$

donde $p_p > 0$ es el parámetro de penalización, $k_p > 0$ es el factor de escala para el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$ y $\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_{n+1})$. El conjunto activo a nivel de posición $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{n+1}$ y su complemento $\bar{\mathcal{A}} \equiv \bar{\mathcal{A}}_{n+1}$ se definen como

$$\mathcal{A}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{U} : \xi_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (2.30a)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}_{n+1} \quad (2.30b)$$

donde $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \bar{\mathcal{U}}$ es el conjunto completo de restricciones. Las ecuaciones para la corrección a nivel de posición son obtenidas siguiendo el enfoque propuesto por Cosimo et al. [32], y se expresan de la siguiente forma,

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) \mathbf{U}_{n+1} - h^2 \mathbf{f}_{n+1}^p - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathcal{A},T} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{0} \quad (2.31a)$$

$$-k_p \mathbf{g}_{n+1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{0} \quad (2.31b)$$

$$-\frac{k_p^2}{p_p} \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\bar{\mathcal{A}}} = \mathbf{0} \quad (2.31c)$$

donde

$$\mathbf{f}_{n+1}^p = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) + (\mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^T - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^T) \tilde{\lambda}_{n+1} \quad (2.32)$$

Finalmente este sistema de ecuaciones puede resolverse para las variables desconocidas $\mathbf{U}_{n+1}$ y $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$ mediante la aplicación del método semi-suave de Newton .

Cálculo del salto de velocidad

Posteriormente a la corrección de posición, se procede a determinar el salto de velocidad $\mathbf{W}_{n+1}$ de forma tal que la velocidad resultante $\mathbf{v}_{n+1}$ cumpla con las restricciones impuestas por el sistema. En particular, se exige que se satisfagan las restricciones bilaterales a nivel de velocidad, expresadas por la condición $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{q}}^{\bar{\mathcal{U}}} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}$, así como la ley de impacto para cada una de las restricciones unilaterales activas en posición. Esta última se formula utilizando la Ley de impacto de Newton definida como $\mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_N^j \mathbf{g}_{\mathbf{q},n}^j \mathbf{v}_n = 0$ para todo $j \in \mathcal{U}$ tal que $\xi_{n+1}^j \geq 0$. Para resolver las ecuaciones de contacto a nivel de velocidad, se adopta nuevamente un enfoque basado en el Lagrangiano aumentado, propuesto por Alart y Curnier [3]. En este marco, el conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones bilaterales y unilaterales a nivel de velocidad se denota por $\mathbf{A}$, y el correspondiente multiplicador aumentado se define como,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = k_v \mathbf{A}_{n+1} - p_v \mathring{\mathbf{g}}_{n+1} \quad (2.33)$$

donde $p_v > 0$ es el parámetro de penalización, $k_v > 0$ es el factor de escala del multiplicador de Lagrange $\mathbf{A}$, y $\mathring{\mathbf{g}}_{n+1}$ es una notación para el término de la ley de impacto de Newton,

$$\mathring{\mathbf{g}}_{n+1}^j = \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_N^j \mathbf{g}_{\mathbf{q},n}^j \mathbf{v}_n \quad (2.34)$$

que se aplica para cada $j \in \mathcal{C}$. Los coeficientes asociados a las restricciones bilaterales se definen trivialmente como $e^j = 0 \forall j \in \mathcal{U}$. Esto da como resultado el siguiente conjunto de ecuaciones para el problema a nivel de velocidad,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \mathbf{W}_{n+1} - h \mathbf{f}_{n+1}^* - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathcal{B},T} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad (2.35a)$$

$$-k_v \mathring{\mathbf{g}}_{n+1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad (2.35b)$$

$$-\frac{k_v^2}{p_v} \mathbf{A}_{n+1}^{\bar{\mathcal{B}}} = \mathbf{0} \quad (2.35c)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{n+1}^* &= \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) \\ &+ (\mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^T - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^T) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} - (\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) - \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1})) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

y donde el conjunto activo $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{n+1}$ y su complemento $\bar{\mathcal{B}} \equiv \bar{\mathcal{B}}_{n+1}$ están dados por

$$\mathcal{B}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : \sigma_{n+1}^j \geq 0\} \quad (2.37a)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_{n+1} \quad (2.37b)$$

Finalmente este conjunto de ecuaciones puede resolverse para las variables desconocidas $\mathbf{W}_{n+1}$ y $\mathbf{A}_{n+1}$ mediante el método semi-suave de Newton.

Como se observa de los desarrollos presentados en esta sección, el uso del integrador α -generalizado no suave propuesto por Cosimo et al. [32] permite un nuevo enfoque para poder tratar los fenómenos de impacto, múltiple impacto o fricción en sistemas mecánicos. Debido a su naturaleza desacoplada, permite mejorar la convergencia y aumentar la eficiencia computacional, manteniendo la precisión en los resultados, respecto a otros integradores desarrollados hasta el momento [115, 17, 20]. Para mayor detalle del integrador ver Anexo A - Sección A.7.

2.5. Fuerza de Contacto

En el enfoque no suave o métodos basados en restricciones geométricas, el paso de tiempo requerido para la integración numérica suele ser considerablemente mayor en comparación con el necesario en los enfoques de penalización, lo que se traduce en un algoritmo más eficiente desde el punto de vista del costo computacional, incluso en presencia de múltiples impactos [2, 33]. No obstante, al adoptar la hipótesis de cuerpos rígidos, este enfoque impide el cálculo explícito de las fuerzas de contacto, ya que no se considera penetración entre los cuerpos y tampoco una duración finita del impacto. Esta limitación adquiere particular relevancia en contextos donde resulta necesario realizar una verificación estructural de los componentes mecánicos involucrados en el sistema. En efecto, las fuerzas de contacto generadas durante los impactos son determinantes para evaluar fenómenos como el daño por fatiga o el desgaste producidos en los componentes de un sistema mecánico. En estos casos, tanto la magnitud como la frecuencia de dichas fuerzas, entre otros factores, influyen directamente en la vida útil del componente y en la confiabilidad del mecanismo en su conjunto.

Con el objetivo de superar esta limitación, en esta tesis se propone una novedosa metodología para calcular las fuerzas de contacto durante el impacto entre dos cuerpos en el marco de métodos de impactos no suaves. La metodología desarrollada combina la eficiencia algorítmica de los métodos no suaves con los parámetros físicos de los métodos suaves. En virtud de ello, esta sección se inicia con una revisión de los modelos de fuerza de contacto basados en formulaciones regularizadas, a fin de establecer los fundamentos necesarios para el posterior desarrollo de la metodología propuesta.

2.5.1. Modelos de Fuerza de Contacto Continuo

Cuando dos cuerpos chocan, por ejemplo, dos esferas con masas m_1 y m_2 y radios R_1 y R_2 , respectivamente, véase la Fig. 2.6, la deformación δ en la zona de contacto (también llamada interpenetración relativa cuando se trata de cuerpos rígidos) produce una fuerza de contacto. Para calcular la magnitud de esta fuerza, la deformación de contacto debe evaluarse utilizando una ley constitutiva que relacione la fuerza de contacto

con la medida de deformación. El intervalo de deformación de los cuerpos se define desde un tiempo inicial t_i hasta un tiempo final t_f , véase la Fig. 2.7-a.

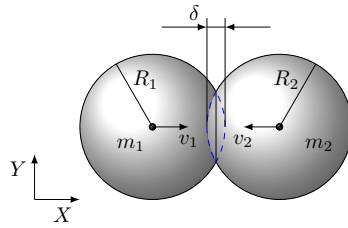
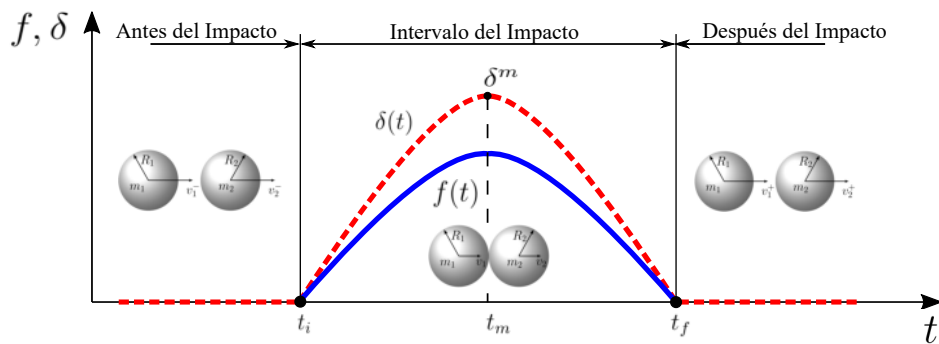
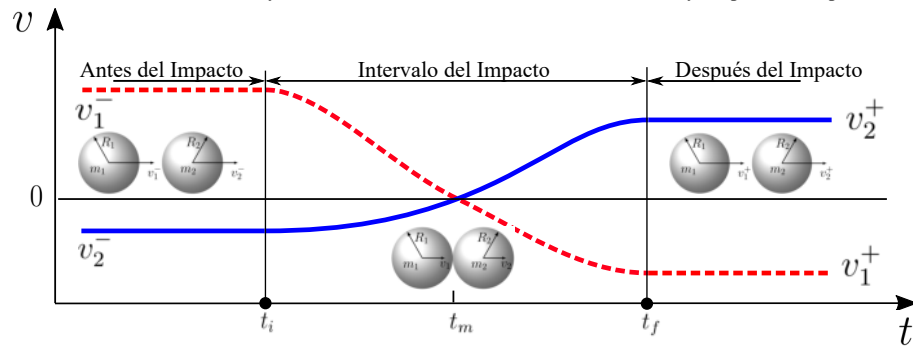


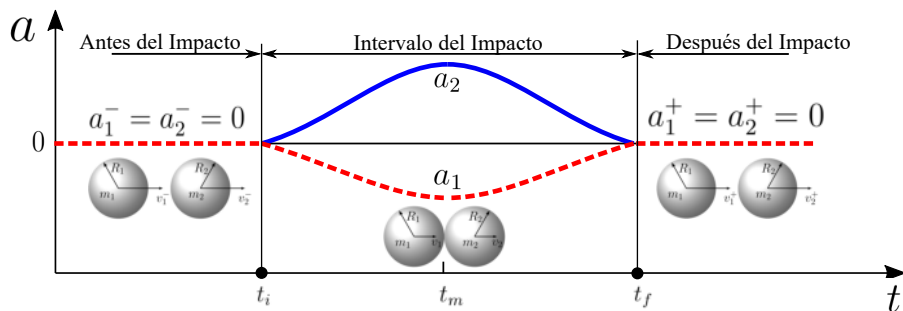
Figura 2.6: Colisión elástica de dos esferas duras deformables.



(a) Evolución de la deformación y fuerza de contacto de las esferas antes, durante y después del impacto.



(b) Evolución de la velocidad de las esferas antes, durante y después del impacto.



(c) Evolución de la aceleración de las esferas antes, durante y después del impacto.

Figura 2.7: Impacto elástico de dos esferas duras deformables.

Para simplificar la explicación del proceso de impacto, supongamos que las esferas 1 y 2 se mueven libremente a lo largo de la dirección X con una velocidad constante previa al impacto v_1^- y v_2^- , respectivamente

(Fig. 2.7-b). Como resultado, las esferas llegan a la colisión con aceleración cero en el tiempo t_i , Fig. 2.7-c. Después del impacto, las esferas se separan con velocidades posteriores al impacto v_1^+ y v_2^+ que suelen ser inferiores a v_1^- y v_2^- , respectivamente, como consecuencia de la disipación de energía. Las observaciones experimentales indican que la deformación entre t_i y t_f se divide en una fase de compresión seguida de una fase de restitución [26]. Durante la fase de compresión, la interpenetración relativa aumenta desde cero en t_i hasta alcanzar un valor máximo δ_m en t_m como muestra la Fig. 2.7-a. Inmediatamente después de t_m , comienza la fase de restitución y continúa hasta que las dos esferas se separan en t_f . Durante este intervalo, la fuerza de contacto y la deformación disminuyen gradualmente a partir del tiempo t_m y desaparece en el tiempo t_f . Una vez que las esferas se separan, $t \geq t_f$, continúan el movimiento con velocidad constante y aceleración cero, como muestran las figuras 2.7-b-c.

Para realizar un análisis del contacto mecánico, es necesario definir una ley constitutiva que relacione la deformación con la fuerza de contacto. El modelo más simple fue propuesto por Hooke en 1661 [69], que es representando por una ecuación de un resorte lineal:

$$F_N(t) = K\delta(t) \quad (2.38)$$

donde K es una rigidez equivalente, que puede determinarse analíticamente, mediante simulaciones por elementos finitos o por ensayos experimentales [138]. $F_N(t)$ representa la fuerza normal de contacto, cuya dirección está determinada por el vector normal a las superficies en contacto. Esta formulación lineal constituye una aproximación limitada, ya que resulta válida únicamente en condiciones de baja velocidad de impacto y no considera la disipación de energía [49]. Para superar estas limitaciones, Hertz propuso un modelo más preciso basado en la teoría clásica de elasticidad [66]:

$$F_N(t) = K\delta(t)^n \quad (2.39)$$

donde K es una rigidez generalizada que depende de las propiedades de los materiales y de la geometría de los cuerpos en contacto, y n es un exponente determinado por la geometría de las superficies en contacto. En el caso de dos esferas en contacto, se tiene $n = 1.5$ y el parámetro K se calcula como:

$$K = \frac{4}{3(\sigma_1 + \sigma_2)} \left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right]^{1/2} \quad (2.40)$$

donde

$$\sigma_r = \frac{1 - \nu_r^2}{E_r}, \quad r = 1, 2 \quad (2.41)$$

siendo ν_r el coeficiente de Poisson y E_r el módulo de Young del material correspondiente. Este modelo tampoco considera la disipación de energía, lo que limita su aplicabilidad a casos puramente elásticos.

Para incorporar los efectos disipativos, se han propuesto distintos modelos. Uno de los más utilizados es el de Hunt y Crossley [72], que combina el modelo no lineal de Hertz con una componente viscosa también no lineal:

$$F_N(t) = K\delta(t)^n + D\delta(t)^n\dot{\delta}(t) \quad (2.42)$$

donde D es el factor de amortiguamiento por histéresis definido como:

$$D = \frac{3K}{2\dot{\delta}_i}(1 - e_N) \quad (2.43)$$

Aquí, $\dot{\delta}_i$ es la velocidad inicial de interpenetración (calculada a partir de las velocidades previas al impacto), y e_N es el coeficiente de restitución normal $e_N = -\dot{\delta}_f/\dot{\delta}_i$, donde $\dot{\delta}_f$ es la velocidad final tras el impacto. Este modelo presenta una buena correlación física con observaciones experimentales y es ampliamente utilizado por su sencillez y robustez, particularmente en situaciones con pérdidas de energía moderadas.

A lo largo de las últimas décadas han sido propuestas diversas modificaciones al modelo de Hunt y Crossley, principalmente en la forma de calcular el parámetro D . La Tabla 2.1 resume algunos de ellos. Una clasificación más completa se presenta en el trabajo de Corral et al. [29] donde se clasifican estos modelos en cinco categorías: (i) obtenidos empíricamente [13, 5]; (ii) calculados por una función no lineal que relaciona D con parámetros físicos del sistema [99, 85, 145]; (iii) modelos que, a partir de una hipótesis simplificada, permiten obtener una expresión explícita del factor por histéresis [88, 134, 14, 147, 77, 76]; (iv) consideran una expresión que relaciona la penetración con su derivada temporal, obteniendo una expresión explícita del coeficiente de restitución y del factor de amortiguamiento por histéresis [143, 146, 123]; (v) finalmente, la quinta categoría agrupa los modelos misceláneos [122, 139, 80].

Tabla 2.1: Diferentes modelos para el factor de amortiguamiento por histéresis.

Modelo	Autores	Expresión de D
1	Hunt y Crossley (1975) [72]	$\frac{3(1-e_N)}{2} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
2	Lankarani y Nikravesh (1990) [88]	$\frac{3(1-e_N^2)}{4} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
3	Hu <i>et al.</i> (2011) [70]	$-\frac{6.66264 \log(e_N)}{3.85238 + \log(e_N)} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
4	Flores <i>et al.</i> (2011) [51]	$\frac{8(1-e_N)}{5e_N} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
5	Zhang <i>et al.</i> (2020) [146]	$\frac{3(1-e_N)(K/\dot{\delta}_i)}{2e_N(0.6181e^{-3.52e_N} + 0.899e^{0.09025e_N})}$

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se abordan los temas más relevantes de las publicaciones anexadas. En primer lugar, se analiza la fricción por deslizamiento, por rodadura y por rotación que surgen debido al contacto entre una esfera considerada rígida y un plano. En una segunda sección, se presenta un elemento de contacto esfera-esfera desarrollado en el marco de esta Tesis, considerando el fenómeno de múltiples impactos con fricción. Finalmente, se presenta una metodología novedosa para el cálculo de la fuerza de contacto con fricción en el marco de la dinámica de contacto no suave.

3.1. Contacto con Fricción entre una Esfera y un Plano

Los problemas de contacto que consideran efectos de fricción introducen una complicación adicional al sistemas de ecuaciones y al desarrollo de las formulaciones, debido a la necesidad de incorporar una ley de fricción, como por ejemplo la ley de Coulomb [34] que es no lineal. Además, una formulación que describa correctamente el movimiento dinámico con fricción entre una esfera y un plano, requiere comprender la influencia del contacto y de las fuerzas de fricción para capturar con precisión: i) el deslizamiento y los movimientos de rotación, ii) la transición entre deslizamiento y rodadura pura (y viceversa), y iii) las fuerzas impulsivas generadas entre los cuerpos en contacto.

En situaciones reales de contacto entre una esfera y un plano, los cuerpos se deforman ligeramente; por lo tanto, no existe un único punto de contacto, sino que se genera una zona de contacto. Sin embargo, existen casos en los que la deformación de uno de los cuerpos puede despreciarse, e incluso situaciones en las que ambos cuerpos pueden considerarse perfectamente rígidos. En este último caso, el efecto de la resistencia a la rodadura está ausente en la formulación, y en consecuencia, no se consideran los efectos disipativos en la interfaz de contacto. Para el estudio de este tipo de situaciones, las soluciones analíticas resultan útiles; no obstante, están restringidas a casos simples, lo que limita su aplicabilidad a problemas más generales [81].

Se pueden considerar tres tipos de modelos de fricción en el contacto entre un cuerpo esférico con una

superficie plana y que se detallan a continuación:

- **Fricción por deslizamiento** (ver Fig. 3.1-a): en este caso, una ley de fuerza multivaluada con dos grados de libertad genera una fuerza F_T que resiste únicamente al deslizamiento. Algunos trabajos que incluyen simulaciones numéricas considerando fricción deslizante se encuentran en [7, 31, 129].
- **Fricción por rodadura** (ver Fig. 3.1-b): en estos modelos se requieren dos grados de libertad traslacionales en la formulación. Se trata de una ley de fuerza multivaluada que genera un momento M_T que se opone a la rodadura. Los primeros experimentos sobre fricción por rodadura fueron realizados por Hersey [65]. Luego otros autores presentaron modelos analíticos de esferas considerando la dinámica no lineal y la fricción por rodadura e impactos [35, 101]. El comportamiento dinámico de algunas aplicaciones ingenieriles han sido estudiados, incluyendo los efectos de fricción por rodadura, entre ellos la rotura y la formación de sistemas de materiales granulares [148, 83, 43, 44, 75]. En esta línea de investigación, Tasora y Anitescu [132] y Huang *et al.* [71] simulaban materiales granulares con partículas esféricas bajo la acción de la gravedad utilizando el modelo estándar desacoplado de fricción por rodadura, formulado como un problema de cono complementario de segundo orden. Recientemente, Acary y Bourrier [2] presentaron una ley de fricción de Coulomb con resistencia a la rodadura formulada como un problema de cono complementario, basada en el trabajo de De Saxcé y Feng [40].
- **Fricción por rotación** (ver Fig. 3.1-c): en este tipo de modelos, la fuerza multivaluada genera un momento M_N que se opone al giro relativo normal entre los cuerpos, por lo que solo se requiere un grado de libertad rotacional. La ley de fricción de Coulomb-Contensou implica la combinación de fricción por deslizamiento y por rotación; es decir, un aumento en la velocidad de deslizamiento provoca una disminución en la magnitud del par de rotación [28, 94]. Diversos trabajos que describen la fricción por rotación, derivados de un pseudopotencial de velocidad no suave y subdiferenciales, han sido presentados por distintos autores [94, 91, 93].

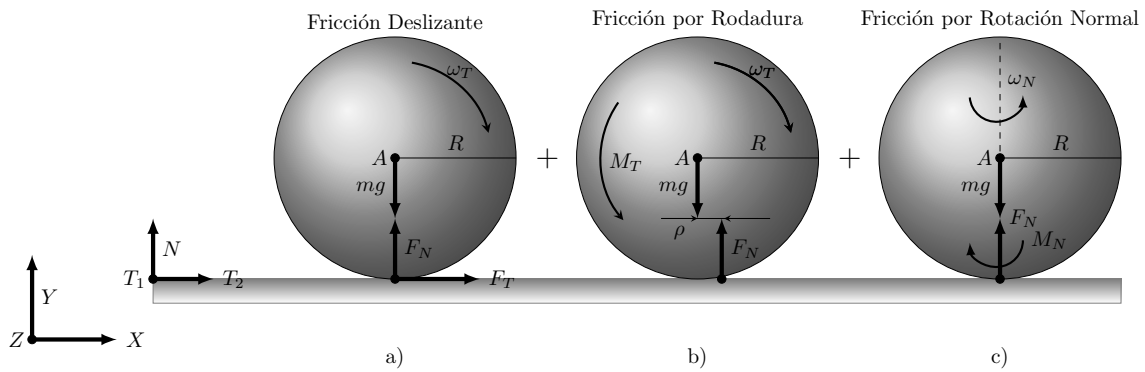


Figura 3.1: Configuración esquemática de los casos de fricción.

En esta sección se presenta una formulación para el análisis del contacto entre un cuerpo rígido esférico y

una superficie plana considerando grandes rotaciones y un marco de referencia inercial, teniendo en cuenta los efectos de fricción por deslizamiento, por rodadura y por rotación. Este enfoque resulta particularmente ventajoso para la descripción general de sistemas multicuerpo con componentes flexibles, ya que permite extender de manera coherente la dinámica de cuerpos rígidos al marco del Método de los Elementos Finitos (FEM), sin necesidad de reformular las ecuaciones para cada ejemplo particular [55]. Por otro lado, las ecuaciones de movimiento se resuelven mediante el integrador temporal α -generalizado no suave, presentado en el Capítulo 2.

3.1.1. Formulación Matemática

En esta sección, se presenta la formulación de un elemento de contacto entre un cuerpo rígido esférico de radio R y peso mg en contacto con una superficie plana horizontal teniendo en cuenta tres efectos: (i) fricción por deslizamiento, (ii) fricción por rodadura y (iii) fricción por rotación, ver Fig.3.1. El efecto (i) se modela con la ley de fricción de Coulomb [34], donde la reacción de contacto F_N (fuerza normal) junto con el coeficiente de fricción μ genera una fuerza resistente al deslizamiento F_T en las direcciones tangenciales T_1 y T_2 , ver Fig. 3.1-a. En el efecto (ii), debido a la distribución de presiones de contacto no simétricas por consecuencia de la deformación de las superficies contactoras, la reacción de contacto F_N se desplaza una distancia ρ del centro de masa, lo que genera un momento de rotación tangencial M_T antagónico, ver Fig. 3.1-b. Finalmente, el efecto (iii) es análogo al caso (ii), con la diferencia que el momento antagónico que se opone a la rotación del cuerpo, M_N , se produce solamente en la dirección normal al plano de contacto, ver Fig. 3.1-c.

La solución general al problema del contacto con fricción unilateral por deslizamiento a nivel posición está dada por,

$$(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) = \operatorname{arginf} \left[\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{U}) + \Pi^c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) \right] \quad (3.1a)$$

$$g_N \geq 0, \quad \nu_N \geq 0, \quad g_N \nu_N = 0; \quad (3.1b)$$

$$\|\mathbf{g}_T\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{\nu}_T\| \leq \mu \nu_N, \quad \|\mathbf{g}_T\| (\|\boldsymbol{\nu}_T\| - \mu \nu_N) = 0; \quad \mathbf{g}_T = -\|\mathbf{g}_T\| \frac{\boldsymbol{\nu}_T}{\|\boldsymbol{\nu}_T\|} \quad (3.1c)$$

donde $\mathbf{U}$ es el vector de corrección de posición global, Π^c es el potencial de contacto y $\Pi^{\text{int,ext}}$ representa la energía potencial de las cargas externas e internas. Luego, g_N es el huelgo normal y $\mathbf{g}_T$ es el desplazamiento relativo tangencial. Por otro lado, ν_N y $\boldsymbol{\nu}_T$ son los multiplicadores de Lagrange a nivel de posición en las direcciones normal y tangencial, respectivamente, y $\boldsymbol{\nu} = [\nu_N \ \boldsymbol{\nu}_T^T]^T$ [53]. En forma similar a la Ec.(3.1), la solución general al problema del contacto con fricción unilateral por deslizamiento a nivel de velocidad está

dada por,

$$(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = \operatorname{arginf} \left[\Pi^{\text{int,ext}}(\mathbf{W}) + \Pi^c(\mathbf{W}, \mathbf{A}) \right] \quad (3.2a)$$

$$\dot{g}_N \geq 0, \quad \Lambda_N \geq 0, \quad \Lambda_N \dot{g}_N = 0; \quad (3.2b)$$

$$\|\dot{\mathbf{g}}_T\| \geq 0, \quad \|\mathbf{A}_T\| \leq \mu \Lambda_N, \quad \|\dot{\mathbf{g}}_T\|(\|\mathbf{A}_T\| - \mu \Lambda_N) = 0 \quad \dot{\mathbf{g}}_T = -\|\dot{\mathbf{g}}_T\| \frac{\mathbf{A}_T}{\|\mathbf{A}_T\|} \quad (3.2c)$$

donde $\mathbf{W}$ es el vector de salto de velocidad global, Λ_N y $\mathbf{A}_T$ son los multiplicadores de Lagrange a nivel de velocidad en las direcciones normal y tangencial, respectivamente, y $\mathbf{A} = [\Lambda_N \ \mathbf{A}_T^T]^T$. Luego, la ley de impacto de Newton en la dirección normal y tangencial es, respectivamente,

$$\dot{g}_{N_{n+1}} = g_{Nq,n+1} \mathbf{v}_{n+1} + e_N g_{Nq,n} \mathbf{v}_n \quad \dot{\mathbf{g}}_{T_{n+1}} = \mathbf{g}_{Tq,n+1} \mathbf{v}_{n+1} + e_T \mathbf{g}_{Tq,n} \mathbf{v}_n \quad (3.3)$$

donde e_N y e_T son los coeficientes de restitución de normal y tangencial, respectivamente. Las ecuaciones que describen la resistencia de fricción por rodadura o por rotación son análogas a las Ecs.(3.1, 3.2). No obstante, en esta sección se expresarán únicamente a nivel de velocidad, con el objetivo de simplificar su implementación numérica. La formulación completa puede consultarse en el Anexo A. El momento impulsivo antagónico tridimensional χ , que actúa sobre la esfera a nivel de velocidad, puede descomponerse en la dirección normal al plano N y en las direcciones tangenciales $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en el punto de contacto (Fig. 3.1). A partir de esta descomposición, las ecuaciones de desigualdad para la condición de contacto con fricción por rodadura son,

$$\|\chi_T\| \geq 0 \quad \|\chi_T\| \leq \rho \Lambda_N \quad \|\omega_T\|(\|\chi_T\| - \rho \Lambda_N) = 0 \quad \omega_T = -\frac{\|\omega_T\| \chi_T}{\|\chi_T\|} \quad (3.4)$$

donde $\chi_T = \chi_1 \mathbf{T}_1 + \chi_2 \mathbf{T}_2$ es el momento tangencial impulsivo antagónico, $\omega_T = \omega_1 \mathbf{T}_1 + \omega_2 \mathbf{T}_2$ es la componente tangencial de la velocidad angular y ρ es el coeficiente de rodadura con unidad de longitud. De forma similar al caso anterior, la componente normal de χ produce una resistencia de rotación. Nuevamente, para el caso de fricción normal las restricciones se expresan como ecuaciones de desigualdad a nivel de velocidad pero teniendo en cuenta únicamente la dirección dada por el vector $\mathbf{N}$, ver Fig. 3.1-c, por lo tanto,

$$|\chi_N| \geq 0 \quad |\chi_N| \leq \gamma \Lambda_N \quad |\omega_N|(|\chi_N| - \gamma \Lambda_N) = 0 \quad \omega_N = -\frac{|\omega_N| \chi_N}{|\chi_N|} \quad (3.5)$$

donde $\chi_N = \chi_3 \mathbf{N}$ es el momento normal impulsivo antagónico, $\omega_N = \omega \cdot \mathbf{N}$ es la componente normal de la velocidad angular y γ es un parámetro equivalente a ρ . El problema de minimización no lineal con restricciones de la Ec. (3.1) se regulariza por medio de un Lagrangiano aumentado como el que presenta Alart

y Curnier [3], esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^p(\mathbf{q}_{n+1}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}) = & -k_p g_{N,n+1} \nu_{N,n+1} + \frac{p_p}{2} (g_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_p} \text{dist}^2 [\xi_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_p \mathbf{g}_{T,n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} + \frac{p_p}{2} \|\mathbf{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_p} \text{dist}^2 [\boldsymbol{\xi}_{T,n+1}, C_{\xi_N}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{q}$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\xi_N = k_p \nu_{N,n+1} - p_p g_{N,n+1}$ es el multiplicador de Lagrange aumentado a nivel posición en la dirección normal mientras que, $\boldsymbol{\xi}_T = k_p \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} - p_p \mathbf{g}_{T,n+1}$ es el correspondiente en la dirección tangencial. Luego, p_p y k_p son el parámetro de penalización y el factor de escala para el multiplicador de Lagrange a nivel posición respectivamente. Como se dijo anteriormente, los coeficientes p_p y k_p contribuyen a mejorar la tasa de convergencia global sin afectar el resultado final. La función $\text{dist}(z, C)$ representa la distancia entre un punto $z \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto convexo C , [92]. El cono C_{ξ_N} es el conjunto convexo definido por la extensión del cono de fricción hasta la semirrecta $\mathbb{R}^-(\xi_N)$, ver Fig. 3.2-a.

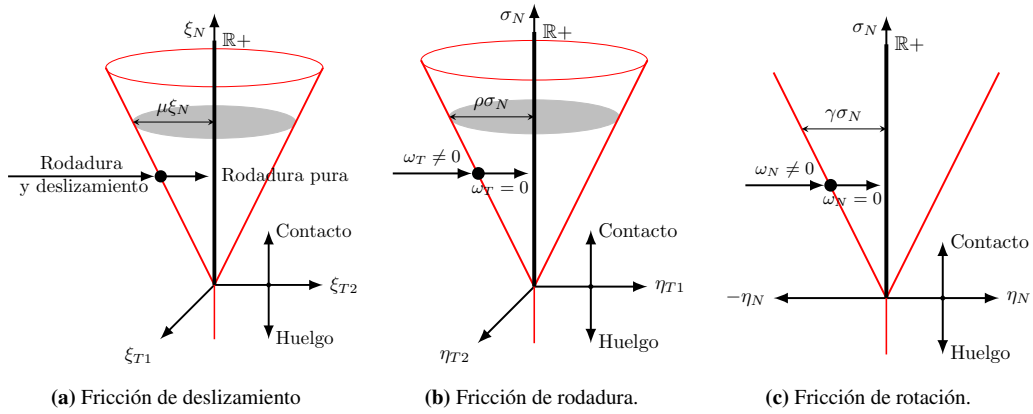


Figura 3.2: Conos de fricción.

A nivel velocidad el Lagrangiano aumentado que resuelve el problema de contacto teniendo en cuenta la fricción por deslizamiento, por rodadura y por rotación es,

$$\mathcal{L}^v = \mathcal{L}_S^v + \mathcal{L}_R^v + \mathcal{L}_D^v \quad (3.7)$$

donde, $\mathcal{L}_S^v$, $\mathcal{L}_R^v$ y $\mathcal{L}_D^v$ son los Lagrangianos aumentados a nivel de velocidad para la fricción por deslizamiento, por rodadura y por rotación respectivamente. El $\mathcal{L}_S^v$ que regulariza la Ec.(3.2) es, análogo al que se presenta en la Ec. (3.6), es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^v(\mathbf{v}_{n+1}, \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}) = & -k_v \dot{g}_{N,n+1} \Lambda_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} (\dot{g}_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\sigma_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_v \dot{\mathbf{g}}_{T,n+1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\dot{\mathbf{g}}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\boldsymbol{\sigma}_{T,n+1}, C_{\sigma_N}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\sigma_N = k_p \Lambda_N - p_v \dot{g}_N$ y $\boldsymbol{\sigma}_T = k_v \boldsymbol{\Lambda}_T - p_v \dot{\mathbf{g}}_T$ son los multiplicadores de Lagrange aumentado a nivel

de velocidad en la dirección normal y tangencial, respectivamente y C_{σ_N} el cono de fricción de Coulomb aumentado expresado en términos de variables de velocidad. Los parámetros p_v y k_v son análogos a p_p y k_p , respectivamente [53], ver Fig. 3.2-b. El Lagrangiano aumentado a nivel de velocidad que regulariza el problema de fricción por rodadura, Ec.(3.4) resulta,

$$\mathcal{L}_R^v(\omega_{T,n+1}, \chi_{T,n+1}) = -k_v \omega_{T,n+1} \cdot \chi_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\omega_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2[\eta_{T,n+1}, C_{\chi_T \sigma_N}] \quad (3.9)$$

donde, $\eta_{T,n+1} = k_v \chi_{T,n+1} - p_v \omega_{T,n+1}$, es el multiplicador de Lagrange aumentado y $C_{\chi_T \sigma_N}$ es el cono de fricción extendido a la semirrecta $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$, ver Fig. 3.2-b. Finalmente, el Lagrangiano aumentado a nivel de velocidad que regulariza el problema de fricción por rotación, Ec.(3.5) es,

$$\mathcal{L}_D^v(\omega_{N,n+1}, \chi_{N,n+1}) = -k_v \omega_{N,n+1} \chi_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\omega_{N,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2[\eta_{N,n+1}, C_{\eta_N \sigma_N}] \quad (3.10)$$

donde, $\eta_{N,n+1} = k_v \chi_{N,n+1} - p_v \omega_{N,n+1}$ es el multiplicador de Lagrange aumentado y $C_{\eta_N \sigma_N}$ es el conjunto convexo definido por η_N a la semirrecta $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$, ver Fig. 3.2-c. Considerando el vector de grados de libertad generalizados $\Phi = [q^T \ \nu^T]^T$, la variación virtual del Lagrangiano aumentado, Ec.(3.6), da como resultado los vectores de fuerza a nivel de posición asociados a la fricción por deslizamiento para las distintas condiciones de contacto,

$$\delta \mathcal{L}_S^p(\Phi) = \delta \Phi^T F_S^p(\Phi) \rightarrow F_S^p(\Phi) = \begin{cases} F_{S,H}^p & \xi_N < 0 \quad \text{Huelgo} \\ F_{S,D}^p & \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N \quad \text{Deslizamiento} \\ F_{S,R}^p & \|\xi_T\| < \mu \xi_N \quad \text{Rodadura Pura} \end{cases} \quad (3.11)$$

A nivel de velocidad, la variación virtual del Lagrangiano aumentado, Ec.(3.8), da como resultado los vectores de fuerza a nivel de velocidad asociados a la fricción por deslizamiento para las distintas condiciones de contacto,

$$\delta \mathcal{L}_S^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T F_S^v(\dot{\Phi}) \rightarrow F_S^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} F_{S,H}^v & \sigma_N < 0 \quad \text{Huelgo} \\ F_{S,D}^v & \|\sigma_T\| \geq \mu \sigma_N \quad \text{Deslizamiento} \\ F_{S,R}^v & \|\sigma_T\| < \mu \sigma_N \quad \text{Rodadura Pura} \end{cases} \quad (3.12)$$

donde $\dot{\Phi} = [v^T \ \Lambda^T \ \chi^T]^T$ con $\Lambda = [\Lambda_N \ \Lambda_T^T]$ y $\chi = [\chi_N \ \chi_T^T]^T$. La variación virtual del Lagrangiano aumentado, Ec.(3.9) da como resultado los vectores de fuerza a nivel de velocidad para la fricción por

rodadura,

$$\delta \mathcal{L}_R^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T \mathbf{F}_R^v(\dot{\Phi}) \rightarrow \mathbf{F}_R^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{R,H}^v & \sigma_N < 0 \\ \mathbf{F}_{R,D}^v & \|\eta_T\| < \rho \sigma_N \\ \mathbf{F}_{R,R}^v & \|\eta_T\| \geq \rho \sigma_N \end{cases} \quad (3.13)$$

Por último, la variación virtual del Lagrangiano aumentado, Ec.(3.10), da como resultado los vectores de fuerza a nivel de velocidad para la fricción por rotación,

$$\delta \mathcal{L}_D^v(\dot{\Phi}) = \delta \dot{\Phi}^T \mathbf{F}_D^v(\dot{\Phi}) \rightarrow \mathbf{F}_D^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \mathbf{F}_{D,H}^v & \sigma_N < 0 \\ \mathbf{F}_{D,D}^v & \|\eta_N\| < \gamma \sigma_N \\ \mathbf{F}_{D,R}^v & \|\eta_N\| \geq \gamma \sigma_N \end{cases} \quad (3.14)$$

Finalmente, la linealización de estos vectores permite obtener las matrices Hessianas asociadas. Para un desarrollo más detallado de estas matrices, ver Apéndice A2 del Anexo A. Hasta el momento, tanto los vectores de fuerza como las matrices Hessianas han sido formulados de manera general, a partir de una definición adecuada del vector de huelgo y de sus gradientes en las direcciones normal y tangenciales. En la siguiente sección se analiza en detalle el caso particular del elemento de contacto con fricción entre una esfera y un plano, teniendo en cuenta las definiciones generales que se presentaron en esta sección.

3.1.2. Elemento de Contacto Esfera-Plano

A continuación se presenta un elemento tridimensional que resuelve el contacto entre un cuerpo rígido esférico y un plano rígido fijo, ver Fig. 3.3. La estrategia adoptada para describir el movimiento general de los cuerpos es el MEF no lineal, donde las coordenadas globales de los cuerpos se refieren a un marco inercial único [55]. Para ello, primero se propone un sistema de coordenadas cartesianas en un nodo P del plano de contacto que viene dado por los vectores $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^3$ referido a un sistema de coordenadas inercial $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$, ver Fig. 3.3. El huelgo entre el punto de contacto de la esfera y el nodo P se puede descomponer en una dirección normal y en dos direcciones tangenciales de la siguiente manera,

$$\mathbf{g}_{n+1} = g_{N,n+1} \mathbf{N} + g_{T1,n+1} \mathbf{T}_1 + g_{T2,n+1} \mathbf{T}_2 \quad (3.15)$$

con $g_N \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}_{T,n+1} = [g_{T1,n+1} \ g_{T2,n+1}]^T \in \mathbb{R}^2$. Teniendo en cuenta que la esfera posee un radio r , la separación normal g_N en la configuración actual se calcula como la proyección normal de la distancia entre los nodos A y P , menos r , es decir,

$$g_{N,n+1} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{X}_P) - r \quad (3.16)$$

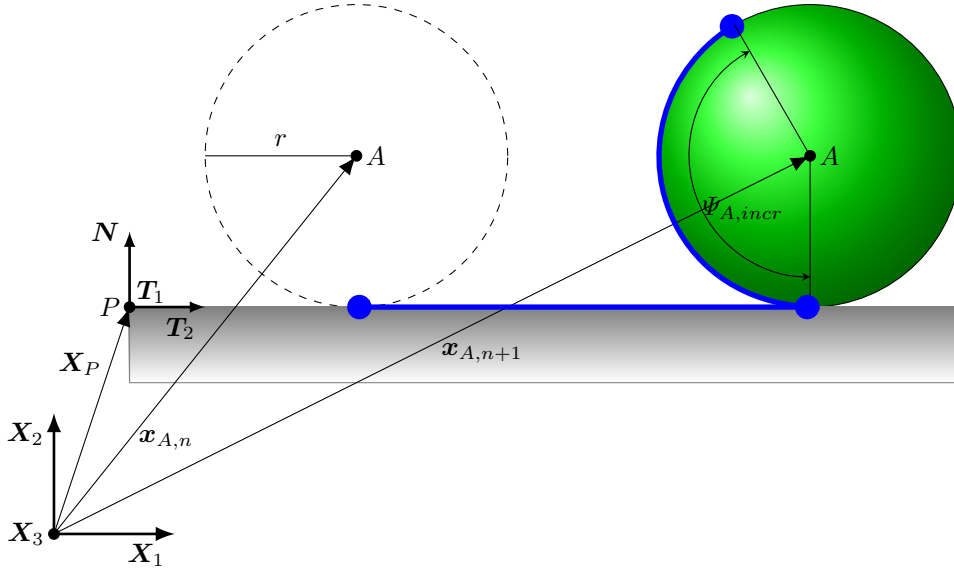


Figura 3.3: Elemento de Contacto Esfera-Plano.

donde $\mathbf{x}_A$ es la posición del nodo A en la configuración actual y $\mathbf{X}_P$ es la posición del nodo P . La separación normal g_N representa la distancia más corta desde la superficie de la esfera hasta el plano en la configuración actual. Como es habitual en problemas de contacto, si esta medida es mayor que cero implica que la esfera está separada del plano, mientras que si $g_N = 0$ indica que la esfera está en contacto.

Por otro lado, durante un intervalo de tiempo $(t_n, t_{n+1}]$, cuando los cuerpos están en contacto (es decir, $g_N = 0$), la restricción cinemática que impone si la esfera está en rodadura pura o se desliza se determina a partir del vector tangencial incremental $\mathbf{g}_T$, definido como:

$$\mathbf{g}_{T,n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,incr} \times \mathbf{N}) r - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \\ \mathbf{T}_2 \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,incr} \times \mathbf{N}) r - \mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde $\boldsymbol{\Psi}_{A,incr}$ es el vector de incremento de rotación del nodo A en la configuración actual. En este caso, el término $\mathbf{T}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n})$ representa la componente del desplazamiento del nodo A en la dirección $\mathbf{T}_\alpha$, con $\alpha = 1, 2$. El término $\mathbf{T}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,incr} \times \mathbf{N}) r$ representa el incremento de la longitud del arco sobre la superficie de la esfera debido a la rotación. Por lo tanto, pueden definirse dos escenarios: i) si $\mathbf{g}_T = \mathbf{0}$, la esfera se encuentra en un movimiento de rodadura pura, ya que el desplazamiento del punto de contacto sobre el plano coincide con la longitud de arco recorrida sobre la superficie de la esfera (ver Fig. 3.3); ii) si $\mathbf{g}_T \neq \mathbf{0}$, la esfera se encuentra en un movimiento de deslizamiento.

Por otro lado, la velocidad de la esfera se puede definir tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec.(3.15), entonces,

$$\mathbf{v}_{n+1} = v_{N,n+1} \mathbf{N} + v_{T_1,n+1} \mathbf{T}_1 + v_{T_2,n+1} \mathbf{T}_2 \quad (3.18)$$

Finalmente, se tiene que este elemento de contacto tiene un grado de libertad de traslación y otro de rotación,

por lo tanto, los vectores de coordenadas generalizadas a nivel de posición y de velocidad están dados respectivamente por:

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{x}_A^T \boldsymbol{\Psi}_{A,incr}^T \right]^T \quad \mathbf{v} = \left[\dot{\mathbf{x}}_A^T \dot{\boldsymbol{\Psi}}_{A,incr}^T \right]^T \quad (3.19)$$

donde el punto denota la diferenciación respecto al tiempo. Para mayor detalle ver Anexo A, Sección A.5.

3.1.3. Ejemplo Numérico

El ejemplo que estudiaremos en detalle en esta sección fue propuesto originalmente por Marques et al. [102]. El mismo consiste en un sistema mecánico biela-manivela donde la biela tiene un rodillo esférico en contacto con un plano, ver Fig. 3.4.

En el trabajo de Marques et al. [102] se consideran únicamente cuerpos rígidos. Aquí se analizan dos casos distintos: en el primero, todos los cuerpos son considerados rígidos para validar la propuesta con Marques et al. [102]; y en el segundo caso se incorpora flexibilidad en la biela utilizando ocho elementos de viga [95]. Las soluciones numéricas de ambos casos se comparan con el objetivo de estudiar la influencia de la flexibilidad en la dinámica del sistema. La manivela gira alrededor del eje Z con una velocidad angular inicial de $\omega_c = 4$ rad/s, mientras que el rodillo tiene una velocidad angular inicial antihoraria de $\omega_r = 8$ rad/s. La aceleración de la gravedad es $g = 9.8$ m/s² en la dirección negativa del eje Y . La biela está unida a la manivela por una junta perfecta. El comportamiento dinámico se estudia analizando las gráficas de la evolución de la aceleración angular γ en el centro del rodillo esférico.

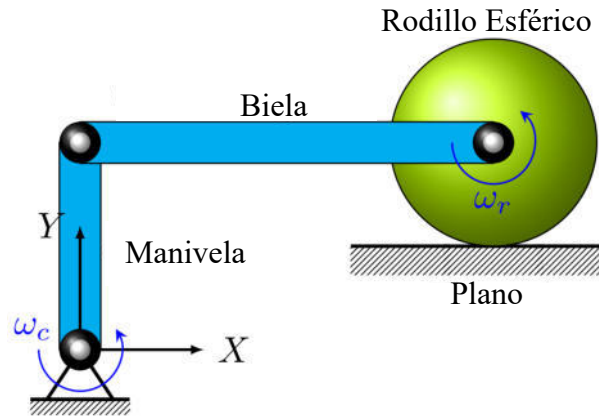


Figura 3.4: Configuración del mecanismo biela-manivela con rodillo.

Mecanismo biela-manivela con rodillo rígido

En el primer caso, el mecanismo está compuesto únicamente por elementos rígidos. Las longitudes, las masas y las propiedades de inercia de cada cuerpo se presentan en la Tabla 3.1, según la referencia [102].

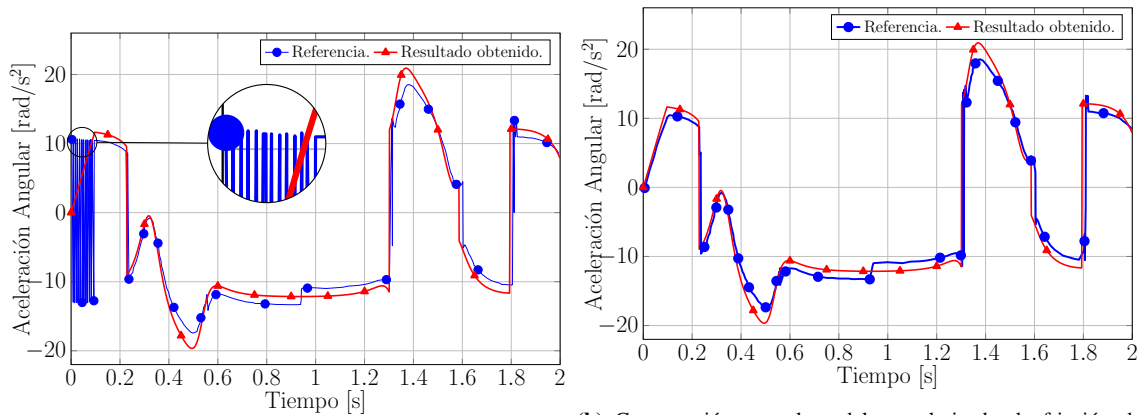
El contacto entre el rodillo esférico y el suelo se modela utilizando el elemento de contacto esfera-plano presentado en la sección anterior Sec.(3.1.2). El coeficiente de fricción entre el rodillo y el plano es $\mu = 0.1$,

Cuerpo	Longitud/Radio [m]	Masa [kg]	Inercia rotacional [kgm ²]
Manivela	0.1	0.12	0.002
Biela	0.30	0.3	0.002
Rodillo	0.05	0.1	0.001

Tabla 3.1: Dimensiones, masa y propiedades de inercia de los cuerpos.

los coeficientes de rodadura, de giro y los de restitución fueron fijados en cero. Los parámetros del esquema de integración temporal fueron definidos de la siguiente manera: un paso de tiempo constante de 10^{-3} s, un radio espectral $\rho_{\infty} = 0$, un tiempo total de 2 s y una tolerancia para la convergencia de Newton igual a 10^{-5} .

La solución numérica del problema arrojó que el número máximo de iteraciones por paso de tiempo fue de 1, 3 y 2 para los subproblemas suave, de posición y de velocidad, respectivamente. El promedio de iteraciones fue de 1, 2 y 1. La Figura 3.5 muestra la evolución de la aceleración del rodillo obtenida con el elemento desarrollado en esta Tesis y su comparación con los resultados de referencia. En el trabajo presentado por Marques et al. [102], los autores utilizaron un modelo discontinuo de fricción de Coulomb. Sus soluciones numéricas presentan oscilaciones espurias entre 0 y 0.2 s como consecuencia de una discontinuidad cuando la velocidad tangencial relativa es cero, véase el detalle de la Fig. 3.5-a. Para evitar esta inestabilidad numérica, los autores propusieron varias formulaciones alternativas, en las que la ley de fricción de Coulomb original es reemplazada por una versión regularizada en el entorno de velocidad nula. En cambio, con la formulación presentada en esta Tesis se obtienen soluciones numéricas estables cerca de la velocidad nula, sin modificar la ley de fricción de Coulomb. Esto puede observarse en la Fig. 3.5-b, donde la solución propuesta en esta Tesis se compara con la obtenida mediante el enfoque regularizado del trabajo de Marques et al. [102]. Finalmente, a partir de la Fig. 3.5-b se aprecia una buena concordancia entre ambas curvas, validando la propuesta.



(a) Comparación con el modelo discontinuo de fricción de Coulomb. (b) Comparación con el modelo regularizado de fricción de Coulomb.

Figura 3.5: Aceleración angular para el caso con cuerpos rígidos. Comparación con las soluciones de Marques *et al.*, véase [102].

Mecanismo flexible/rígido vs. mecanismo rígido

El mecanismo biela-manivela con rodillo modelado en esta sección considera la flexibilidad de la biela. El objetivo es demostrar la capacidad de la metodología presentada para simular sistemas mecánicos considerando cuerpos flexibles. Las longitudes de la manivela, la biela y el rodillo son las mismas que las presentadas en la Tabla 3.1, así como la masa y el momento de inercia de la manivela. La configuración inicial, los coeficientes de restitución, el tiempo de simulación y el coeficiente de fricción μ también coinciden con los utilizados en la Sec. (3.1.3). Ahora, además de la flexibilidad, se incorpora un coeficiente de rodadura con un valor de $\rho = 0.01$ m en la unión rodillo/superficie. Los parámetros del integrador también coinciden con los usados en la Sec. (3.1.3). El área de la sección transversal y el momento de inercia transversal de la biela son $1.1323 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $1.0685 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, respectivamente. Se asume un material elástico con un módulo de Young de $4.14 \times 10^9 \text{ Pa}$, una densidad de 7850 kg/m^3 y un coeficiente de Poisson de 0.3. Con estas características geométricas y mecánicas, la inercia de la biela es aproximadamente igual a la del caso rígido, mientras que la masa es levemente inferior (0.2667 kg frente a 0.3 kg).

La Figura 3.6 muestra la diferencia entre el caso rígido y el flexible para las aceleraciones angulares del rodillo. Se observa que la respuesta flexible es más oscilatoria y que existe un leve retardo en la respuesta respecto al caso rígido, como consecuencia de la deformación de la biela y de los efectos de fricción y rodadura.

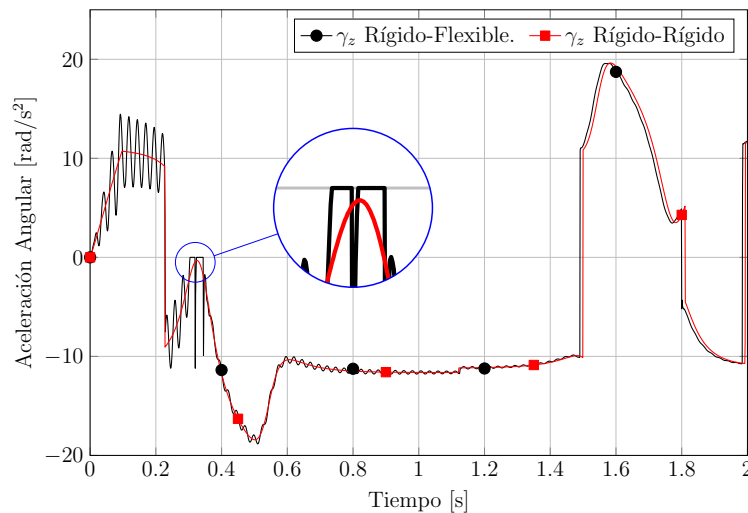


Figura 3.6: Aceleración angular del rodillo. Caso flexible vs. rígido.

Luego, la Fig. 3.7-a muestra la deformación de la biela, como consecuencia de introducir la flexibilidad. En esta figura, a partir de la diferencia de desplazamiento angular entre ambos extremos de la biela se evidencia una disminución de la deformación en el tiempo debido a la reducción de la velocidad del sistema por efectos de fricción. Luego, la Fig. 3.7-b muestra que el rodillo rebota en dos instantes del movimiento. Como consecuencia de estos rebotes, el rodillo se encuentra en movimiento de vuelo libre y, por tanto, la aceleración angular es nula durante ese período de tiempo, véase el detalle de la Fig. 3.6.

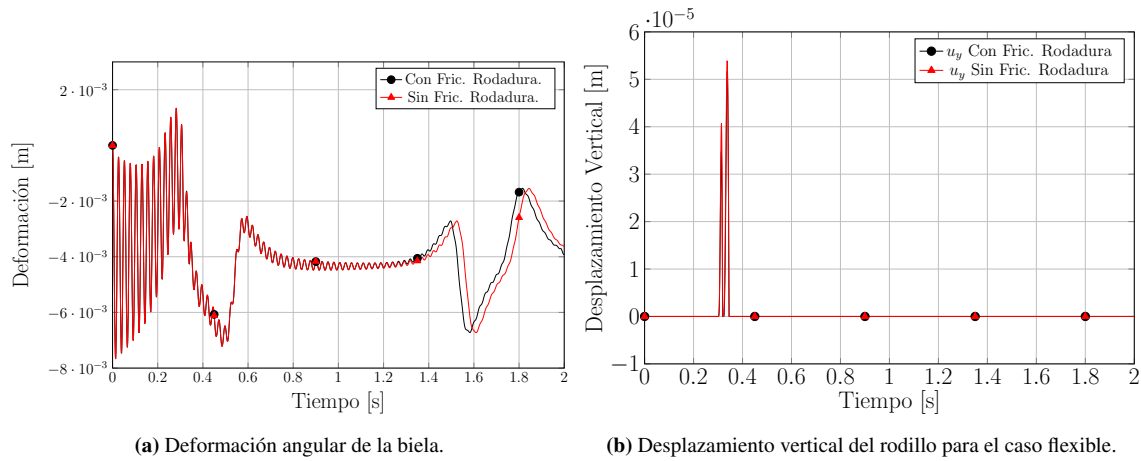


Figura 3.7: Resultados Caso Flexible

Finalmente, para el caso rígido se reportó un número máximo de iteraciones de 1, 3 y 3, y un promedio de 1, 2 y 2 en tanto que para el caso flexible, el número máximo de iteraciones fue 2, 3 y 1, con un promedio de 2, 2 y 1.

3.2. Múltiple Impacto con Fricción

En el estudio de impacto pueden distinguirse dos tipos de colisiones: (i) **impactos simples**, cuando dos cuerpos interactúan en un único punto de contacto y (ii) **impactos múltiples**, cuando varios cuerpos colisionan simultáneamente en distintos puntos de contacto o en eventos sucesivos muy cercanos en el tiempo [111].

Las colisiones simples suelen modelarse mediante leyes clásicas como las de Newton o Poisson [105]. Aunque estas leyes han sido adaptadas para abordar el modelado de impactos múltiples, dicha extensión no es directa. En términos generales, los modelos propuestos en la literatura para el estudio de múltiples impactos pueden clasificarse en tres categorías principales:

- **Modelos algebraicos**, establecen relaciones entre las velocidades antes y después del impacto mediante leyes explícitas o implícitas [16, 105, 74, 22]. Aunque son computacionalmente eficientes y de implementación sencilla, presentan inconsistencias a medida que aumenta la fricción en el sistema [11].
- **Modelos dinámicos de primer orden**, siguen el enfoque de Darboux [37]-Keller [84]. Suponen constantes las posiciones y utiliza el impulso como una nueva escala de tiempo [89, 73, 97]. Estos modelos permiten una representación más realista del intercambio de cantidad de movimiento, aunque también requieren supuestos adicionales para resolver ambigüedades.
- **Modelos dinámicos de segundo orden**, emplean modelos deformables con flexibilidad concentrada, tales como modelos resorte-amortiguador lineales o no lineales [144], así como el Método de Elementos Discretos (DEM) [59] o el Método de Elementos Finitos (FEM) [96].

Cuando se asume una duración infinitesimal del impacto, el cambio de velocidad se modela mediante leyes de impacto, siendo la ley de Newton una de las más utilizadas. En este marco, Moreau [106] formuló el problema del impacto como una inclusión diferencial, lo cual constituye una base matemática rigurosa para su implementación computacional dentro del enfoque de dinámica no suave. Sin embargo, en situaciones de impacto múltiple, las soluciones pueden no ser únicas o resultar poco representativas frente a observaciones experimentales [19]. Diversas estrategias han sido desarrolladas para abordar estas limitaciones [52, 10, 74], y sus ventajas y desventajas han sido ampliamente discutidas por Nguyen y Brogliato [111].

Más recientemente, Cósimo et al. [33] propusieron una extensión del integrador temporal α -generalizado no suave para simular múltiples impactos sin fricción, el cual permite la acumulación progresiva de los impulsos dentro de un mismo intervalo de tiempo. La principal ventaja de este método es que no requiere la sincronización exacta del paso temporal con los eventos de impacto y, a diferencia del modelo de Moreau, puede manejar una gran cantidad de impactos.

En esta tesis se propone una extensión del algoritmo de Cósimo et al. [33] para incorporar fricción en el modelado de colisiones múltiples entre cuerpos rígidos esféricos. La formulación se basa en modificar dinámicamente el conjunto activo durante la corrección de velocidad, resolviendo una secuencia de subproblema dentro de un intervalo temporal tendiente a cero. Para cada subproblema, se redefine el conjunto activo en las direcciones normal y tangencial, permitiendo considerar contactos con fricción utilizando la ley no lineal de Coulomb de manera consistente. Si bien la ley de Coulomb representa una idealización, pues asume un coeficiente de fricción constante, en esta Tesis se la considera adecuada para capturar el comportamiento dinámico global de los mecanismos estudiados.

3.2.1. Formulación Matemática

A continuación se presenta la formulación del algoritmo para el análisis de múltiple impacto con fricción. De acuerdo con el trabajo de [33], el conjunto activo de impacto simple es,

$$\mathcal{G}_{n+1} = \overline{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : \dot{g}_{Nq,n+1}^j \tilde{\mathbf{v}} < \text{tol}_v \quad \text{y} \quad \sigma_{N,n+1}^j \geq 0\} \quad (3.20)$$

donde $\overline{\mathcal{U}}$ el conjunto de restricciones bilaterales, $\mathcal{U}$ denota el conjunto de restricciones unilaterales y $\mathcal{A}$ el conjunto activo de restricciones unilaterales y bilaterales. Luego, la tolerancia tol_v se define como una fracción de la velocidad característica del problema. Para más detalle de la selección de este valor, ver el trabajo presentado por Cósimo et al. [33]. Luego, la Ec. (3.20) se reemplaza por el conjunto activo de múltiple impacto,

$$\mathcal{G}_{n+1}^* = \overline{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : \dot{g}_{Nq,n+1}^{*j} \tilde{\mathbf{V}}^- < \text{tol}_v \quad \text{y} \quad \sigma_{N,n+1}^{*j} \geq 0\} \quad (3.21)$$

donde, $\tilde{\mathbf{V}}^- = [\tilde{\mathbf{V}}_A^{-,T} \ \tilde{\mathbf{V}}_B^{-,T} \ \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_A^{-,T} \ \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_B^{-,T}]^T$ es el vector actualizado de la velocidad de pre-impacto $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ para las próximas iteraciones. Por lo tanto, la ley de impacto de Newton en la dirección normal y tangencial definida para cada $j \in (\bar{\mathcal{U}} \cup \mathcal{U})$ se define como,

$$\mathring{g}_{N,n+1}^{*,j} = g_{Nq,n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_N^j g_{Nq,n}^j \mathbf{V}^- \quad \mathring{g}_{T,n+1}^{*,j} = g_{Tq,n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_T^j g_{Tq,n}^j \mathbf{V}^- \quad (3.22)$$

donde $\mathbf{V}^- = [\mathbf{V}_A^{-,T} \ \mathbf{V}_B^{-,T} \ \boldsymbol{\Omega}_A^{-,T} \ \boldsymbol{\Omega}_B^{-,T}]^T$ es el vector actualizado de la velocidad de pre-impacto $\mathbf{v}_n$ para las próximas iteraciones, por lo tanto $\mathbf{V}^- = \mathbf{v}_n + \mathbf{W}_{n+1}$. Finalmente, el multiplicador aumentado modificado a nivel de velocidad en la dirección normal y tangencial se define como,

$$\sigma_{N,n+1}^* = [k_v \Lambda_{N,n+1} - p_v \mathring{g}_{N,n+1}^*] \quad \sigma_{T,n+1}^* = [k_v \Lambda_{T,n+1} - p_v \mathring{g}_{T,n+1}^*] \quad (3.23)$$

Luego, los impulsos resultantes se tienen que acumular y tener en cuenta en la siguiente secuencia para cada problema de impacto. Por lo tanto, los impulsos acumulados en las direcciones normales y tangenciales de cada contacto vienen dados por las siguientes ecuaciones, respectivamente,

$$\mathbf{P}_N = \sum_j^{i-1} g_{Nq}^{*,T} \Lambda_N^{\mathcal{G}_j^*} \quad \mathbf{P}_T = \sum_j^{i-1} g_{Tq}^{*,T} \Lambda_T^{\mathcal{G}_j^*} \quad (3.24)$$

donde el índice i se utiliza para denotar el problema del impacto en la secuencia de impactos que se están resolviendo actualmente. Finalmente, el vector de fuerza interna con la modificación para múltiple impacto con fricción está dado por,

$$\mathbf{F}^{v*,\mathcal{G}^*}(\Phi) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_N^{\mathcal{G}^*} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_T^{\mathcal{G}^*} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^{*,T} \sigma_N^* - \mu \sigma_N^* g_{Tq}^{*,T} \boldsymbol{\tau}_v - \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_T \\ -k_p \mathring{g}_N^* \\ \frac{k_p}{p_p} (-k_p \Lambda_T^{\mathcal{G}^*} + \mu \sigma_N^* \boldsymbol{\tau}_v) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^{*,T} \sigma_N^* - g_{Tq}^{*,T} \sigma_T^* - \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_T \\ -k_v \mathring{g}_N^* \\ -k_v \mathring{g}_T^* \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_N^* < 0 \quad \text{Huelgo} \\ \|\sigma_T^*\| \geq \mu \sigma_N^* \quad \text{Deslizamiento} \\ \|\sigma_T^*\| < \mu \sigma_N^* \quad \text{Adherencia} \end{array} \quad (3.25)$$

3.2.2. Elemento de Contacto Esfera-Esfera

La estrategia adoptada para desarrollar un modelo de contacto entre dos esferas rígidas, sigue la metodología propuesta por G eradin y Cardona [55]. El elemento considera la fricción deslizante en el marco de la dinámica de contacto no suave, con grandes desplazamientos y rotaciones. Las esferas pueden entrar en contacto, rotar o deslizarse una sobre la otra. El movimiento se describe con respecto a un sistema de referencia inercial X_1 , X_2 y X_3 , ver Fig. 3.8. Los centros de las esferas A y B , con radios r_A y r_B , están definidos por los vectores de posición x_A y x_B , respectivamente. El vector normal a la superficie de contacto en el punto P está dado por n y los vectores tangenciales a dicha superficie son t_1 y t_2 .

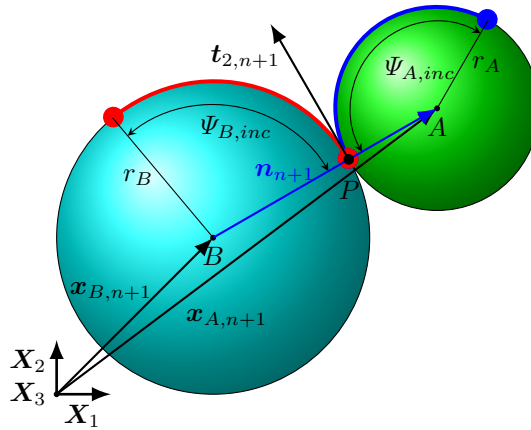


Figura 3.8: Elemento de Contacto Esfera-Esfera.

Análogamente al elemento anterior, Sección 3.1.2, el vector de huelgo entre las dos esferas es:

$$g_{n+1} = g_{N,n+1}n_{n+1} + g_{T1,n+1}t_{1,n} + g_{T2,n+1}t_{2,n} \quad (3.26)$$

donde $g_{N,n+1}$ corresponde a la distancia de contacto entre las dos esferas. El segundo y tercer término están relacionados con el movimiento de deslizamiento o rodadura pura entre las esferas en las direcciones tangenciales $t_{\alpha,n}$, con $\alpha = 1, 2$ evaluado en el paso de tiempo anterior. La evaluación de los vectores tangenciales en el tiempo previo t_n hace que la linealización de estas cantidades no contribuya a la matriz Hessiana. Esta suposición conduce a una formulación más simple de implementar manteniendo buenas propiedades de convergencia del problema no lineal como se verá en los ejemplos numéricos propuestos. Luego, el vector de velocidad se obtiene de la derivación con respecto al tiempo de la Ec. (3.26) obteniéndose:

$$v_{n+1} = v_{N,n+1}n_{n+1} + v_{T1,n+1}t_{1,n} + v_{T2,n+1}t_{2,n} \quad (3.27)$$

Como cada esfera se puede desplazar y rotar, entonces para este elemento, los vectores de coordenadas y

velocidades generalizadas vienen dados por:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^T & \boldsymbol{\Psi}_A^T & \mathbf{x}_B^T & \boldsymbol{\Psi}_B^T \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_A^T & \dot{\boldsymbol{\Psi}}_A^T & \dot{\mathbf{x}}_B^T & \dot{\boldsymbol{\Psi}}_B^T \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

donde $\mathbf{x}_A$ y $\mathbf{x}_B$ son las posiciones de los nodos A y B en la configuración actual, respectivamente y $\boldsymbol{\Psi}_A$ y $\boldsymbol{\Psi}_B$ son los vectores rotacionales incrementales de los nodos A y B en la configuración actual. Para mayor detalle ver Anexo B, Sección B.4.

3.2.3. Ejemplo Numérico

Con el objetivo de evaluar la robustez y eficiencia de la metodología propuesta, se considera el estudio de un rompimiento típico de billar, ilustrado en la Fig. 3.9. Este caso fue introducido originalmente por Corral et al. [29] en el marco de métodos de contacto suaves. A partir de dicho análisis, se estudia la capacidad del algoritmo desarrollado en esta Tesis para abordar problemas con impactos múltiples y fricción. Los resultados obtenidos se comparan con los datos de referencia presentados por Corral et al. [29]. Las cuatro bolas tienen

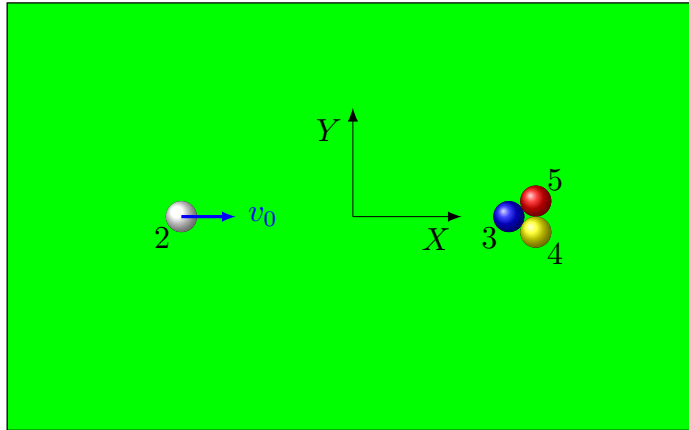


Figura 3.9: Configuración inicial del rompimiento en el billar.

un radio $r = 0.028575$ m, un peso $mg = 1.666$ N y una inercia $I = 0.000055$ kg m². La mesa tiene una longitud de 2.54 m y un ancho de 1.27 m. Para el contacto entre las bolas y la mesa, los valores del coeficiente de fricción μ y del coeficiente de restitución normal e_N son 0.2 y 0, respectivamente. Los coeficientes de fricción y restitución para el contacto entre bolas son $\mu_b = 0.06$ y $e_N = 0.93$, respectivamente. El contacto entre las bolas y los bordes de la mesa se representa con coeficientes de fricción y restitución $\mu = 0$ y $e_N = 0.85$, respectivamente. El coeficiente de restitución tangencial fue fijado como $e_T = 0$ en todos los contactos. La bola blanca, etiquetada como 2, inicia el movimiento con una velocidad de $v_x = 10.729$ m/s e impacta contra las tres bolas etiquetadas como 3, 4 y 5, que están en contacto entre sí y en reposo (véase Fig. 3.9).

En este ejemplo se analizan dos casos: en el primero, se desprecia la resistencia a la rodadura entre

las esferas y el plano; mientras que en el segundo se adopta un coeficiente de resistencia a la rodadura de $\rho = 0.005$ m. En ambos casos, el tiempo total de simulación fue de 3 s, con un paso de tiempo de 1×10^{-3} s y un valor de tolerancia para la convergencia de $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$.

En el primer caso, la bola blanca comienza con una velocidad de 10.729 m/s y sin velocidad de rodadura, es decir, viene deslizando, e impacta las bolas con una velocidad levemente menor debido a la fricción deslizando entre la bola y el plano, véase la Fig. 3.10-a. Tras el impacto múltiple, la bola 3 se desplaza hacia adelante con una velocidad baja en comparación con las restantes. Como puede observarse, una vez que las bolas entran en régimen de rodadura pura, su velocidad se mantiene constante, véase Fig. 3.10-a. El segundo caso es similar al primero; sin embargo, las bolas alcanzan la condición de reposo debido a la acción de la resistencia a la rodadura, ver Fig. 3.10-b.

La Figura 3.11-a muestra la velocidad lineal y angular de la bola 2. Luego del impacto múltiple ocurrido en el tiempo 0,114 s, se observa una pequeña discrepancia en comparación con los resultados de referencia. En las soluciones numéricas presentadas mediante la metodología propuesta, la bola 2 salta verticalmente tras el impacto (véase la Fig. 3.11-b). Posteriormente, la velocidad angular permanece constante durante el período en que la bola se encuentra en el aire, como se observa en la Fig. 3.11-a. Una vez que la bola 2 entra en contacto nuevamente con el plano, comienza a deslizar hacia atrás hasta alcanzar finalmente un movimiento de rodadura pura. La metodología propuesta no presenta penetración entre los cuerpos en contacto, como sí ocurre en los enfoques suaves, y el tiempo de cómputo se redujo de 25.000 s, requerido por la metodología del trabajo de referencia [29], a tan solo 40 s.

El máximo número de iteraciones para los subproblemas suave, de posición y de velocidad fue de 1, 7 y 4, respectivamente (caso con fricción). El número medio de iteraciones fue de 1, 2 y 1 para los niveles suave, de posición y de velocidad, respectivamente. La tasa de convergencia cuadrática de las iteraciones de Newton, para el caso con fricción, se muestra en la Fig. 3.12.

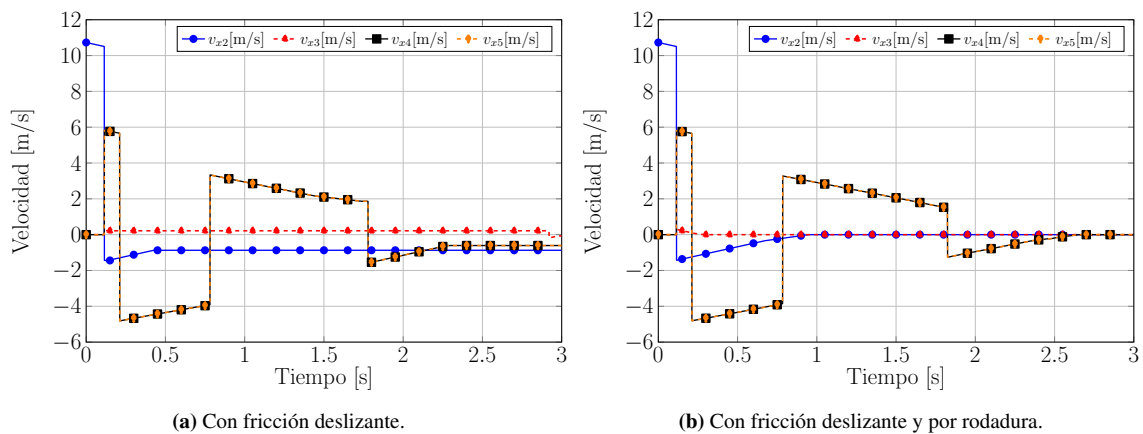


Figura 3.10: Velocidades calculadas en el problema de rompimiento de billar.

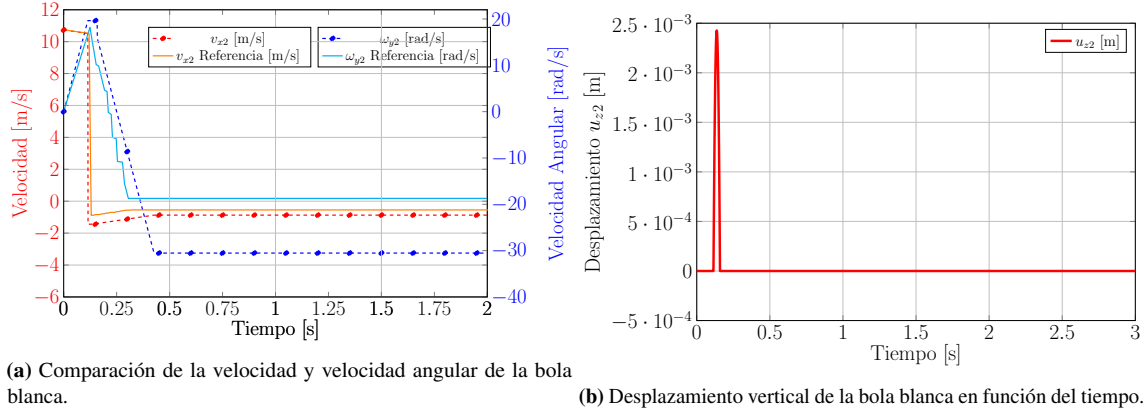


Figura 3.11: Comparación con el enfoque basado en penalización en el problema de rompimiento de billar.

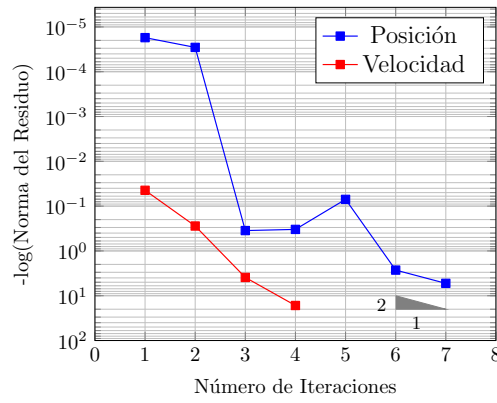


Figura 3.12: Evolución logarítmica de la norma del residuo.

3.3. Cálculo de la Fuerza de Contacto en el Marco de la Dinámica no suave

En esta sección se presentan los principales aspectos del Anexo C, en el cual se propone una nueva metodología para calcular las fuerzas de contacto generadas durante el impacto entre dos cuerpos en el marco de los métodos no suaves. Como sabemos, hasta el momento, la fuerza de contacto producida durante un impacto no puede ser calculada directamente mediante métodos no suaves. En particular, la conocida relación física,

$$F = \frac{\Lambda}{h} \quad (3.29)$$

donde F es la fuerza, Λ el impulso y h el paso de tiempo, no es aplicable de forma general a todos los impulsos calculados por el método no suave. Esto se debe a que algunos impulsos provienen de contactos *cerrados* (por ejemplo, una bola apoyada sobre un plano), mientras que otros corresponden a *impactos*. En este último caso, dicha relación no es válida, ya que el paso de tiempo fijo h no coincide con la duración real del impacto. De hecho, en la mayoría de los casos, la duración real del impacto es mucho menor al paso de tiempo.

La metodología desarrollada en esta sección integra la eficiencia algorítmica de los métodos no suaves con la capacidad de representación física que ofrecen los métodos suaves, constituyéndose así en una alternativa novedosa y eficaz para ampliar el alcance de los esquemas no suaves.

El enfoque propuesto ha sido diseñado para integrarse de manera consistente con el esquema de integración temporal α -generalizado no suave [32], y se estructura en dos etapas principales. En primer lugar, se determina la evolución temporal de los impulsos generados en los elementos de contacto, así como las velocidades de cada uno de los componentes del sistema a partir del integrador α -generalizado no suave. Posteriormente, en un proceso de post-procesamiento de resultados utilizando un algoritmo de filtrado, se calcula la fuerza de contacto utilizando un modelo continuo.

De este modo, las variables cinemáticas y dinámicas del sistema se obtienen mediante la metodología no suave, lo que permite emplear pasos de tiempo relativamente grandes y evita la penetración entre cuerpos, en tanto que, las fuerzas de contacto se estiman mediante un modelo continuo, con una ley constitutiva a nivel local.

Impulso

La integración temporal mediante el esquema α -generalizado no suave permite capturar de forma precisa los saltos de velocidad y los impulsos que se producen en los instantes de impacto. En particular, el valor discreto del multiplicador de Lagrange Λ_{n+1} , calculado por el integrador en el instante de tiempo t_{n+1} , se determina de acuerdo con la formulación presentada por Brüls et al. [17],

$$\Lambda_{n+1} = \int_{(t_n, t_{n+1}]} \left(di - \check{\lambda}(\tau) d\tau \right), \quad (3.30)$$

donde di representa la medida de impacto de la reacción de contacto y $\check{\lambda}(\tau)$ corresponde a la fuerza de contacto cuando el contacto permanece cerrado. Asumiendo que el segundo término del impulso es una función continua, su integral en la Ec. (3.30) puede aproximarse de la siguiente manera,

$$\Lambda_{n+1} \approx \int_{(t_n, t_{n+1}]} di - h \check{\lambda}_{n+1} = \Lambda_i - \Lambda_{\check{\lambda}} \quad (3.31)$$

donde $h = t_{n+1} - t_n$ representa el paso de tiempo de integración. Por lo tanto, el impulso discreto Λ_{n+1} puede descomponerse en dos componentes:

- Una primera componente, denotada como $\Lambda_i = \int_{(t_n, t_{n+1}]} di$, que corresponde a la integral temporal del impulso generado por los impactos ocurridos durante el paso de tiempo. Esta componente está asociada a una distribución del tipo Dirac en el tiempo y representa los fenómenos impulsivos.
- Una segunda componente, $\Lambda_{\check{\lambda}} = h \check{\lambda}_{n+1}$ corresponde a un contacto cerrado, calculada por el producto

entre la fuerza de contacto $\check{\lambda}_{n+1}$ y el paso de tiempo h . Esta parte está asociada a una evolución continua de la fuerza de contacto en el tiempo.

Es importante destacar que el impulso Λ_i puede ser generado por un impacto ocurrido dentro de una cadena de cuerpos rígidos, y transmitido dinámicamente a través de dicha cadena hasta el contacto que se encuentra bajo análisis. Ambas componentes del impulso, Λ_i y $\Lambda_{\check{\lambda}}$, pueden estimarse de manera sencilla en un análisis de postprocesamiento, a partir de los multiplicadores de Lagrange Λ calculados por el integrador temporal. Para ello, es necesario distinguir entre los impulsos asociados a fenómenos de impacto y aquellos correspondientes a fuerzas de contacto continuas. Con este propósito, en esta Tesis se desarrolla un algoritmo de filtrado, cuya formulación se detalla a continuación.

3.3.1. Proceso de Filtrado

Se propone una estrategia de filtrado de Λ con el objetivo de identificar el contacto cerrado y el momento en que se producen los impactos entre componentes. Para una mejor comprensión del proceso de filtrado, se asume una variación de Λ en función del tiempo como se muestra en la Fig. 3.13. Se pueden identificar dos tipos de impactos: el impacto *simple*, que ocurre en el instante t_A , y el impacto *a contacto cerrado* como se evidencia en el instante t_B .

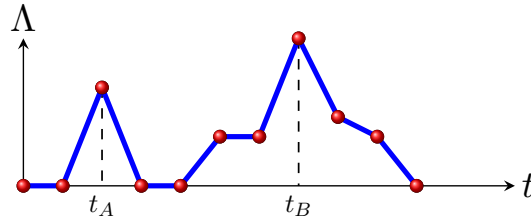


Figura 3.13: Evolución de Λ en el tiempo.

Teniendo en cuenta la variación temporal propuesta para el impulso Λ , se definen tres funciones con el objetivo de identificar los picos del impulso y así determinar el momento en el que ocurren los impactos. Estas tres funciones son:

- **Función de Impacto Simple ($\Lambda_{FI,n}$).** Se corresponde con aquellos picos de Λ donde en un paso de tiempo anterior (t_{n-1}) y posterior al pico (t_{n+1}), los valores de Λ son iguales a cero, ver Fig. 3.14-a.

Definimos:

$$\Lambda_{FI,n}(t) = \begin{cases} \Lambda_n, & \text{si } t = t_n \\ 0, & \forall t \neq t_n \end{cases} \quad (3.32)$$

Restando los impactos simples de la función de impulso discreto Λ , se crea una función auxiliar $\Lambda_{AUX} = \Lambda - \Lambda_{FI}$. Como se observa en la Fig. 3.14-b la función auxiliar no presenta impactos simples.

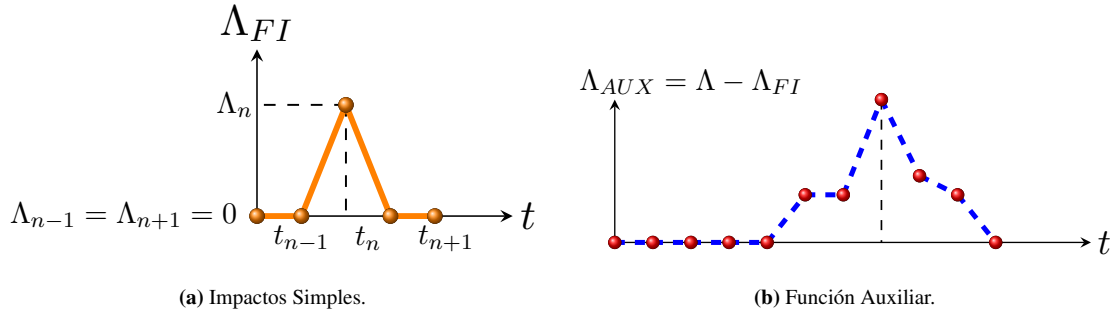


Figura 3.14: Funciones de impacto simple y auxiliar.

- **Función Suave de Impulso ($\Lambda_{\check{\lambda}}$).** Luego, para poder identificar los impactos que se producen cuando los cuerpos están en contacto, se procede a suavizar la función auxiliar. Para ello, se estudian diferentes escenarios como los propuestos en la Fig. 3.15. Por un lado se presenta el caso en el que hay un pico hacia arriba como se observa en la Fig. 3.15-a. En este caso, el valor de la función suave de impulso tomará el promedio de los valores adyacentes. Es decir, si en el instante de tiempo t_n se tiene $\Lambda_{AUXn+1} < \Lambda_{AUXn}$ y $\Lambda_{AUXn-1} < \Lambda_{AUXn}$ entonces a la función suave de impulsos $\Lambda_{\check{\lambda}}$ se le asigna el valor de $(\Lambda_{AUXn+1} + \Lambda_{AUXn-1})/2$ en t_n .

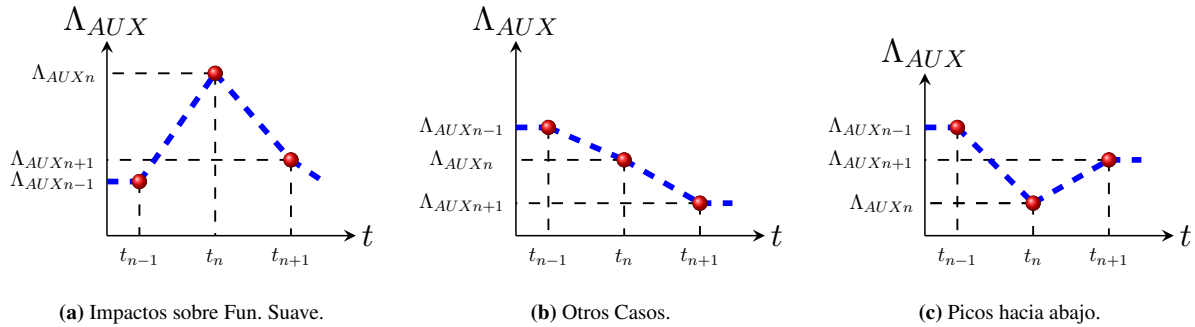


Figura 3.15: Filtrado de Función Suave.

Para todos los demás escenarios posibles, donde no hay picos hacia arriba, como las variaciones del impulso representadas en las Figuras 3.15-b y 3.15-c, la función suavizada del impulso $\Lambda_{\check{\lambda}}$ toma el valor de Λ_{AUXn} . El resultado de todos estos procesos se traduce en una función suavizada de impulsos $\Lambda_{\check{\lambda}}$ en función del tiempo, como se muestra en la Fig. 3.16-a.

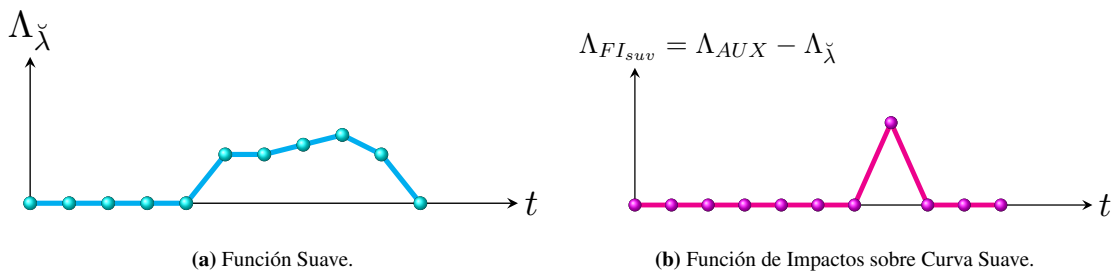


Figura 3.16: Funciones de filtrado.

- **Función de Impactos sobre Curva Suave (Λ_{FIsuv}).** Para concluir el filtrado y obtener los impactos o picos generados sobre la función suave de impulsos, a la función auxiliar se le resta la función suave, esto es $\Lambda_{FIsuv} = \Lambda_{AUX} - \Lambda_{\chi}$. A partir de la Fig. 3.16-b, se concluye que Λ_{FIsuv} solo presenta los valores de los impactos producidos sobre la curva suave.

Se verifica fácilmente mediante la observación de las gráficas que la suma de las tres funciones Λ_{FIsuv} , Λ_{χ} , y Λ_{FI} resulta en la función Λ original. Finalmente, se presentan dos escenarios distintos para el cálculo de la fuerza de contacto. En el primero, se consideran los impactos simples. Utilizando la función Λ_{FI} , se obtienen los tiempos de impacto t_n y las velocidades relativas previas v^- de los cuerpos involucrados. En el segundo escenario, se aborda el cálculo de la fuerza de contacto entre cuerpos que ya están en contacto y que reciben un impacto. En este caso, se sigue un procedimiento similar al descrito anteriormente, pero utilizando la función Λ_{FIsuv} y considerando la carga estática correspondiente al impulso Λ_{χ} en el momento del impacto. Como sabemos de la Ec. (3.29) la carga estática es $F = \Lambda_{\chi}/h$.

3.3.2. Cálculo de la Fuerzas de Contacto en el Marco de la Dinámica de Contacto no suave

En esta sección se presenta la metodología desarrollada para calcular la fuerza de contacto entre cuerpos rígidos esféricos, a partir del impulso Λ y del salto de velocidad W obtenidos mediante el esquema de integración temporal α -generalizado no suave [32]. A partir de estas variables, y empleando una ley constitutiva propia de los métodos de contacto suave, se determina la fuerza de contacto. Si bien la formulación completa de la metodología propuesta se encuentra detallada en el Anexo C, en esta sección se expone la idea central del enfoque desarrollado, omitiendo detalles específicos.

Primera aproximación

Las observaciones experimentales del impacto entre esferas, realizadas por diversos autores, han demostrado que la evolución de la velocidad relativa de interpenetración $\dot{\delta}(t)$ durante el intervalo de impacto $[0, T]$, con $T = t_f - t_i$, presenta una forma similar a la de un polinomio cúbico. Este comportamiento puede apreciarse, por ejemplo, en la Fig. 3.17, tomada del trabajo de Chen *et al.* [26]. Como se desarrolló en el Cap.2, Sec.2.5.1, y se ilustró en la Fig.2.7, el contacto entre dos esferas da lugar a dos fases diferenciadas. En una primera etapa, correspondiente a la “compresión”, que transcurre desde $t = 0$ hasta el instante en que la velocidad relativa se anula y la penetración alcanza su valor máximo. Posteriormente, tiene lugar la fase de “descompresión”, durante la cual la penetración disminuye hasta anularse en un tiempo $t = T$. A partir del perfil característico que presenta la evolución de la velocidad relativa de interpenetración $\dot{\delta}(t)$ respecto al tiempo, observada en la Fig. 3.17, se propone modelar dicho comportamiento mediante el siguiente polinomio cúbico,

$$\dot{\delta}(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad (3.33)$$

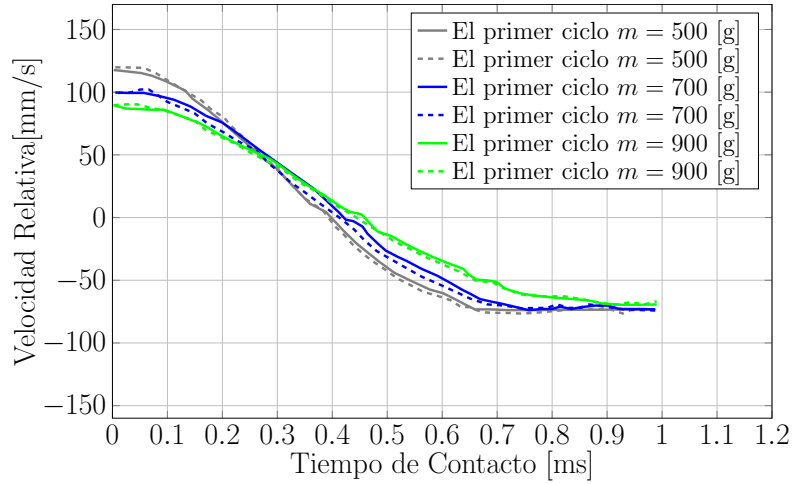


Figura 3.17: Velocidad relativa de interpenetración vs. tiempo, para varias masas de impacto (tomado de Chen *et al.* [26])

Como se observa en la Fig. 3.18 debido a las condiciones de contorno, la velocidad relativa de interpenetración en el instante inicial es $\dot{\delta}(0) = v_1^-$, por lo tanto $a = v_1^-$.

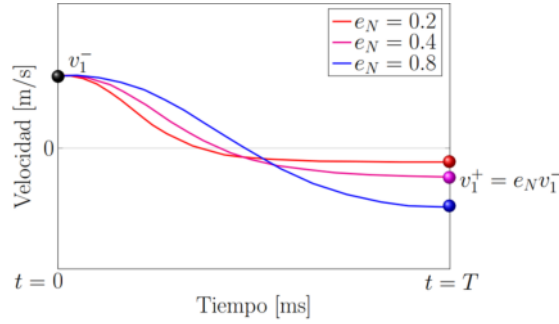


Figura 3.18: Velocidad relativa de interpenetración propuesta vs. tiempo.

Si se deriva la Ec. (3.33) respecto al tiempo se obtiene la evolución temporal de la aceleración en el período de contacto:

$$\ddot{\delta}(t) = b + 2ct + 3dt^2 \quad (3.34)$$

Como inferimos de la curva experimental, $\ddot{\delta}(0) = 0$ y por lo tanto $b = 0$. Considerando los resultados obtenidos hasta el momento, la función de la velocidad de interpenetración relativa Ec.(3.33) en $t = T$ queda definida como,

$$\dot{\delta}(T) = v_1^- + cT^2 + dT^3 = e_N v_1^- \quad (3.35)$$

y la función de la aceleración es,

$$\ddot{\delta}(T) = 2cT + 3dT^2 = 0 \quad (3.36)$$

A partir de las Ecs. (3.35 y 3.36) se pueden obtener los coeficientes c y d en función de la duración del

contacto T y el salto de velocidad W . Si $T \neq 0$, entonces,

$$d = -\frac{2W}{T^3}, \quad c = \frac{3W}{T^2} \quad (3.37)$$

donde W es el salto de velocidad obtenido por el integrador y donde la duración del contacto T debe ser obtenida mediante alguna otra formulación. Entonces, la velocidad relativa de interpenetración es una función del tiempo t y de la duración del contacto T ,

$$\dot{\delta}(t) = v_1^- + \frac{3W}{T^2}t^2 - \frac{2W}{T^3}t^3 \quad (3.38)$$

Integrando la Ec.(3.38) respecto al tiempo, se obtiene la interpenetración δ que se produce entre los cuerpos en contacto,

$$\delta(t) = \int \dot{\delta}(t)dt \quad (3.39)$$

Como sabemos del Cap.2 Sec.2.5.1, los modelos de fuerza de contacto continuo calculan la fuerza de contacto en función de la interpenetración δ y la velocidad relativa de interpenetración $\dot{\delta}$. Si por ejemplo se toma el modelo de Flores et al. [51] la fuerza de contacto se define como,

$$F(t) = K\delta(t)^{3/2} + D\delta(t)^{3/2}\dot{\delta}(t) \quad (3.40)$$

Aplicando los conceptos de Física, sabemos que la integral de la fuerza respecto al tiempo es el impulso Λ , por lo tanto,

$$\Lambda = \int_0^T F(t)dt \quad (3.41)$$

Debido a que el impulso Λ es un dato obtenido por el modelo no suave, al resolver la integral se obtiene la duración del contacto T , por ende, se pueden obtener las velocidades, aceleraciones y la interpenetración relativa de los cuerpos en contacto a partir de las Ecs. (3.38, 3.36 y 3.39) respectivamente. Finalmente, de esta forma se obtiene la evolución temporal de la fuerza de contacto. La metodología presentada en esta sección fue validada mediante diversos ejemplos numéricos, los cuales se encuentran detallados en el Anexo C. Entre ellos se incluyen, por ejemplo, el impacto entre dos esferas y el impacto entre una esfera y un plano.

3.3.3. Ejemplo Numérico

El siguiente ejemplo consiste en un mecanismo del tipo biela-manivela flexible, en el cual se introduce un juego radial en la unión entre la biela y la corredera. El sistema está compuesto por una combinación de cuerpos rígidos y flexibles. El objetivo de este ejemplo es analizar el desempeño del algoritmo de cálculo de fuerzas de contacto ante impactos repetidos de alta frecuencia. La manivela y la biela son modeladas como

cuerpos flexibles, mientras que la corredera es considerada como un cuerpo rígido. En este tipo de sistemas, la magnitud del impulso no solo depende de las masas de los cuerpos en contacto, sino también de la inercia de los demás componentes del mecanismo que se transmite a la zona de impacto a través de la cadena cinemática.

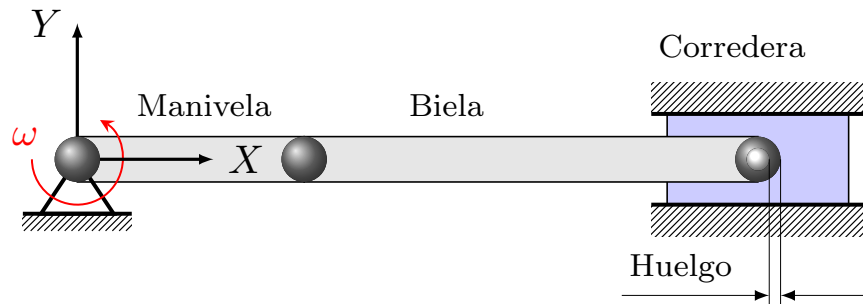


Figura 3.19: Configuración inicial del mecanismo biela-manivela flexible con huelgo.

Al inicio del movimiento, la manivela y la biela se encuentran alineadas, y los centros del cojinete y del muñón coinciden, véase la Fig. 3.19. Se desprecia la fricción entre la corredera y el suelo. La manivela rota en sentido antihorario alrededor del eje Z con una velocidad angular constante de 5000 rpm. La conexión entre la manivela y la biela se modela como una articulación rotacional perfecta. Se realizaron simulaciones con juegos de 0.05 mm y 0.1 mm. El material se considera como un acero elástico, con un módulo de Young de 210×10^9 Pa, una densidad de 7850 kg/m^3 y un coeficiente de Poisson de 0.3. El coeficiente de restitución en la articulación se establece en 0.9. Se introduce un coeficiente de amortiguamiento del tipo Rayleigh con una relación de amortiguamiento $\xi = 0.04\%$ en la manivela y en la biela. La masa de la corredera es de 0.14 kg. El área de sección transversal y el momento de inercia de la manivela son $7.6433 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $4.868 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, respectivamente, mientras que para la biela son $2.2293 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $4.1415 \times 10^{-9} \text{ m}^4$. Tanto la manivela como la biela se discretizan con cuatro elementos tipo viga igualmente espaciados [95]. La longitud de la biela y de la manivela es de 0.12 m y 0.05 m, respectivamente.

Las simulaciones se realizaron con pasos de tiempo constantes de 1×10^{-5} s, 1×10^{-6} s y 1×10^{-7} s, utilizando una tolerancia para la convergencia de 1×10^{-5} y un radio espectral del integrador $\rho_\infty = 0$. Las soluciones presentadas en las figuras de esta sección corresponden a un régimen estable, esto es, luego de que se disipen los transitorios iniciales. Como se observa en la Fig. 3.20-a la velocidad de la corredera para un caso con huelgo de 0.05 m es similar a la de una junta ideal, para diferentes paso de tiempo. A su vez, en la Fig. 3.20-b es posible detectar los desplazamientos de la corredera para diferentes paso de tiempo debido al huelgo presente en la junta.

La Fig. 3.21 muestra la evolución de la fuerza de contacto en la unión entre la biela y la corredera para dos vueltas de la manivela, comparándose la evolución de la fuerza para un juego radial de 0.05 mm respecto a una articulación ideal sin juego. En este último se observa una evolución continua y suave de la fuerza de contacto, mientras que en el caso con juego, la fuerza presenta variaciones abruptas. Se realizaron simulaciones con

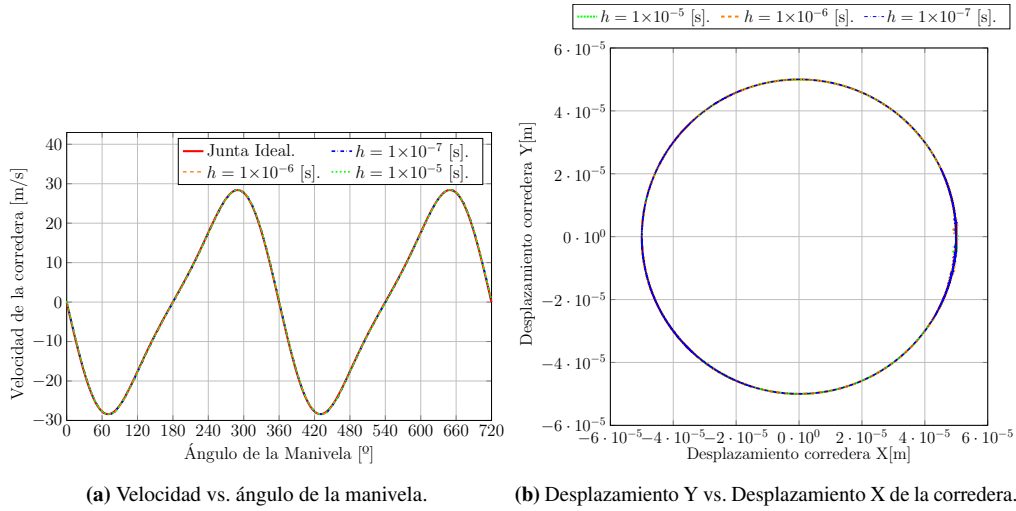


Figura 3.20: Trayectoria y velocidad del centro del muñón para diferentes pasos de tiempo para un huelgo de 0.05 m

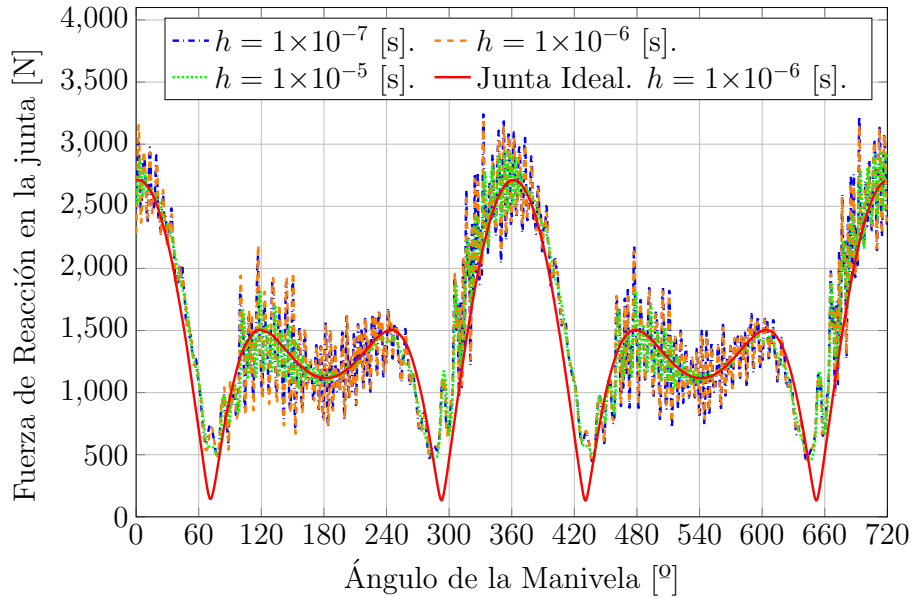


Figura 3.21: Fuerza de contacto vs. ángulo de la manivela para un huelgo de 0.05 mm.

pasos de tiempo de 1×10^{-5} s, 1×10^{-6} s y 1×10^{-7} s, mostrando convergencia en los resultados.

Resultados similares se obtienen para un juego radial de 0.1 mm (véase Fig. 3.22). Sin embargo, a diferencia del caso anterior, como consecuencia del mayor huelgo, la fuerza de reacción alcanza valores nulos en ciertos instantes, lo cual indica separación entre el muñón y el cojinete. Además, las fuerzas de contacto son mayores que en el caso de 0.05 mm. En ambos casos, tanto para un huelgo de 0.05 mm como para uno de 0.1 mm, se observa convergencia de la fuerza de contacto para un paso de tiempo de 1×10^{-6} s.

La evolución de la fuerza de contacto mostrada en las Figuras 3.21 y 3.22 se calcula utilizando el procedimiento descrito en las Secciones anteriores. En cada instante de tiempo, se computan las componentes continua e impulsiva de la fuerza de contacto. La suma del valor máximo de la componente impulsiva durante la duración del impacto y la componente continua se representa en dichas figuras.

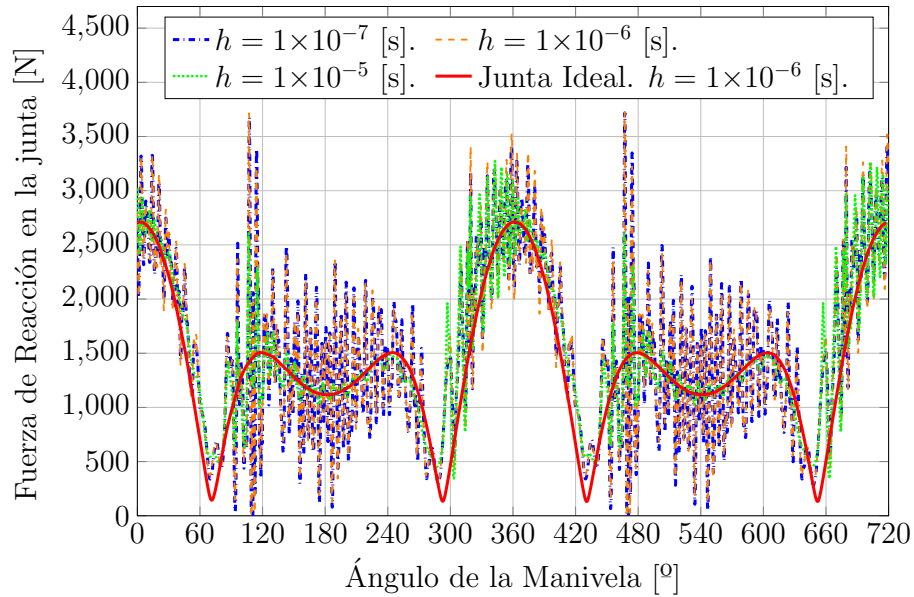


Figura 3.22: Fuerza de contacto vs. ángulo de la manivela para un huelgo de 0.1 mm.

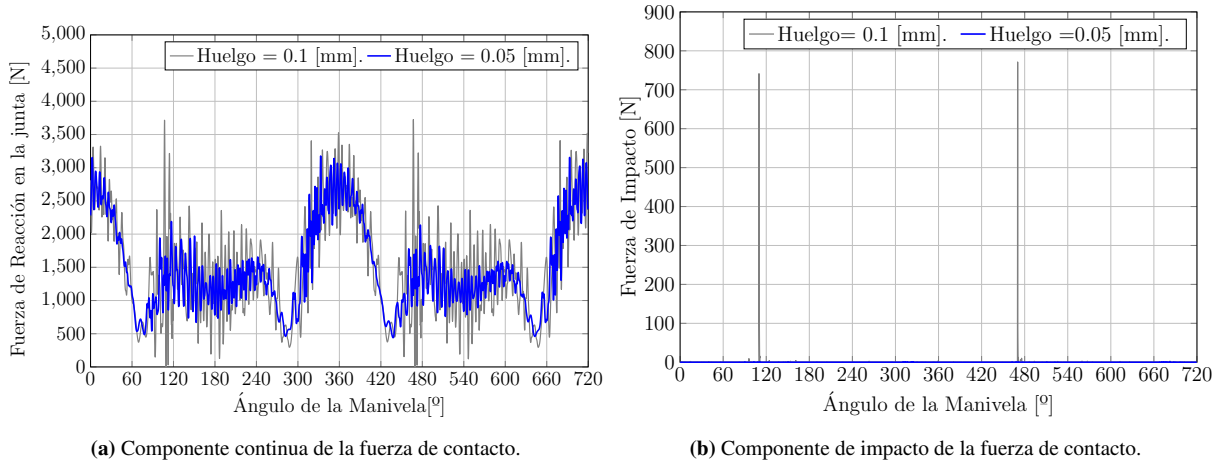


Figura 3.23: Componentes continua e impulsiva de la fuerza de contacto vs. ángulo de manivela.

Las componentes de contacto e impacto de la fuerza entre el muñón y el cojinete pueden calcularse por separado. La evolución de ambas se muestra en las Figuras 3.23-a y 3.23-b como función del ángulo de manivela, para ambos valores de juego. Estas simulaciones se realizaron con un paso de tiempo de 1×10^{-6} s. La Fig. 3.23-a muestra la componente continua de la fuerza, mientras que la Fig. 3.23-b representa la componente impulsiva asociada a los impactos. Del análisis de estas figuras se destacan las siguientes observaciones:

- En primer lugar, la componente continua de la fuerza de contacto es mayor que la componente impulsiva, y presenta oscilaciones significativas. Este comportamiento se debe al pequeño juego en la unión, que excita vibraciones flexibles en el mecanismo, generando un pequeño movimiento del muñón sobre el cojinete en lugar de grandes fuerzas de impacto.
- Cuando el juego es de 0.05 mm, el muñón permanece prácticamente en contacto permanente con el

cojinete. Sin embargo, la Fig. 3.23-b muestra que las fuerzas de impacto aumentan al incrementarse el juego. Cabe destacar que el valor máximo de la fuerza impulsiva alcanza aproximadamente los 700 N para un juego de 0.1 mm, mientras que es casi nulo para el caso de 0.05 mm.

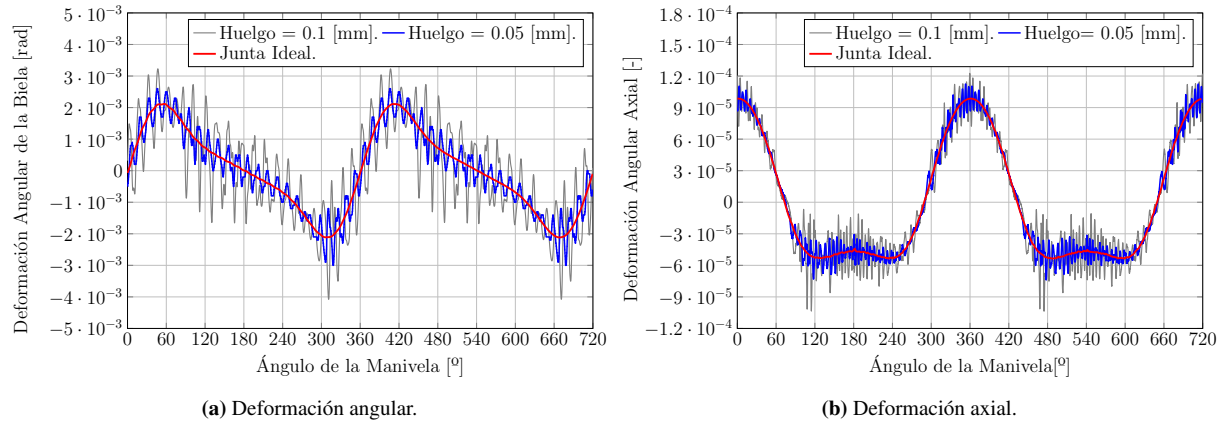


Figura 3.24: Deformación de la biela vs. ángulo de la manivela. Paso de tiempo $h = 1 \times 10^{-6}$ s.

La Fig. 3.24 muestra el efecto del juego sobre la deformación de la biela. Se representan las deformaciones angular y axial para los casos de una unión ideal sin juego, y para juegos de 0.05 mm y 0.1 mm. Al introducir juego, las deformaciones aumentan respecto al mecanismo ideal, debido a las pequeñas vibraciones relativas entre el muñón y el cojinete. La magnitud de la deformación se incrementa con el valor del juego, como era de esperarse. La frecuencia de las vibraciones axiales observadas en la Fig. 3.24-b puede relacionarse con la componente continua de la fuerza de contacto mostrada en la Fig. 3.23-a.

Finalmente, se verifica la convergencia de los resultados para un paso de tiempo igual a 1×10^{-6} s. En este caso, el número máximo de iteraciones por paso de tiempo fue de 2, 3 y 1 para los subproblemas suave, de posición y de velocidad, respectivamente, mientras que el número medio fue de una iteración por paso para los tres subproblemas. Las simulaciones se ejecutaron de manera eficiente (200 s) en una computadora portátil.

Capítulo 4

Rodamiento y Aplicaciones

4.1. Introducción

Muchas máquinas o mecanismos utilizados en la industria contienen elementos sometidos a movimientos de rotación de alta frecuencia, soportados por componentes mecánicos especiales denominados cojinetes. Según el tipo de contacto que se produce entre las piezas, los cojinetes pueden clasificarse como de deslizamiento, si existe deslizamiento entre superficies, o como rodamientos, si hay rodadura. Los rodamientos están compuestos por dos aros uno interno y otro externo, elementos rodantes (bolas o rodillos) que reducen la fricción, y una jaula que mantiene a los elementos rodantes equidistantes, ver Figura 4.2-a.

Existen numerosos tipos de rodamientos, sin embargo, los más utilizados en aplicaciones de alta velocidad de rotación y baja capacidad portante son los rodamientos de bolas. Su correcto diseño y/o verificación impacta directamente en la durabilidad, eficiencia y confiabilidad tanto del rodamiento como del sistema mecánico completo. Por ejemplo, diversos autores señalan que cerca del 50 % de las fallas en motores eléctricos tienen su origen en los rodamientos [4]. Los impactos entre las bolas, las pistas y la jaula generan variaciones en las fuerzas de contacto internas, afectando la precisión del movimiento, la eficiencia y la vida útil del sistema [127].

Los métodos de mantenimiento tradicionales, basados en sustituciones periódicas, presentan limitaciones importantes. Según Gismeros Moreno et al. [60], estos métodos se basan en la experiencia previa y no consideran factores como montaje incorrecto o lubricación deficiente. Además, muchas máquinas están ubicadas en zonas de difícil acceso, como por ejemplo las turbinas marinas. En este contexto, las técnicas de mantenimiento predictivo permiten reducir costos y tiempos al anticipar fallas mediante el análisis dinámico del sistema.

Cuando dos cuerpos con superficies curvas entran en contacto, se genera una fuerza normal al plano tangente común que causa deformaciones locales en las zonas de contacto. Estas deformaciones inducen tensiones altamente localizadas, denominadas tensiones de contacto, cuya magnitud disminuye rápidamente

con la distancia al punto de contacto [124]. Este fenómeno es crucial en componentes como los rodamientos, donde la repetición cíclica de estas tensiones puede llevar a fallas por fatiga [124].

Los modelos de rodamientos se dividen en cuasiestáticos y dinámicos. Los modelos cuasiestáticos, como el de Jones [82], describen el comportamiento en equilibrio e incluyen efectos como la fuerza centrífuga y el momento giroscópico, basados en la teoría de contacto de Hertz [66]. Posteriormente, Harris y Kotzalas [64] enriquecieron este enfoque incorporando fricción entre bolas y pistas. En cambio, los modelos dinámicos permiten simular el comportamiento del rodamiento en el tiempo, considerando vibraciones propias y transmitidas al resto de los componentes que conforman el sistema mecánico.

En las últimas décadas, se han desarrollado modelos dinámicos cada vez más complejos. Tiwari, Gupta y Prakash [133] implementaron un modelo multicuerpo para analizar el rendimiento dinámico de rodamientos. Nan, Jiang y Yu [108] presentaron un sistema rotor-cojinete con holgura asimétrica, mientras que Deng et al. [41] investigaron la influencia de la peso de la jaula. Más recientemente, Gismeros Moreno et al. [58] propusieron un modelo de contacto suave para analizar diferentes configuraciones de jaula.

Aunque se han desarrollado numerosos estudios centrados en rodamientos, pocos logran integrarlos de manera efectiva en sistemas mecánicos complejos, como los mecanismos biela-manivela. Basándose en la dinámica de sistemas multicuerpo, la teoría de Hertz y empleando modelos de contacto suave, Xu [140] propusieron una metodología general para el análisis de rodamientos en un sistema biela-manivela. En la misma línea, Yao et al. [141] emplearon un integrador α -generalizado y un modelo de penalización para estudiar el contacto entre las bolas y la jaula.

En esta sección de la Tesis, se propone una nueva metodología para calcular las tensiones de contacto en rodamientos de bolas en el contexto de la dinámica de contacto no suave. La metodología se valida con dos casos de estudio: primero, se calcula la fuerza de contacto entre las bolas y las pistas de un rodamiento aislado y luego, se incorpora un mecanismo biela-manivela y se analizan las vibraciones inducidas por los impactos comparando los resultados con referencias bibliográficas.

4.2. Elemento Rodamiento

En esta sección se introduce un nuevo elemento tridimensional diseñado para abordar el contacto entre las esferas que componen un rodamiento de bolas y sus pistas, ver Fig. 4.1-a. El contacto entre las esferas B y la pista interior del rodamiento A se aborda utilizando el enfoque de contacto entre esferas, tal como se propone en el Capítulo 3 Sección 3.2.2. Para el contacto entre las esferas B y la pista exterior, se emplea un nuevo elemento esfera-esfera, similar al presentado en el Capítulo 3 Sección 3.2.2 pero que considera nuevas restricciones de contacto. En este sentido, la principal diferencia radica en la inversión de la dirección del vector normal, debido a que la esfera B está dentro de la esfera C , Fig. 4.1-b. La estrategia adoptada para describir el movimiento general de los cuerpos es el Método de Elementos Finitos no lineal, donde

las coordenadas globales de los cuerpos se refieren a un marco inercial único [55]. La configuración del rodamiento se ilustra en la Fig. 4.1-a, donde el rodamiento está formado por ocho esferas pequeñas B , una esfera central A que representa la pista interior, y una esfera exterior C que simboliza la pista exterior del rodamiento. Por simplicidad, ignoramos aquí la doble curvatura de las pistas, asumiendo un movimiento en el plano del rodamiento. Además, el componente jaula es representado por ocho elementos del tipo resorte que permiten la conexión entre las bolas B .

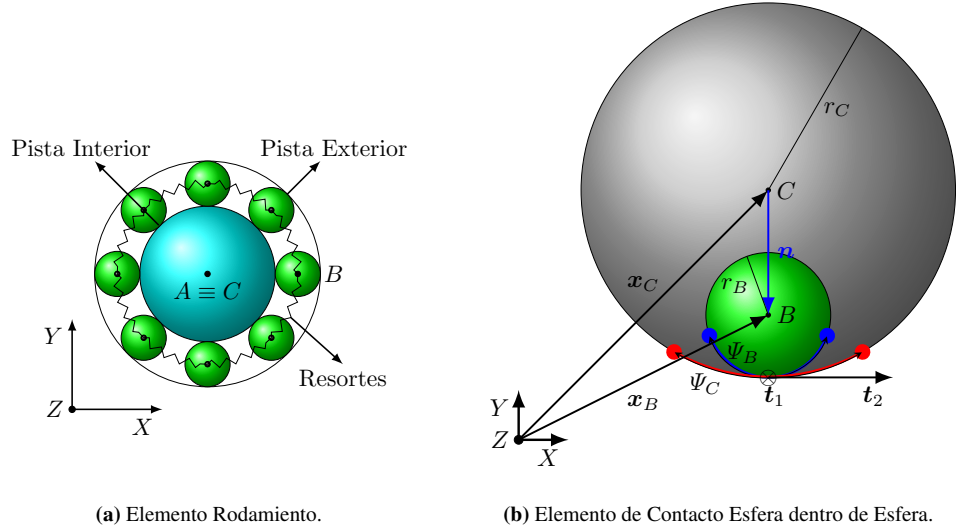


Figura 4.1: Elementos de Contacto.

4.3. Procedimiento para Calcular la Tensión de Contacto

El rodamiento analizado en esta sección es uno de bolas, como el que se muestra en la Fig. 4.2-a. Está compuesto por los elementos rodantes: bolas o esferas, una pista exterior, una pista interior y una jaula que contiene a las bolas. Para analizar este componente en el marco del método de los elementos finitos, las pistas y las bolas se modelan mediante elementos esféricos rígidos y la jaula se representa utilizando elementos tipo resorte lineal, ver Fig. 4.1-a. Luego, para considerar el contacto entre las bolas y las pistas se utiliza el algoritmo de contacto entre esferas propuesto anteriormente.

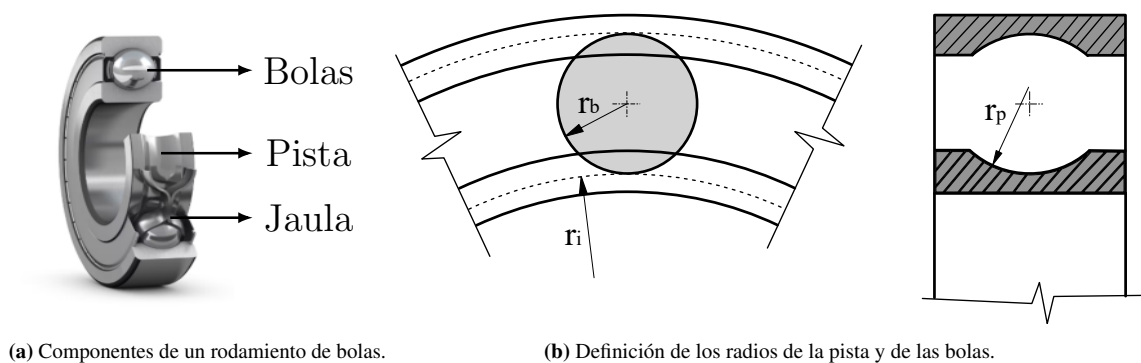


Figura 4.2: Rodamiento de bolas.

Para el caso específico de un rodamiento de bolas, el coeficiente de rigidez K de la Ec. (3.40) se determina siguiendo el enfoque clásico propuesto por Seely y Smith [124], donde K depende de los siguientes parámetros Δ , A , B , c_b y c_δ

$$K = \left(\frac{c_b}{c_\delta} \frac{\pi}{A+B} \frac{1}{\Delta^{2/3}} \right)^{3/2} \quad (4.1)$$

El coeficiente Δ , se obtiene a partir de los módulos de elasticidad E_1 y E_2 y de los coeficientes de Poisson μ_1 y μ_2 de los materiales en contacto.

$$\Delta = \frac{1}{A+B} \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right) \quad (4.2)$$

Luego, los coeficientes A y B dependen del radio de la bola r_b , del radio de la pista interior r_i y del radio de curvatura de la pista r_p , ver Fig. 4.2-b, a través de las siguientes dos ecuaciones,

$$A = \frac{1}{2r_b} + \frac{1}{2r_p} \quad \text{con} \quad r_i > r_p > r_b \quad (4.3)$$

$$B = \frac{1}{2r_b} + \frac{1}{2r_i} \quad \text{con} \quad r_i > r_p > r_b \quad (4.4)$$

Finalmente, utilizando la relación B/A calculado a partir de las Ecs.(4.3,4.4) y el gráfico de la Fig. 4.3, se obtienen los coeficientes c_b , c_δ , c_σ , c_τ y c_G necesarios para calcular el coeficiente de rigidez K de la Ec.(4.1) como así también las tensiones de contacto entre las bolas y las pistas.

Utilizando los impulsos, posiciones y velocidades obtenidas a partir del integrador temporal α generalizado no suave y el algoritmo de cálculo de la fuerza de contacto que se presenta en la Sec. 3.3, se puede calcular $\delta(t)$, $\dot{\delta}(t)$ y por consiguiente la fuerza de contacto $F_N(t)$ a través de la Ec. (3.40) .

De acuerdo con [124], las tensiones máximas normales, de corte y de corte octaédricas que se generan en la zona de contacto entre las bolas y las pistas, $\sigma_{\text{máx}}$, $\tau_{\text{máx}}$, $\tau_{\text{Gmáx}}$, respectivamente, se expresan de la siguiente manera,

$$\sigma_{\text{máx}} = -c_\sigma \frac{b}{\Delta} \quad \tau_{\text{máx}} = -c_\tau \frac{b}{\Delta} \quad \tau_{\text{Gmáx}} = -c_G \frac{b}{\Delta} \quad (4.5)$$

donde $b = c_b(F_N \Delta)^{1/3}$.

4.4. Velocidad Angular de la Jaula

En esta sección se presenta una ecuación analítica que permite calcular la relación entre la velocidad angular de la jaula y velocidad angular de la pista interior para un rodamiento de bolas. De esta forma, es posible comparar los resultados de las velocidades obtenidas a partir de las simulaciones con una expresión analítica cerrada. Para ello, como primera hipótesis simplificativa se impone una ausencia de cualquier tipo de huelgo entre las bolas y las pistas del rodamiento. Luego, la velocidad de la bola en su centro de masa es

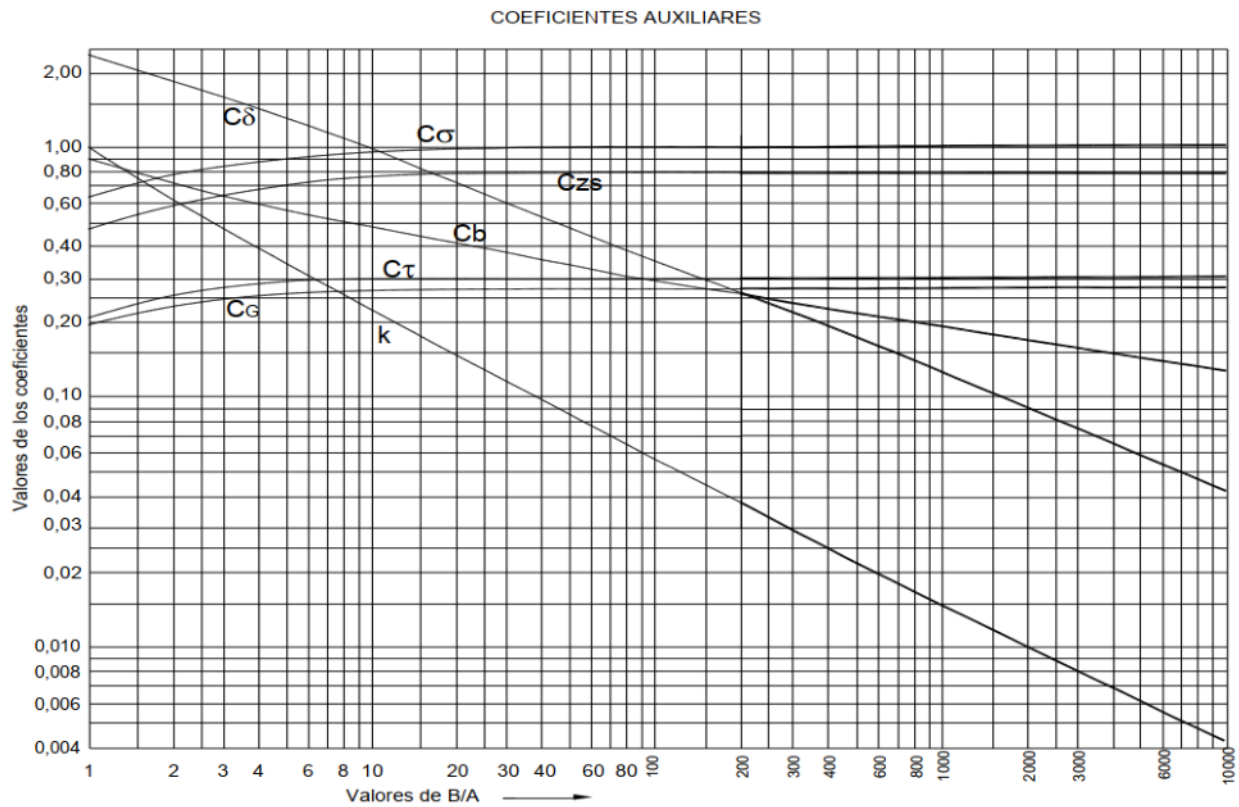


Figura 4.3: Coeficientes vs. B/A .

igual a la velocidad de la jaula v_j obtenida mediante el promedio de las velocidades relativas de los puntos en contacto, tal como se detalla a continuación

$$v_j = \frac{v_e + v_i}{2} \quad (4.6)$$

donde v_e es la velocidad tangencial de la pista exterior y v_i la velocidad tangencial de la pista interior, ver Fig.4.4-b. Como segunda hipótesis se propone que la pista exterior esté fija, con lo cual, la velocidad tangencial exterior v_e es cero. Entonces la Ec.(4.6) se simplifica de la siguiente forma

$$v_j = \frac{v_i}{2} \quad (4.7)$$

A su vez, la velocidad tangencial de la pista interior v_i pueden definirse por cinemática como

$$v_i = \omega_i r_i \quad (4.8)$$

en tanto que, la velocidad tangencial de la jaula resulta en

$$v_j = \omega_j r_j = \omega_j \left(\frac{r_i + r_e}{2} \right) \quad (4.9)$$

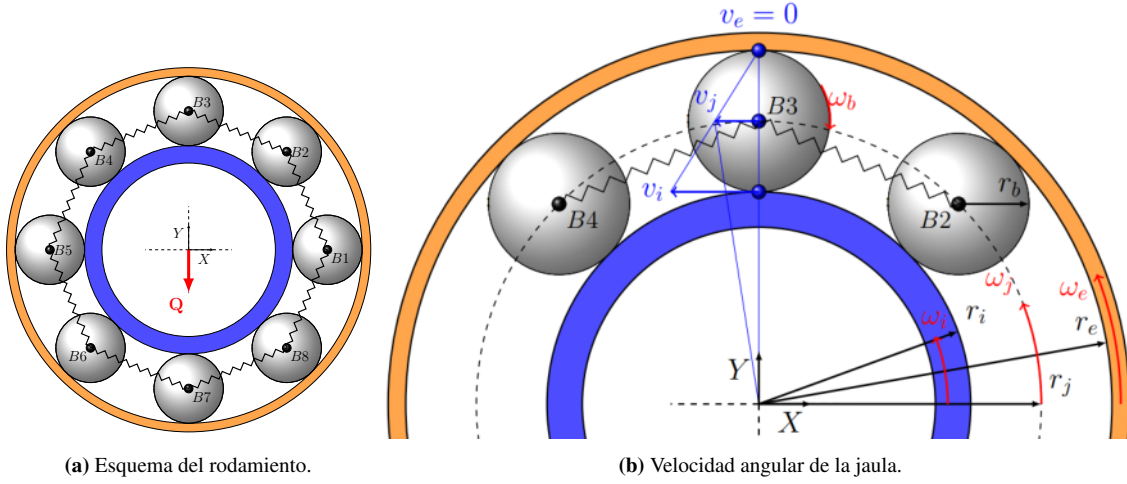


Figura 4.4: Modelo de rodamiento de bolas.

donde r_j , r_e , ω_j y ω_i son el radio de la jaula, el radio de la pista exterior, la velocidad angular de la jaula y velocidad angular de la pista interior, respectivamente. Sustituyendo la Ec.(4.8) en la Ec.(4.7) se tiene

$$v_j = \frac{\omega_i r_i}{2} \quad (4.10)$$

Luego, igualando la Ec.(4.10) con la Ec.(4.9) se obtiene la relación teórica entre la velocidad angular de la jaula ω_j y la velocidad angular de la pista interior ω_i ,

$$\frac{\omega_j}{\omega_i} = \left(\frac{r_i}{r_i + r_e} \right) \quad (4.11)$$

Se concluye a partir de la Ec.(4.11) que la relación de las velocidades angulares está relacionada exclusivamente con los radios de la pista interior r_i y exterior r_e .

4.5. Ejemplos Numéricos

Rodamiento de Bolas

El primer problema numérico se basa en el ejemplo propuesto por Gismeros Moreno et al. [58]. Consiste en un rodamiento de 8 bolas, ver Fig. 4.4-a, donde en la pista interior se impone una velocidad angular constante de $\omega_i = 500$ rpm, en tanto, que la pista exterior se encuentra fija. Luego, en el centro se aplica una carga radial constante $Q = 100$ N en la dirección negativa del eje vertical. Los parámetros específicos del rodamiento se presentan en la Tabla 4.1. La fricción entre las bolas del rodamiento y las pistas es $\mu = 0.001$. Los coeficientes de restitución normal y tangencial entre las bolas y las pistas son $e_N = 0.9$ y $e_T = 0$, respectivamente. El huelgo radial entre las esferas y las pistas es un valor típico reportado en los catálogos de rodamientos, este es $g = 1 \times 10^{-5}$ m. Los resortes que representan la jaula del rodamiento tienen una rigidez

típica de $k = 1 \times 10^8$ N/m. El tiempo total de simulación fue de 1 s con un paso de tiempo de 1×10^{-4} s, el radio espectral del integrador fue $\rho_\infty = 0$ y el valor de la tolerancia para la convergencia fue $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. Considerando los radios del rodamiento, se calcula el coeficiente K mediante la Ec.(4.1), así como también los valores de A y B mediante las ecuaciones Ecs. (4.3,4.4). Finalmente, con el valor de $B/A = 521$ se determinan gráficamente los coeficientes necesarios para el cálculo del coeficiente de rigidez K y de las tensiones de contacto, estos son: $c_b = 0.22$, $c_\delta = 0.17$, $k = 0.021$, $c_\tau = 0.3$, $c_\sigma = 1$ y $c_G = 0.27$.

Magnitud	Valor	Unidad
Radio Pista Interior r_i	0.01277125	m
Momento de Inercia Esf. Interior	8.155×10^{-5}	kg m ²
Radio Pista Exterior r_e	0.02071875	m
Radio Bola r_b	0.00396875	m
Radio normal a la pista r_p	-0.00397875	m
Momento de Inercia de la Bola	1.2868×10^{-8}	kg m ²
Radio Jaula r_j	0.016745	m

Tabla 4.1: Propiedades geométricas y mecánicas del rodamiento.

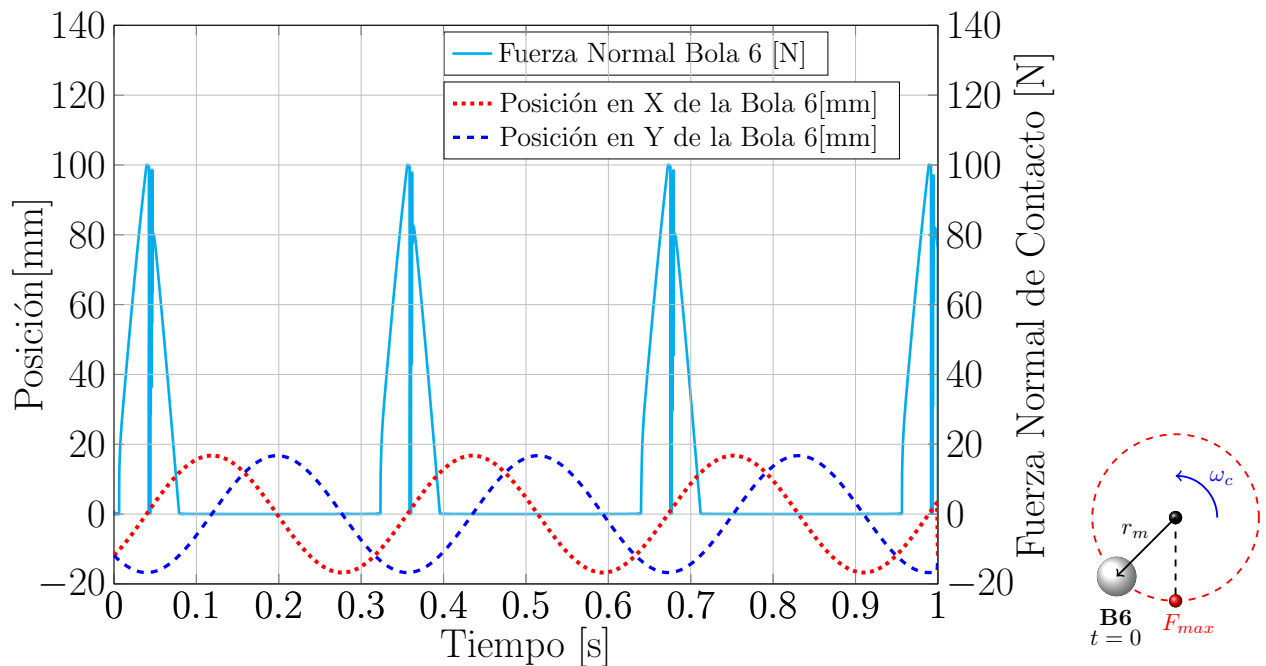


Figura 4.5: Fuerza vs. tiempo y posición vs. tiempo de la bola 6.

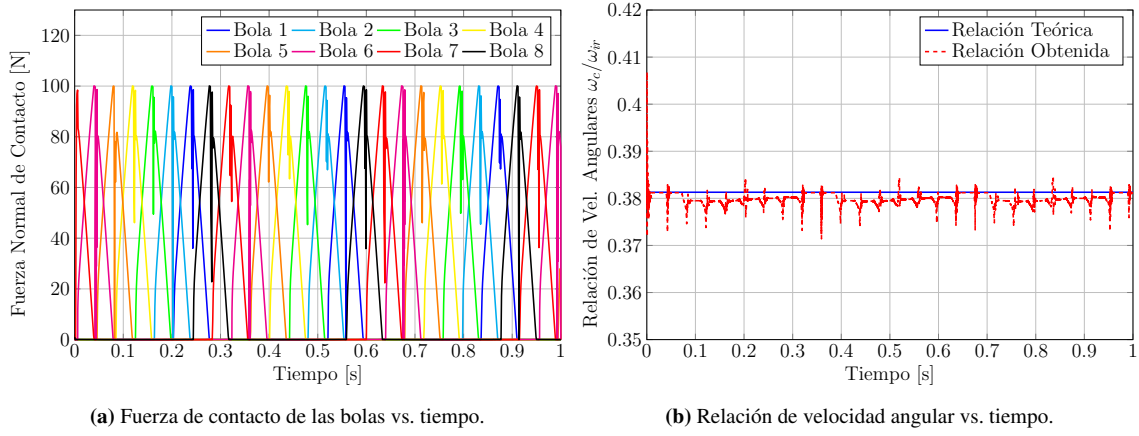


Figura 4.6: Resultados de fuerzas y velocidades.

Con el procedimiento descrito en la Sec.(4.3), la fuerza de contacto F_N entre la bola número 6 y la pista exterior varía entre 0 y 100 N, ver Fig. 4.5. Esta fuerza alcanza su valor máximo cuando la bola 6 pasa por el punto más bajo de la pista interior correspondiente a la posición $Y = -18$ mm y es igual a la fuerza exterior impuesta Q , ver Fig. 4.5. Con lo cual, en este instante de tiempo, únicamente la bola 6 soporta toda la carga aplicada al rodamiento. Un comportamiento similar se observa en las bolas restantes. Luego, cuando alguna bola no pasa por el punto más bajo, la carga impuesta es soportada con las bolas adyacentes a medida que entran y salen de la zona de mayor carga, tal como se muestra en la Fig. 4.6-a. Por otro lado, a partir de la Fig. 4.6-b, se muestra que la relación de velocidades angulares entre la jaula y la pista interior calculada analíticamente con la Ec.(4.11) es de 0.3813. Este valor se encuentra muy cercano al obtenido de forma numérica (Fig.4.6-b). Notar que los distintos picos que se observan en la Fig. 4.6-b corresponden a los instantes en que la bola se encuentra en el punto inferior soportando la mayor carga. Estos resultados se encuentran acordes con los presentados por Gismeros Moreno et al. [58]. Finalmente, se obtienen las tensiones de contacto para el valor máximo de la fuerza mediante las Ecs.(4.5), estas son

$$\sigma_{\text{máx}} = -7.06 \times 10^8 \text{ N/m}^2, \quad \tau_{\text{máx}} = 2.11 \times 10^8 \text{ N/m}^2, \quad \tau_{\text{Gmáx}} = 1.90 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \quad (4.12)$$

El paso de tiempo utilizado en el trabajo de Gismeros Moreno et al. [58] fue de 1×10^{-5} s, en tanto que en este trabajo, se pudo emplear un paso de tiempo de 1×10^{-4} s, es decir, un orden de magnitud mayor, lo que permitió reducir el costo computacional.

Mecanismo Biela-Manivela

El segundo ejemplo numérico corresponde al caso propuesto por Yao et al. [141]. Este problema consiste en un mecanismo del tipo biela-manivela, en el cual, se incluye un rodamiento de bolas en la unión entre la biela y la manivela, ver Fig. 4.7. Inicialmente, la biela tiene una velocidad angular constante de $\omega_z = 50$ rad/s y, en su configuración inicial, está completamente alineada con la manivela. En este trabajo se analizan

tres configuraciones distintas. La primera configuración corresponde al caso en el que tanto la biela como la manivela se modelan como cuerpos rígidos, introduciéndose además un huelgo entre las bolas y las pistas del rodamiento. La segunda configuración difiere en que la biela y la manivela se consideran como cuerpos flexibles. Finalmente, la tercera configuración analiza un sistema biela-manivela sin huelgo, donde ambos componentes se tratan como cuerpos flexibles. Las características geométricas y mecánicas del rodamiento y de cada cuerpo rígido se muestran en la Tabla 4.2. En las configuraciones en las que la biela y la manivela se modelan como cuerpos flexibles, se asume que el material es un acero elástico, con un módulo de Young de 210×10^9 Pa, una densidad de 7850 kg/m^3 y un coeficiente de Poisson de 0.3. El área de la sección transversal de la manivela es 0.00113 m^2 , mientras que la de la biela es 0.00116 m^2 . La inercia de la sección transversal de la manivela y de la biela es $1.068 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ y $1.117 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, respectivamente. Tanto la manivela como la biela están discretizadas utilizando cuatro elementos finitos de viga.

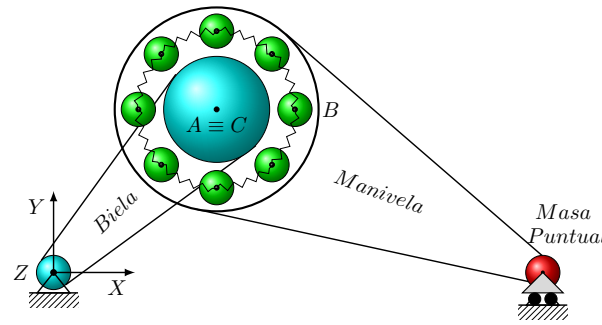


Figura 4.7: Mecanismo biela manivela.

El coeficiente de fricción entre las bolas y las pistas es de $\mu = 0.001$. Los coeficientes de restitución normal y tangencial entre las bolas y las pistas son $e_N = 0.9$ y $e_T = 0$, respectivamente. El huelgo radial entre las esferas y las pistas es de $g = 0.0004 \text{ m}$. Los resortes que representan la jaula del rodamiento tienen una rigidez $k = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ y un amortiguamiento $c = 1 \times 10^3 \text{ Ns/m}$. El tiempo total de simulación fue de 0.6 s con un paso de tiempo de $1 \times 10^{-4} \text{ s}$. El radio espectral del integrador fue $\rho_\infty = 0$. El valor de la tolerancia para la convergencia fue $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$.

Cuerpo	Largo [m]	Masa [kg]	Momento de Inercia [kg m^2]	Radio[m]
Biela	0.11	1	$I_{xx} = 0.0028, I_{yy} = 0.0006, I_{zz} = 0.0033$	-
Manivela	0.225	4	$I_{xx} = 0.0086, I_{yy} = 0.0251, I_{zz} = 0.0334$	-
Masa Puntual	-	2	$I_{xx} = 0.0013, I_{yy} = 0.0013, I_{zz} = 0.0021$	0.04
Bolas (8)	-	2.7×10^{-3}	$I = 3.267 \times 10^{-8}$	0.0055
Pista In. A	-	8×10^{-3}	$I = 3.643 \times 10^{-6}$	0.033745
Pista Ex. C	-	8×10^{-3}	$I = 6.523 \times 10^{-6}$	0.04515

Tabla 4.2: Propiedades geométricas y masas del rodamiento y del mecanismo biela-manivela.

Los resultados obtenidos para la fuerza de contacto entre la bola B y la pista exterior, tanto para la primera

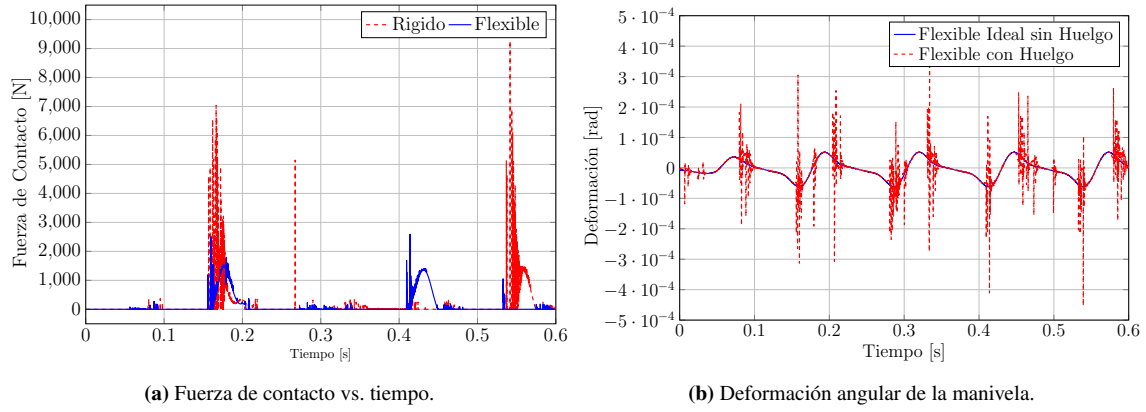


Figura 4.8: Resultados obtenidos para el ejemplo biela-manivela.

y segunda configuración se muestran en la Fig. 4.8-a. Se observa que la fuerza de contacto es mayor para el caso de la primera configuración, donde los cuerpos son rígidos, alcanzando valores máximos del orden de los 9100 N, similares a los reportados por Yao et al. [141]. Para el caso de la configuración flexible con juego, la fuerza máxima de contacto es de 2500 N. Luego, la Fig. 4.8 muestra la deformación angular de la manivela para la configuración flexible con huelgo y para la configuración flexible sin huelgo. De esta figura se observa que, al considerar el huelgo en el rodamiento, las deformaciones en la manivela son significativamente mayores en comparación con el caso en el que el rodamiento no presenta huelgo. Además, se observa que las deformaciones máximas corresponden a los instantes en que el rodamiento alcanza la posición más alta o la posición más baja durante el movimiento del mecanismo. Por último, las tensiones de contacto para una de las bolas en la condición de máxima carga (9100 N) son:

$$\sigma_{\text{máx}} = -4.5432 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \tau_{\text{máx}} = 1.362 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \tau_{\text{Gmáx}} = 1.226 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \quad (4.13)$$

A diferencia del trabajo de Yao et al. [141], que propone un sistema biela-manivela rígido, en este trabajo se incorporó un rodamiento a un mecanismo biela-manivela compuesto por una combinación de elementos rígidos y flexibles.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

5.1. Conclusiones

Las contribuciones presentadas en esta tesis han permitido el desarrollo de nuevas herramientas para modelar el contacto dinámico no suave en cuerpos rígidos esféricos. En particular, se han formulado e implementado tres nuevos elementos de contacto con fricción, cada uno con aplicaciones específicas en el ámbito de la dinámica de sistemas multicuerpo.

El primer elemento desarrollado modela la interacción entre cuerpos rígidos esféricos tridimensionales y una superficie plana. Este elemento incorpora de manera efectiva las fuerzas de fricción asociadas al deslizamiento, rodadura y giro, basándose en la ley de fricción de Coulomb.

El segundo elemento aborda la simulación del impacto entre cuerpos rígidos esféricos. Se ha proporcionado una formulación detallada que utiliza grandes rotaciones y coordenadas absolutas, incluyendo expresiones explícitas para las fuerzas internas y Hessianas.

El tercer elemento modela el impacto entre una esfera contenida dentro de otra esfera. La combinación de este elemento con el segundo permite representar de manera efectiva el comportamiento bidimensional de un rodamiento de bolas, ampliando así las aplicaciones prácticas de la metodología propuesta.

Todos los elementos desarrollados se han implementado en el marco de la nueva versión del esquema de integración temporal α -generalizado no suave desacoplado [32]. Este esquema ofrece ventajas significativas al integrar las partes suaves del movimiento con precisión de segundo orden y disipación controlada, superando las limitaciones de los integradores de primer orden, como el método Moreau-Jean, comúnmente utilizado en este tipo de modelos. Además, la formulación propuesta garantiza la satisfacción exacta de las restricciones de contacto en los niveles de posición y velocidad, eliminando la penetración entre los cuerpos.

Adicionalmente, se ha propuesto una nueva metodología para manejar impactos múltiples simultáneos con efectos de fricción. Este algoritmo, basado en la propuesta sin fricción de Cósimo et al. [33], ha sido modificado para incluir términos de fricción. La ley de impacto de Newton se aplica secuencialmente,

asumiendo tiempos de impacto locales instantáneos. Esta estrategia destaca por no requerir intervención del usuario ni análisis topológico para definir la secuencia de procesamiento de los impactos múltiples, simplificando su implementación en aplicaciones prácticas.

Asimismo, se ha introducido una nueva metodología para calcular las fuerzas de contacto entre cuerpos rígidos esféricos en el marco del análisis dinámico no suave, utilizando el integrador temporal α -generalizado no suave. Este método se basa en un enfoque multiescala, donde las fuerzas de contacto y las penetraciones se evalúan en términos de las velocidades e impulsos calculados por el integrador. La ley constitutiva de la mecánica de contacto se deriva de la teoría de la elasticidad, proporcionando una base teórica sólida para el análisis.

Se han presentado varios ejemplos de aplicaciones que demuestran la efectividad de las metodologías propuestas. Los resultados obtenidos se han comparado con soluciones analíticas y numéricas disponibles en la literatura, mostrando una excelente concordancia y una rápida tasa de convergencia en todos los casos estudiados.

Finalmente, se ha presentado un ejemplo de aplicación que ilustra el uso de estas herramientas en el análisis de un rodamiento de bolas inmerso en un mecanismo. El proceso de filtrado propuesto permite identificar de manera efectiva los impactos entre las bolas y las pistas del rodamiento. Esta detección facilita el cálculo preciso de las fuerzas y tensiones de contacto, demostrando la utilidad de la metodología en aplicaciones industriales reales.

En resumen, esta tesis contribuye al avance de la dinámica no suave mediante el desarrollo de herramientas teóricas y numéricas innovadoras, validadas a través de ejemplos prácticos y comparaciones con soluciones existentes. Los resultados obtenidos abren nuevas perspectivas para el análisis y diseño de sistemas mecánicos complejos.

5.2. Trabajos Futuros

Como líneas de trabajos a futuro se proponen:

1. Desarrollar e implementar un algoritmo de contacto/impacto para representar el comportamiento tridimensional de un rodamiento de bolas, considerando la interacción con las pistas exterior e interior.
2. Analizar las fuerzas y tensiones de contacto en rodamientos de bolas tridimensionales utilizando los modelos y las metodologías desarrolladas en esta tesis.
3. Evaluar la fatiga de contacto en los rodamientos de bolas a partir del análisis de las tensiones y fuerzas de contacto, con el objetivo de estimar su vida útil.
4. Implementar la metodología propuesta para el cálculo de la fuerza de contacto del Cap.3 en el entorno

de Oofelie [21], reduciendo el costo computacional del post proceso. De esta forma se buscará incluir un modelo de desgaste en las zonas de contacto afectada.

5. Diseñar y construir un dispositivo experimental que incorpore un rodamiento en un sistema mecánico, con el fin de validar los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta.
6. Establecer contacto y acuerdos de trabajo con empresas nacionales interesadas en los desarrollos obtenidos. Además, se procurará transferir estos avances a la comunidad científica nacional e internacional mediante congresos y publicaciones.

Bibliografía

- [1] V. Acary. «Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), págs. 224-250.
- [2] V. Acary y F. Bourrier. «Coulomb friction with rolling resistance as a cone complementarity problem». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 85 (2021), pág. 104046.
- [3] P. Alart y A. Curnier. «A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92.3 (1991), págs. 353-375. ISSN: 0045-7825.
- [4] P.F. Albrecht et al. «Assessment of the reliability of motors in utility applications-Updated». En: *IEEE Trans. Energy Convers.* 1 (1986), págs. 39-46.
- [5] E. Alizadeh, F. Bertrand y J. Chaouki. «Development of a granular normal contact force model based on a non-Newtonian liquid filled dashpot.» En: *Powder Technology* (2013).
- [6] J. Alves et al. «A comparative study of the viscoelastic constitutive models for frictionless contact interfaces in solids». En: *Mechanism and Machine Theory* 85 (2015), págs. 172-188.
- [7] C. Annavarapu et al. «A weighted Nitsche stabilized method for small-sliding contact on frictional surfaces». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283 (2015), págs. 763-781.
- [8] M. Arnold y O. Brüls. «Convergence of the generalized- α scheme for constrained mechanical systems». En: *Multibody System Dynamics* 18.2 (2007), págs. 185-202. DOI: [10.1007/s11044-007-9084-0](https://doi.org/10.1007/s11044-007-9084-0). URL: <https://doi.org/10.1007/s11044-007-9084-0>.
- [9] Y. Ayyad y M. Barboteu. «Formulation and analysis of two energy-consistent methods for nonlinear elastodynamic frictional contact problems». En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 228.1 (2009), págs. 254-269.
- [10] Bernard B. *Nonsmooth Mechanics*. Springer International Publishing, 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-28664-8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-28664-8). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28664-8>.

- [11] Haim Baruh. «Inconsistencies in Modeling Impact with Friction by Algebraic Equations». En: *Dynamics* 2.4 (2022), págs. 434-448.
- [12] O.A Bauchau. *Flexible multibody dynamics*. Vol. 176. Springer, 2011.
- [13] M. H. Bordbar y T. Hyppänen. «Modeling of binary collision between multisize viscoelastic spheres». En: *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* (2007).
- [14] N.V. Brilliantov et al. «The collision of particles in granular systems.» En: *Phys. A Stat.Mech. Appl.* (1996), [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(96\)00099-4](https://doi.org/10.1016/0378-4371(96)00099-4).
- [15] B. Brogliato. *Nonsmooth Impacts Mechanics - Models, Dynamics and Control*. Springer, 2016.
- [16] B. Brogliato. *Nonsmooth mechanics*. Vol. 3. Springer, 1999.
- [17] O. Brüls, V. Acary y A. Cardona. «Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized-alpha scheme». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281.0 (2014), págs. 131-161.
- [18] Olivier Brüls, Vincent Acary y Alberto Cardona. «On the Constraints Formulation in the Nonsmooth Generalized-alpha Method». En: *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Ed. por Remco Leine, Vincent Acary y Olivier Brüls. Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 335-374.
- [19] Glocker C. y Aeberhard U. «The Geometry Of Newton's Cradle». En: *Advances in Mechanics and Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, págs. 185-194. DOI: [10.1007/0-387-29195-4_16](https://doi.org/10.1007/0-387-29195-4_16). URL: https://doi.org/10.1007/0-387-29195-4_16.
- [20] G. Capobianco et al. «A nonsmooth generalized-alpha method for mechanical systems with frictional contact». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122.22 (2021), págs. 6497-6526.
- [21] A. Cardona, I. Klapka y M. Geradin. «Design of a New Finite Element Programming Environment». En: *Engineering Computations* 11 (1994), págs. 365-381.
- [22] F. Caselli y M. Frémond. «Collision of three balls on a plane». En: *Computational Mechanics* 43.6 (2009), págs. 743-754.
- [23] A. R. Champneys y P. L. Várkonyi. «The Painlevé paradox in contact mechanics». En: *IMA Journal of Applied Mathematics* 81.3 (2016), págs. 538-588.
- [24] V. Chawla y T. Laursen. «Energy consistent algorithms for frictional contact problem». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42.5 (1998), págs. 799-827.
- [25] Q. Chen et al. «A nonsmooth generalized-alpha scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), págs. 487-511.

- [26] X. Chen et al. «Experimental and Numerical Analysis on the Impact Wear Behavior of TP316H Steel». En: *Materials* 15.8 (2022).
- [27] J. Chung y G. Hulbert. «Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- alpha method». En: *ASME Journal of Applied Mechanics* 60.2 (1993), págs. 371-375.
- [28] P. Contensou. «Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie». En: *Kreiselp Probleme und Gyrodynamics, IUTAM Symposium Celerina*. Ed. por H. Ziegler. Berlin: Springer-Verlag, 1963, págs. 201-216.
- [29] E. Corral et al. «Dynamic Modeling and Analysis of Pool Balls Interaction». En: *Proceedings of the 9th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*. Ed. por A. Kecskeméthy y Flores Geu. Vol. 53. Berlin: Springer, 2020, págs. 201-216.
- [30] E. Corral et al. «Nonlinear phenomena of contact in multibody systems dynamics: a review». En: *Nonlinear Dynamics* 104 (2021), págs. 1269-1295.
- [31] A. Cosimo et al. «A General Purpose Formulation for Nonsmooth Dynamics with Finite Rotations: Application to the Woodpecker Toy». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16 (3 2021). 031001, págs. 10-10.
- [32] A. Cosimo et al. «A robust nonsmooth generalized- α scheme for flexible systems with impacts». En: *Multibody System Dynamics* 48.2 (2020), págs. 127-149.
- [33] A. Cósimo et al. «On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems». En: *Nonlinear Dynamics* 102.4 (2020), págs. 1997-2016.
- [34] C.A. Coulomb. *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la roideur des cordages*. Mémoire de Mathématique et de Physique, Paris, France, 1785.
- [35] Ma D. et al. «Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 470. 2169. 2014, págs. 1-22.
- [36] J.L.R. d'Alembert. *Traité de dynamique*. David l'aîné, 1743.
- [37] G. Darboux. «Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps». fre. En: *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* 4.1 (1880), págs. 126-160. URL: <http://eudml.org/doc/85056>.
- [38] J Garcia De Jalon, J Unda y Al Avello. «Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 56.3 (1986), págs. 309-327.
- [39] J. Garcia De Jalon y E. Bayo. *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [40] G. De Saxcé y Z.Q. Feng. «New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach». En: *Mechanics of Structures and Machines* 19.3 (1991), págs. 301-325.
- [41] S. Deng et al. «Nonlinear dynamic model of ball bearings with elastohydrodynamic lubrication and cage whirl motion, influences of structural sizes, and materials of cage». En: *Nonlinear Dynamics* 110.3 (2022), págs. 2129-2163.
- [42] Cataldo E. y R. Sampaio. «A new model of rigid bodies collision: the CS model». En: *Computational and Applied mathematics* (2000).
- [43] N. Estrada, A. Taboada y F Radjai. «Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance». En: *Phys. Rev. E* 78 (2008), pág. 021301.
- [44] N. Estrada et al. «Identification of rolling resistance as a shape parameter in sheared granular media». En: *Phys. Rev. E* 84 (2011), pág. 011306.
- [45] Pfeiffer F. y Glocker C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley-VCH Verlag GmbH, ago. de 1996. DOI: [10.1002/9783527618385](https://doi.org/10.1002/9783527618385). URL: <https://doi.org/10.1002/9783527618385>.
- [46] C. A. Felippa y B. Haugen. «A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.21–24 (2005), págs. 2285-2335. DOI: [10.1016/j.cma.2004.06.027](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.027).
- [47] P. Flores. *Concepts and formulations for spatial multibody dynamics*. Springer, 2015.
- [48] P. Flores y J. Ambrósio. «On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems». En: *Multibody System Dynamics* 24.1 (2010), págs. 103-122.
- [49] P. Flores, J. Ambrósio y H.M. Lankarani. «Contact-impact events with friction in multibody dynamics: back to basis.» En: *Mechanism and machine Theory* 184 (2023), pág. 105305.
- [50] P. Flores y H.M. Lankarani. *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Springer, Berlin, 2016.
- [51] P. Flores et al. «On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 25.3 (2011), págs. 357-375.
- [52] M. Frémond. «Rigid bodies collisions». En: *Physics Letters A* 204.1 (1995), págs. 33-41. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00418-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00418-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960195004183>.
- [53] J. Galvez et al. «A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics». En: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 121.16 (2020), págs. 3584-3609.
- [54] C.W. Gear, B. Leimkuhler y G.K. Gupta. «Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints». En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 12-13 (1985), págs. 77-90.

- [55] M. Géradin y A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. Wiley, 2001. ISBN: 0471489905.
- [56] J. Gerstmayr y H. Irschik. «On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach». En: *Journal of Sound and Vibration* 318.3 (2008), págs. 461-487. DOI: [10.1016/j.jsv.2008.04.019](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.019).
- [57] G. Gilardi e I. Sharf. «Literature survey of contact dynamics modelling». En: *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002), págs. 1213-1239.
- [58] R. Gismaros Moreno et al. «Enhanced modelling of planar radial-loaded deep groove ball bearings with smooth-contact formulation». En: *Multibody System Dynamics* 60.1 (2024), págs. 121-159.
- [59] R. Gismaros Moreno et al. «Modelling multiple-simultaneous impact problems with a nonlinear smooth approach: pool/billiard application». En: *Nonlinear Dynamics* 107.3 (2022), págs. 1859-1886.
- [60] R. Gismaros Moreno et al. «Synchronous Contact/Impact Events Modelling With A Smooth-Based Approach». En: *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*. Budapest University of Technology y Economics. 2021, págs. 55-66.
- [61] C. Glocker y F. Pfeiffer. «Multiple impacts with friction in rigid multibody systems». En: *Nonlinear Dyn.* 7.4 (1995), págs. 471-497.
- [62] R. Glowinski y P. LeTallec. «Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics». En: *SIAM* 79 (1989), págs. 379-416.
- [63] M. Haddouni et al. «Comparison of several formulations and integration methods for the resolution of DAEs formulations in event-driven simulation of nonsmooth frictionless multibody dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 41.3 (2017), págs. 201-231.
- [64] T. A. Harris y M. N. Kotzalas. *Rolling Bearing Analysis-2 Volume Set*. Crc Press, 2006.
- [65] M.D. Hersey. «Rigid body impact with moment of rolling friction». En: *Journal of Lubrication Technology* 91.2 (1969), págs. 260-263.
- [66] H. Hertz. «On the contact of elastic solids». En: *Z Reine Angew. Math.* 92 (1881), págs. 156-171.
- [67] M. R. Hestenes. «Multiplier and gradient methods». En: *Journal of optimization theory and applications* 4.5 (1969), págs. 303-320.
- [68] H. Hilber, T. Hughes y R. Taylor. «Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics». En: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977), págs. 283-292.
- [69] R. Hooke. *De Potentia Restitutiva, Or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. 1678.

- [70] G. Hu et al. «On the determination of the damping coefficient of non-linear spring-dashpot system to model Hertz contact for simulation by discrete element method». En: *Journal of Computers* 6 (5 2011), págs. 984-988.
- [71] J. Huang, da Silva M. V. y K. Krabbenhoft. «Three-dimensional granular contact dynamics with rolling resistance». En: *Computers and Geotechnics* 49 (2013), págs. 289-298.
- [72] K.H. Hunt y F.R.E. Crossley. «Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact». En: *J. Appl. Mech* 42.2 (1975), págs. 440-445.
- [73] Y. Hurmuzlu y V. Ceanga. «Impulse correlation ratio in solving multiple impact problems». En: *Impacts in mechanical systems*. Springer, 2000, págs. 235-273.
- [74] an I. y Gilmore B. J. «Multi-Body Impact Motion with Friction—Analysis, Simulation, and Experimental Validation». En: *Journal of Mechanical Design* 115.3 (1993), pág. 412. DOI: [10.1115/1.2919206](https://doi.org/10.1115/1.2919206). URL: <https://doi.org/10.1115/1.2919206>.
- [75] J. Irazabal, F. Salazar y E. Oñate. «Numerical modelling of granular materials with spherical discrete particles and the bounded rolling friction model. Application to railway ballast». En: *Computers and Geotechnics* 85.220 (2017), págs. 220-229.
- [76] R. Jankowski. «Analytical expression between the impact damping ratio and the coefficient of restitution in the non-linear viscoelastic model of structural pounding». En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* (2006), <https://doi.org/10.1002/eqe.537>.
- [77] R. Jankowski. «Non-linear viscoelastic modelling of earthquake-induced structural pounding». En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* (2005), <https://doi.org/10.1002/eqe.434>.
- [78] M. Jean. «The non-smooth contact dynamics method». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177 (1999), págs. 235-257.
- [79] M. Jean y J. J. Moreau. «Dynamics in the Presence of Unilateral Contacts and Dry Friction: A Numerical Approach». En: *Unilateral Problems in Structural Analysis — 2*. Springer Vienna, 1987, págs. 151-196.
- [80] B. Jian et al. «A normal contact force approach for viscoelastic spheres of the same material.» En: *Powder Technol* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.03.034>.
- [81] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985. URL: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>.
- [82] A. B. Jones. «A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions». En: (1960).

- [83] D. Kadau et al. «Pore stabilization in cohesive granular systems». En: *Phase Transitions* 76.4-5 (2003), págs. 315-331.
- [84] J. B. Keller. «Impact With Friction». En: *Journal of Applied Mechanics* 53.1 (mar. de 1986), págs. 1-4. ISSN: 0021-8936. DOI: [10.1115/1.3171712](https://doi.org/10.1115/1.3171712). URL: <https://doi.org/10.1115/1.3171712>.
- [85] S. Khaliwada, N. Chouw y J.W. Butterworth. «A generic structural pounding model using numerically exact displacement proportional damping». En: *Eng. Struct.* (2014). URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.016>.
- [86] N. Kikuchi y J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of variational Inequalities Constrains and Finite Element Method*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [87] C. Lanczos. *The variational principles of mechanics*. Dover Books on Physics (Book 4). Dover Publications; 4th Revised ed. edition, 1986.
- [88] H.M. Lankarani y P.E. Nikravesh. «A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems». En: *Journal of Mechanical Design* 112.3 (1990), págs. 369-376.
- [89] P. S. Laplace. *Traité de mécanique céleste*. Vol. 1. de l’Imprimerie de Crapelet, 1799.
- [90] T. A. Laursen y V. Chawla. «Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.5 (1997), págs. 863-886.
- [91] C. Le Saux, R.I. Leine y C. Glocker. «Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction». En: *Journal of Nonlinear Science* 15.1 (2005), págs. 27-61.
- [92] R. I. Leine y N. van de Wouw. *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Springer, 2008.
- [93] R.I. Leine. *Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion*. Arch Appl Mech, 2009.
- [94] R.I. Leine y C. Glocker. «A set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22.2 (2003), págs. 193-216.
- [95] E.V. Lens y A. Cardona. «A nonlinear beam element formulation in the framework of an energy preserving time integration scheme for constrained multibody systems dynamics». En: *Computers and Structures* 86.1 (2008), págs. 47-63.
- [96] C. Liu, K. Zhang y R. Yang. «The FEM analysis and approximate model for cylindrical joints with clearances». En: *Mechanism and machine theory* 42.2 (2007), págs. 183-197.

- [97] C. Liu, Z. Zhao y B. Brogliato. «Frictionless multiple impacts in multibody systems. I. Theoretical framework». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 464.2100 (dic. de 2008), págs. 3193-3211. DOI: [10.1098/rspa.2008.0078](https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0078). URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0078>.
- [98] J. Luo et al. «A nonsmooth modified symplectic integration scheme for frictional contact dynamics of rigid-flexible multibody systems». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 420 (2024), pág. 116726.
- [99] L. Luo y M. Nahon. «A compliant contact model including interference geometry for polyhedral objects.» En: *J. Comput. Nonlinear Dyn.* (2006), <https://doi.org/10.1115/1.2162870>.
- [100] M. Makela y P. Neittaanmaki. *Nonsmooth optimization: analysis and algorithms with applications to optimal control*. World Scientific, 1992.
- [101] D.B. Marghitu y E.D. Stoenescu. «Rigid body impact with moment of rolling friction». En: *Nonlinear Dynamics* 50 (2007), págs. 597-608.
- [102] F. Marques et al. «Modeling and analysis of friction including rolling effects in multibody dynamics: a review». En: *Multibody System Dynamics* 45 (2019), págs. 223-224.
- [103] D. Melanz et al. «A comparison of numerical methods for solving multibody dynamics problems with frictional contact modeled via differential variational inequalities». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 320 (2017), págs. 668-693.
- [104] J. J. Moreau. «Quadratic programming in mechanics: Dynamics of one-sided constraints». En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 4 (1966), págs. 153-158.
- [105] J. J. Moreau. «Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular materials». En: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 13.4-suppl (1994), págs. 93-114.
- [106] J.-J. Moreau. «Bounded variation in time». En: *Topics in Nonsmooth Mechanics* (1988), págs. 1-74.
- [107] J.J. Moreau y P. D. Panagiotopoulos. «Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics». En: *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Springer Vienna, 1988, págs. 1-82.
- [108] G. Nan, S. Jiang y D. Yu. «Dynamic analysis of rolling ball bearing-rotor based on a new improved model». En: *SN Applied Sciences* 4.6 (2022), pág. 173.
- [109] N.M. Newmark. «A method for computation for structural dynamics». En: *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 85 (1959), págs. 67-94.
- [110] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687. URL: <https://books.google.com.ar/books?id=-dVKAQAAIAAJ>.

- [111] N. S. Nguyen y B. Brogliato. *Multiple impacts in dissipative granular chains*. Vol. 72. Springer Science & Business Media, 2013.
- [112] P. E. Nikravesh. *Planar multibody dynamics: Formulation, programming and applications*. CRC press, 2007.
- [113] L. Paoli y M. Schatzman. «A Numerical Scheme for Impact Problems I: The One-Dimensional Case». En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40 (2002), págs. 702-733.
- [114] L. Paoli y M. Schatzman. «A Numerical Scheme for Impact Problems II: The Multidimensional Case». En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40 (2002), págs. 734-768.
- [115] H. Peng, N. Song y Z. Kan. «A nonsmooth contact dynamic algorithm based on the symplectic method for multibody system analysis with unilateral constraints». En: *Multibody System Dynamics* 49.2 (2020), págs. 119-153.
- [116] H. Peng, N. Song y Z. Kan. «A novel nonsmooth dynamics method for multibody systems with friction and impact based on the symplectic discrete format». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2019), págs. 1530-1557.
- [117] S.D. Poisson. *Traité de Mécanique*. Second Edition. Bachelier, 1833.
- [118] M. Powell. «A method for nonlinear constraints in minimization problems». En: *Optimization* (1969), págs. 283-298.
- [119] E. Pratt, A. Léger y M. Jean. «About a stability conjecture concerning unilateral contact with friction». En: *Nonlinear Dynamics* 59 (2010), págs. 73-94.
- [120] J. S. Przemieniecki. *Theory of matrix structural analysis*. Courier Corporation, 1985.
- [121] M. Rodrigues da Silva et al. «A compendium of contact force models inspired by Hunt and Crossley's cornerstone work». En: *Mechanism and Machine Theory* 167 (2022), pág. 104501.
- [122] A. Roy y J.A. Carretero. «A damping term based on material properties for the volume-based contact dynamics model». En: *Int. J. Non Linear Mech.* (2012). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.006>.
- [123] H. Safaeifar y A. Farshidianfar. «A new model of the contact force for the collision between two solid bodies». En: *Multibody System Dynamics* 50 (2020), págs. 233-257.
- [124] F. B. Seely y J. O. Smith. «Curso superior de resistencia de materiales». En: (1967).
- [125] A. Shabana. *Dynamics of multibody systems*. Cambridge university press, 2020.
- [126] A. Shabana. «Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments». En: *Multibody System Dynamics* 1.2 (1997), págs. 189-222. DOI: [10.1023/A:1009780515933](https://doi.org/10.1023/A:1009780515933).

- [127] D. S. Shah y V. N. Patel. «A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing». En: *Procedia Technology* 14 (2014), págs. 447-456.
- [128] A. Signorini. *Sopra alcune questioni di elastostatica*. Atti della Societa Italian per il Progresso della Scienza, 1933.
- [129] N. Song et al. «A novel nonsmooth approach for flexible multibody systems with contact and friction in 3D space». En: *Nonlinear Dynamics* 102.3 (2020).
- [130] D. E. Stewart y J. C. Trinkle. «An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction». En: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 39.15 (1996), págs. 2673-2691.
- [131] C. Studer y Glocker C. «Augmented Time-Stepping by Step Size Adjustment and Extrapolation». En: *Numerics of Unilateral Contacts and Friction: Modeling and Numerical Time Integration in Non-Smooth Dynamics* (2009), págs. 99-127.
- [132] A. Tasora y M. Anitescu. «A Convex Complementarity Approach for Simulating Large Granular Flows». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 5.3 (2010).
- [133] M Tiwari, K Gupta y O Prakash. «Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor». En: *J. Sound Vib.* 238.5 (2000), págs. 723-756.
- [134] Y. Tsuji, T. Tanaka y T. Ishida. «Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe». En: *Powder Technol.* (1992), [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(92\)88030-L](https://doi.org/10.1016/0032-5910(92)88030-L).
- [135] Y.T. Wang y V. Kumar. «Simulation of mechanical systems with multiple frictional contacts». En: *University of Pennsylvania* (1994).
- [136] T. M. Wasfy y A. K. Noor. «Computational strategies for flexible multibody systems». En: *Appl. Mech. Rev.* 56.6 (2003), págs. 553-613.
- [137] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley y Sons, 2002.
- [138] Y.R. Wua, Y.C. Chung e I.C. Wang. «Two-way coupled MBD–DEM modeling and experimental validation for the dynamic response of mechanisms containing damping particles». En: *Mechanism and Machine Theory* 159 (2021), pág. 104257.
- [139] X. Xiong, R. Kikuuwe y M. Yamamoto. «A contact force model with nonlinear compliance and residual indentation.» En: *J. Appl. Mech. Trans. ASME* (2014). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4024403>.
- [140] L. Xu. «A general method for impact dynamic analysis of a planar multi-body system with a rolling ball bearing joint». En: *Nonlinear Dynamics* 78.2 (2014), págs. 857-879.
- [141] T. Yao et al. «Multibody contact dynamics on mechanisms with deep groove ball bearing joints». En: *J. Sound Vib.* 31 (2017), págs. 4119-4135.

- [142] T. Yao et al. «Multibody dynamics simulation of thin-walled four-point contact ball bearing with interactions of balls, ring raceways and crown-type cage». En: *Multibody System Dynamics* 48.3 (2020), págs. 337-372.
- [143] K. Ye, L. Li y H. Zhu. «A note on the Hertz contact model with nonlinear damping for pounding simulation.» En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn* 38.9 (2009), págs. 1135-1142. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.883>.
- [144] A. S. Yigit y R. Ulsoy A. G. and Scott. «Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact». En: *Journal of sound and Vibration* 142.3 (1990), págs. 515-525.
- [145] J. Yu et al. «An improved compliant contact force model using a piecewise function for impact analysis in multibody dynamics». En: *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-body Dyn* (2020), <https://doi.org/10.1177/1464419319900874>.
- [146] J. Zhang et al. «A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics». En: *Mechanism and Machine Theory* 153 (2020), pág. 103946.
- [147] Q.J. Zheng, H.P. Zhu y A.B. Yu. «Finite element analysis of the contact forces between a viscoelastic sphere and rigid plane.» En: *Powder Technol.* (2012), <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.04.032>.
- [148] Y.C. Zhou et al. «Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 269.2 (1999), págs. 536-553.

Anexos

En el presente apartado se replican las publicaciones producto del trabajo desarrollado para esta Tesis. Los artículos se listan a continuación:

- Anexo A: **Sánchez, E.**, Cosimo, A., Bröls, O., Cardona, A., and Cavalieri, F. J. (2023). “Non-smooth numerical solution for Coulomb friction, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics.”. *Multibody System Dynamics*, 59(1), 69-103.
- Anexo B: **Sánchez, E.**, Cosimo, A., Bröls, O., Cardona, A., and Cavalieri, F. J. (2024). “Simulation of impacts between spherical rigid bodies with frictional effects”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(20), e7556.
- Anexo C: Cavalieri, F. J., **Sánchez, E.**, and Cardona, A. (2025). “Contact force multiscale calculation in the framework of the non-smooth dynamic approach”. *Multibody System Dynamics*, 1-32.

La tesista declara haber participado activamente en el desarrollo de los nuevos conceptos aportados y llevado a cabo los experimentos numéricos necesarios para alcanzar los resultados que se exponen. Estas tareas fueron supervisadas por el Dr. Federico Cavalieri y el Dr. Alberto Cardona, y realizadas en conjunto con los co-autores de cada artículo. Los abajo firmantes avalan esta declaración.

Dr. Federico J. Cavalieri
Director de Tesis

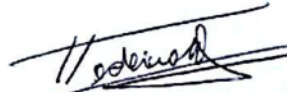
Dr. Alberto Cardona
Codirector de Tesis

Anexos

En el presente apartado se replican las publicaciones producto del trabajo desarrollado para esta Tesis. Los artículos se listan a continuación:

- Anexo A: **Sánchez, E.**, Cosimo, A., Bröls, O., Cardona, A., and Cavalieri, F. J. (2023). "Non-smooth numerical solution for Coulomb friction, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics.". *Multibody System Dynamics*, 59(1), 69-103.
- Anexo B: **Sánchez, E.**, Cosimo, A., Bröls, O., Cardona, A., and Cavalieri, F. J. (2024). "Simulation of impacts between spherical rigid bodies with frictional effects". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(20), e7556.
- Anexo C: Cavalieri, F. J., **Sánchez, E.**, and Cardona, A. (2025). "Contact force multiscale calculation in the framework of the non-smooth dynamic approach". *Multibody System Dynamics*, 1-32.

La tesista declara haber participado activamente en el desarrollo de los nuevos conceptos aportados y llevado a cabo los experimentos numéricos necesarios para alcanzar los resultados que se exponen. Estas tareas fueron supervisadas por el Dr. Federico Cavalieri y el Dr. Alberto Cardona, y realizadas en conjunto con los co-autores de cada artículo. Los abajo firmantes avalan esta declaración.


Dr. Federico J. Cavalieri
Director de Tesis


Dr. Alberto Cardona
Codirector de Tesis

Anexo A

Non-smooth numerical solution for Coulomb friction and sliding, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics

Eliana Sánchez¹, Alejandro Cosimo^{1,2}, Oliver Brüks², Alberto Cardona¹,
Federico J. Cavalieri¹

¹ Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL-CONICET, Predio CONICET Santa Fe "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina

² University of Liège, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, Allée de la Découverte 9, 4000 Liège, Belgium..

Abstract

The general motion of a sphere in a mechanism, in contact with a rigid planar surface under rolling, sliding and spinning friction, is studied in the context of non-smooth contact dynamics. The equations of motion are solved by the non smooth generalized- α implicit time integration scheme where the constraints at position and at velocity level are satisfied exactly without requiring to define any particular value for a penalty parameter. The geometrical properties of the spheres are described by a rigid body formulation with translation and rotational degrees of freedom. The robustness and the performance of the proposed methodology is demonstrated by different examples including both flexible and/or rigid elements.

A.1. Introduction

A mechanism is an assemblage of rigid and/or flexible bodies arranged in a special configuration whose purpose is to transform motion, force or energy into a desired set of outputs such as forces, displacements, velocities or accelerations [35]. The individual components of a mechanism are called links, which could be assumed either flexible or rigid under large displacements and finite rotations. The links can be connected by different types of force elements: springs, spring–dampers, beams, between others, or kinematic pairs such as: cylindrical, planar or spherical joints, which are often represented by mathematical constraints. Depending on the mechanism configuration, the links and the joints can be subjected to contact constraints which are defined by unilateral restrictions.

One alternative to model the kinematics of a mechanism is the Finite Element Method (FEM), where a detailed representation of the geometry and flexibility of the links and the joints is required. This methodology is realistic, but at the same time complex because of the large number of degrees of freedom which yields a time consuming computational method. Another alternative is to consider global models where deformation effects in joints are ignored and the links can be modeled with the hypothesis of rigid or flexible behaviour. G rardin and Cardona [33] presented a methodology in the framework of finite elements where total motion, including rigid body motion and elastic deformation is directly referred to an inertial frame and the non linear structural dynamics effect of the elements of a mechanism are also addressed. This methodology is used as a starting point for the developments presented in this work.

Certain constraints are imposed to the equations of motion of the system by equality or inequality equations in order to handle the relative motion between bodies in a numerical model of a mechanism. Some examples of rigid elements where equality constraints are used are: revolute, prismatic, hinge or cylindrical joints among others, see [33, 9]. On the other hand, inequality constraints are used to establish contact between bodies. These restrictions prevent in a mathematical form the penetration between components; to be imposed the gap distance between potential contact surfaces to be equal or greater than zero. Friction is also modelled by inequality constraints, as it will be seen later in this work. Some elements formulated by inequality constraints, that are often used in mechanisms, are: the wheel [14], the gear [13, 46, 50], the ball bearing [61, 47, 4], joints with clearances [16, 5, 30, 31], among others.

Several algorithms have been proposed in the literature to treat the inequality constraints, from the point of view of the regularization of the contact problem. One of the most used methods is the penalty approach. Displacements are the only variables in this formulation and, for this reason, the computational implementation is relatively easy to be done in a non linear finite element code.

This method includes a term in the energy functional that add a large fictitious energy in terms of constraints. It is commonly used in the framework of Discrete Element Method (DEM) [24, 11] and may be also combined with FEM [63]. The main disadvantage of the penalty regularization is the unavoidable penetration between contacting bodies and, when dynamics effects are taken into account, the time integration algorithms require a very small time step to accurately solve the equations of motion, specially when the bodies are in contact, yielding an important increment of the computational cost. Another inconvenience of this method is that the user must choose a proper value of the penalty parameter in a rather arbitrary way to achieve acceptable numerical results. The exact solution would be achieved with an infinite penalty value; however, large penalty values yield ill-conditioned matrices with severe precision losses in the solution. There are strategies to avoid factorizing ill-conditioned matrices in penalty methods, as Codina *et al* proposed [18]. Nevertheless, these strategies yield a more complex formulation and increase the computational effort requiring a large number of iterations and, anyway, penetration between contacting bodies is unavoidable.

Another alternative is a mathematical formulation related to nonlinear optimization, where Lagrange multipliers are introduced in the system Lagrangian. Two main approaches can be mentioned: the Lagrange multipliers and the augmented Lagrangian methods. In the first case, the contact problem yields a saddle point system to be solved at each iteration. The second formulation is a combination of the Lagrange multipliers and the penalty method. The Lagrange multipliers satisfy exactly the constraints, meanwhile the penalty term improves the convergence rate by producing a convex objective function far from the solution. In both cases, the presence of Lagrange multipliers guarantees the exact fulfillment of the constraints, overcoming the ill-conditioning inconvenience of penalty methods at the expense of an increase in the size of the system of equations due to the multipliers.

When the dynamic effects have to be considered to model multibody systems subjected to impacts, additional complications arise both in the theoretical formulations and in the numerical implementations with respect to the quasi-static case. In this sense, a proper selection of the time integration scheme, the time step and the numerical parameters of the integrator are required to obtain acceptable solutions. For example, implicit schemes as the Newmark family integrators, the Hilbert-Hughes-Taylor method (HHT) and the generalized- α method guarantee second order precision if the kinematic variables have a smooth evolution [17]. However, when velocity jumps occur in a short period of time as a consequence of impacts, a fictitious mechanical energy generates an unphysical behaviour in the system. This effect is magnified when the flexibility of the bodies is considered in the model. An alternative to avoid this problem for non linear multibody systems is the use of the energy preserving and/or decaying time integrator schemes, that guarantee unconditional

stability. However, these methods require to modify the element library of the pre-existing non linear code to specifically adapt the elements to the integrator; in other words, these kind of integrators are very intrusive. To overcome this limitation, several authors proposed different time integration schemes by using the so-called nonsmooth contact dynamics methodology which can solve efficiently problems involving strong discontinuities as is the case of impacts with friction [52, 58, 51, 60, 1, 34]. Nevertheless, they achieve only a first order of accuracy, being the main limitation for mechanisms composed by flexible links. Nowadays, several nonsmooth contact dynamic algorithms are implemented in many codes, e.g. LMGC90 [27], Siconos [3], Chrono [37], Algoryx [41, 7] or Oofelie [15], among others, destined to academic or industrial applications.

Three types of friction models can be considered in the contact of a spherical body with a surface, see Fig. A.1. The first one is *sliding friction*, where a set-valued force law with two degrees of freedom generates a force resisting only to sliding F_T . Different numerical simulations which include sliding friction were given in [8, 20, 55]. The second kind of friction model is *rolling friction*, where two translation degrees of freedom are required in the formulation. It is a set-valued force law that generates a moment M_T resisting to rolling. The earlier experiments about rolling friction were reviewed by Hersey [36]. Several analytical nonlinear dynamics models which consider rolling friction and impacts are given in [25, 48]. Many works that include the rolling friction effects to study the dynamic behaviour of engineering applications have been proposed, among which are the breakdown and the formation of granular material systems [62, 40, 28, 29, 39]. In this line of research, Tasora and Anitescu [59] and Huang *et al* [38] simulated granular materials with spherical particles under gravity using the standard decoupled rolling friction model with a second-order cone complementarity problem. In both cases, an associated friction flow rule was used. Recently, Acary and Bourrier [2] presented a Coulomb friction law with rolling resistance formulated as a cone complementarity problem based on the work of De Saxé and Feng [26]. The *spinning friction* or *drilling friction* is a set-valued force law that generates a moment M_N opposing to the normal relative spin of the bodies, thus only one rotational degree of freedom is required. Finally, the Coulomb-Contensou friction law implies the combination of sliding and drilling friction, i.e. an increase in the sliding velocity causes a decrease in the magnitude of the drilling torque [19, 44]. Several works which described the spatial friction derived from a non-smooth velocity pseudo potential and subdifferentials are presented by different authors [44, 42, 43]. In a recent paper presented by Capobianco *et al* [12], the authors described the sliding, rolling, and Coulomb-Contensou friction models in the context of the nonsmooth generalized- α time integrator expressed in acceleration level, with relative coordinates to describe the kinematics of the studied problems.

In the present paper, we develop a formulation of a spherical rigid body in contact with a planar surface by using large rotations and Cartesian coordinates considering the sliding, rolling and spinning friction effects in the context of a multibody dynamics system. This approach has advantages when describing the general case of flexible multibody systems. It basically allows to extend rigid multibody dynamics to the FEM (finite element method) context in a very consistent manner avoiding rewriting the equations for each particular case [33]. The detailed kinematic formulation of a spherical rigid body in contact with a planar surface is given, which can be combined with different types of rigid and flexible elements to model impact problems with friction. The equations of motion are solved with the new version of the non-smooth generalized α [21]. It guarantees the exact satisfaction of the bilateral and unilateral constraints at position and at velocity level avoiding the penetration between the contacting bodies. Furthermore, this fully decoupled time integration scheme reduces the number of iterations for convergence, and allows to use large time steps sizes compared with the original version presented by Brüls *et al* [10]. The numerical solutions achieved second order accuracy and controlled dissipation, something that is not possible with the first order integrators which are usually used for solving these kind of systems.

The numerical examples presented in this work were carried out in the research finite element code Oofelie, used for industrial applications as well as for academic studies. This software allows to simulate non-linear dynamic mechanical systems composed by rigid and flexible components with an efficient framework to deal with finite rotations and to assemble the equations of motion automatically [16, 20].

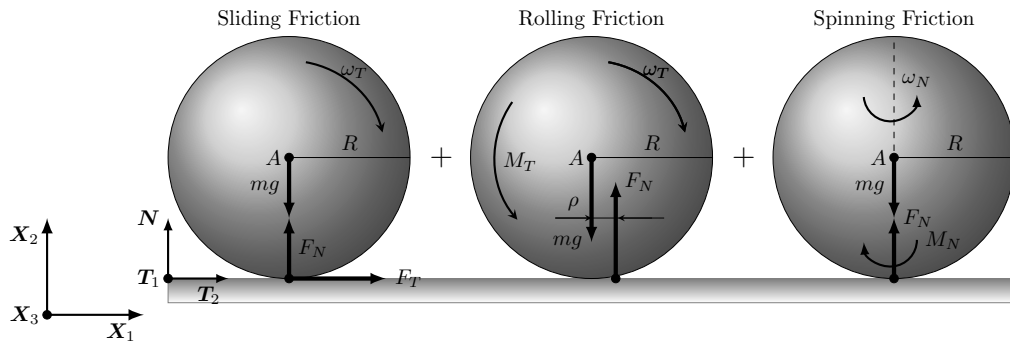


Figura A.1: Schematic configuration of the sliding, the rolling and the spinning resistance on a spherical body.

This work is organized as follows: Section A.2 gives a brief explanation of the decoupled version of the non-smooth generalized- α time integrator. Section A.3 describes the contact formulation and the general contact problem including friction is given in Section A.3. The equations related with the contact element are developed in Sections A.4 and A.5. Section A.6, presents numerical examples which demonstrate the robustness of the proposed algorithm. Finally, conclusions are drawn in Section A.7.

A.2. Time integration of non-smooth equations of motion

The equations of motion at velocity level for a multibody system with unilateral and bilateral constraints can be written in the following form :

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{v}^+ \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\mathbf{v} - \mathbf{g}_q^T d\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) dt \quad (\text{A.1b})$$

$$-\mathbf{g}_q^{\overline{\mathcal{U}}} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.1c})$$

$$-\left(g_{Nq}^j \mathbf{v}^+ + e_N^j g_{Nq}^j \mathbf{v}^-\right) \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(di_N^j), \quad \text{if } g_N^j(\mathbf{q}) \leq 0, \forall j \in \mathcal{U} \quad (\text{A.1d})$$

$$-\left(g_{Tq}^j \mathbf{v}^+ + e_T^j g_{Tq}^j \mathbf{v}^-\right) \in \partial\psi_{C(di_N^j)}(di_T^j), \quad \text{if } g_N^j(\mathbf{q}) \leq 0, \forall j \in \mathcal{U} \quad (\text{A.1e})$$

where

- $\mathbf{q}$ is the vector of nodal coordinates.
- $\dot{\mathbf{q}}^+(t) = \lim_{\gamma \rightarrow t, \gamma > t} \dot{\mathbf{q}}(\gamma)$ and $\mathbf{v}^+(t) = \lim_{\gamma \rightarrow t, \gamma > t} \mathbf{v}(\gamma)$ are the velocities after impact (right limits), while $\mathbf{v}^-(t) = \lim_{\gamma \rightarrow t, \gamma < t} \mathbf{v}(\gamma)$ denote the velocities before impact. These quantities are functions of bounded variation.
- The convention $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^+(t)$ and $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}^+(t)$ will be used in the remaining part of this work for conciseness in notation.
- $\mathbf{g}$ is the combined set of bilateral and unilateral constraints, and $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ is the corresponding gradient.
- $\mathcal{U}$ denotes the set of indices of the unilateral constraints, $\overline{\mathcal{U}}$ is its complementary set, i.e., the set of bilateral constraints and $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \overline{\mathcal{U}}$ is the full set of constraints.
- g_{Nq} and g_{Tq} are the gradient matrices in the normal and tangential directions at the contact point, respectively.
- At impact, the velocities $\mathbf{v}$ and $\mathbf{v}^-$ are related by the Newton's impact law $g_{Nq}^j \mathbf{v} + e_N^j g_{Nq}^j \mathbf{v}^- = \mathbf{0}$ in the normal direction, and $g_{Tq}^j \mathbf{v} + e_T^j g_{Tq}^j \mathbf{v}^- = \mathbf{0}$ in the tangential direction.
- $e_N^j \in [0, 1]$ and $e_T^j \in [0, 1]$ are the normal and the tangential coefficients of restitution at the contact point $j \in \mathcal{U}$, respectively.
- $d\mathbf{i}$ is the impulse measure of the contact reaction and the bilateral forces.
- di_N and di_T are the impulse measures of the contact reaction forces in the normal and tangential directions, respectively.

- $\psi_{\mathbb{R}^+}$ is the indicator function of the real half line $\mathbb{R}^+$ including zero and $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}$ is the sub-differential of $\psi_{\mathbb{R}^+}$. Then, $\psi_{C(di_N)}$ is the indicator function of a section of the Coulomb friction cone. Equations(A.1e) represent the frictional unilateral conditions. A deeper explanation about how to write the impact law as measure differential inclusions are given in [56].
- $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{ext}(t) - \mathbf{f}^{damp}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q})$ collects the external, damping and internal forces.
- $\mathbf{M}$ is the mass matrix which may, in general, depend on the coordinates.
- $d\mathbf{v}$ is the differential measure associated with the velocity $\mathbf{v}$ assumed to be of bounded variation.
- t is time, and dt is the corresponding standard Lebesgue measure.

Neglecting singular measures, the impulse measure can be decomposed as $d\mathbf{i} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}dt + \sum_i \mathbf{p}_i \delta_{t_i}$ where $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ are the smooth Lagrange multipliers; δ_{t_i} the Dirac delta supported at t_i ; and $\mathbf{p}_i$ is the impulse at the instant t_i . The inclusions in Eqs. (A.1d) and (A.1e) should be understood as compact notations for inclusions: (i) in $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_N^j)$ and $\partial\psi_{C(\boldsymbol{\lambda}_N^j)}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_T^j)$ during the smooth parts of the motion and (ii) in $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{p}_{iN}^j)$ and $\partial\psi_{C(\mathbf{p}_{iT}^j)}(\mathbf{p}_{iT}^j)$ at the impact times t_i .

The time integration scheme used in this work is the decoupled version of the non-smooth generalized- α method described in Cosimo *et al* [21]. This is an implicit time integration scheme resulting in three decoupled sub-problems to be solved at each time step by using an iterative Newton semi-smooth method, which can also be interpreted as an active set method. The first sub-problem corresponds to the smooth motion contribution, where the equations of motion are integrated with second order accuracy by the generalized- α scheme [21]. The two other sub-problems are related to the impulsive contributions (non smooth) at position and at velocity levels solved. The general form of the integrator for a general multibody system that includes unilateral and bilateral constraints yields in the following set of equations:

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1})\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}},T} \left(k_s \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} - p_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2a})$$

$$-k_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2b})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{U}_{n+1} - \frac{h^2}{2} \mathbf{f}^p - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathbf{A},T} (k_p \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathbf{A}} - p_p \mathbf{g}_{n+1}^{\mathbf{A}}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2c})$$

$$-k_p \mathbf{g}_{n+1}^{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2d})$$

$$-\frac{k_p^2}{p_p} \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2e})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{W}_{n+1} - h \mathbf{f}^v - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathbf{B},T} (k_v \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\mathbf{B}} - p_v \mathbf{g}_{n+1}^{\mathbf{B}}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2f})$$

$$-k_v \mathbf{g}_{n+1}^{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2g})$$

$$-\frac{k_v^2}{p_v} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\bar{\mathbf{B}}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2h})$$

where Eqs.(A.2)-a-b give the smooth motion, meanwhile Eqs.(A.2)-c-d-e and Eqs.(A.2)-f-g-h give the position and velocity impulsive corrections. The following notation is used for conciseness in Eqs.(A.2) :

$$\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^T = \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}}}^T(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}^T} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{f}^v = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{\mathbf{U}}^T} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathbf{U}}} \quad (\text{A.5})$$

where $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ is the Lagrange multiplier associated to the bilateral restriction, and $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ and $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}$ are the contributions of smooth motion to the position, the velocity and the acceleration vectors of the systems, respectively. The position jump contribution $\mathbf{U}_{n+1}$ due to impact is associated with the Lagrange multiplier $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$ for the unilateral and bilateral constraints. The Lagrange multiplier $\boldsymbol{\Lambda}$ is an impulsive force that can be interpreted as the integral of the reactions in the time interval $(t_n, t_{n+1}]$, and is associated with the velocity jump $\mathbf{W}_{n+1}$. Then, taking into account the splitting of motion into a smooth and non-smooth contributions, the final displacement and velocity fields are computed by adding the correction vectors $\mathbf{U}_{n+1}$ and $\mathbf{W}_{n+1}$ to the smooth motion as follows,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (\text{A.6b})$$

An augmented Lagrangian approach is used, with penalty factors of the smooth, position and velocity subproblems $p_s > 0$, $p_p > 0$, $p_v > 0$, respectively. The scalar factors $k_s > 0$, $k_p > 0$ and $k_v > 0$ contribute to an improvement of the condition number of the iteration matrix by scaling the constraints. The algorithm is completed with the following difference equations of the generalized- α scheme

$$\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{A.7a})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{A.7b})$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_n \quad (\text{A.7c})$$

where $\mathbf{a}_{n+1}$ is a pseudo acceleration term that arises in the generalized- α integrator scheme. The numerical coefficients γ , β , α_m , and α_f are selected by fixing the desired value of the spectral ratio at infinity $\rho_\infty \in [0, 1]$,

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = 0.5 + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = 0.25(\gamma + 0.5)^2 \quad (\text{A.8})$$

The set of active unilateral and bilateral constraints of the position correction $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{n+1}$ and the

set of active unilateral and bilateral constraints of the velocity correction $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{n+1}$, together with their complementary sets $\overline{\mathcal{A}} \equiv \overline{\mathcal{A}}_{n+1}$ and $\overline{\mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{B}}_{n+1}$, are defined in the following form

$$\mathcal{A}_{n+1} = \overline{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{U} : k_p \boldsymbol{\nu}_{n+1}^j - p_p \mathbf{g}_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (\text{A.9a})$$

$$\overline{\mathcal{A}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}_{n+1} \quad (\text{A.9b})$$

$$\mathcal{B}_{n+1} = \overline{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{A}_{n+1} : k_v \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^j - p_v \mathring{\mathbf{g}}_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (\text{A.9c})$$

$$\overline{\mathcal{B}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_{n+1} \quad (\text{A.9d})$$

The residual vectors $\mathbf{r}^s$, $\mathbf{r}^p$, $\mathbf{r}^v$ for the nonlinear smooth, position jump and velocity jump sub-problems are obtained from Eqs.(A.2)-a-b, (A.2)-c-d-e and (A.2)-f-g-h, respectively. These three nonlinear problems are solved iteratively by a Newton method, with correction vectors of unknowns defined as:

$$\Delta \mathbf{x}^s = \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \\ \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{A}} \\ \Delta \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\overline{\mathcal{A}}} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}^v = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{W}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\mathcal{B}} \\ \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\overline{\mathcal{B}}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

These corrections are evaluated by solving at each iteration

$$\mathbf{S}_t^i \Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{r}^i, \quad \text{for } i = s, p, v \quad (\text{A.11})$$

with iteration matrices given by:

$$\mathbf{S}_t^s = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{s*} & -k_s \mathbf{g}_{q,n+1}^{\overline{\mathcal{U}},T} \\ -k_s \left(\mathbf{g}_{q,n+1}^{\overline{\mathcal{U}}} + \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{G}^s \right) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{S}_t^p = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{p*} & -k_p \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{A},T} & \mathbf{0} \\ -k_p \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{k_p^2}{p_p} \mathbf{I}^{\overline{\mathcal{A}}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{S}_t^v = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{v*} & -k_v \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{B},T} & \mathbf{0} \\ -k_v \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{B}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{k_v^2}{p_v} \mathbf{I}^{\overline{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

where $\mathbf{I}^{\bar{A}}$ and $\mathbf{I}^{\bar{B}}$ are identity matrices and

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_t^{s*} &= \frac{1 - \alpha_m}{h(1 - \alpha_f)\gamma} \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) + \mathbf{C}_t + \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{K}_t^s, \\
\mathbf{K}_t^s &= \frac{\partial \left(\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} - \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{U},T} (k_s \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{U}} - p_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{U}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}) \right)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}}, \\
\mathbf{C}_t &= p_s \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{U},T} \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1})}{\partial \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}}, \quad \mathbf{G}^s = \frac{\partial (\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{q}},n+1}^{\bar{U}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}}, \\
\mathbf{S}_t^{p*} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) - \frac{\partial \left(\mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{A},T} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{\bar{A}} \right)}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial \mathbf{f}^p(\mathbf{q}_{n+1}, \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{v}}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_{n+1}} + \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{q}_{n+1}}, \\
\mathbf{S}_t^{v*} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) + p_v \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{B},T} \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{B}} - h \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})}{\partial \mathbf{v}_{n+1}}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

The parameters of the integrator can be chosen as $k_s = p_s = \bar{m}/h$, $k_p = p_p = \bar{m}$ and $k_v = p_v = \bar{m}$ to improve the convergence rate. Here, $\bar{m}$ is a characteristic mass of the problem. The complete version of the integrator is not reproduced here for conciseness, more details can be found in [21] and the pseudocode of the algorithm is given in the Appendix A1. An extension of this algorithm to consider multiple impact collisions can be found in [22].

A.3. Contact formulation

The mechanical contact problem concerns the interaction between bodies at their boundary surfaces. In our case, the contact surfaces are a spherical surface and a plane. Many alternatives have been presented in the literature to represent the kinematics of the boundary contact surfaces. One option is to consider rigid bodies with a mathematical description given by convective coordinates as proposed by Wriggers and Neto [53]. An alternative is to consider flexibility in which case the boundary surface could be described by a shell-like finite element mesh. This option gives a realistic model with a lot of information about the dynamics of the system. However, the finite element mesh used to represent the sphere is quite complex to be applied in a general mechanism and generates a large number of degrees of freedom with a significant increase in the computational time. Another alternative is to consider a global model with rigid bodies, where the spherical and planar surfaces are described analytically and attached to rigid bodies to give their inertia properties. This formulation does not increase significantly the number of degrees of freedom of the global system and for this reason, it is computationally efficient and relatively easy to be implemented.

The strategy we adopted to develop a new contact model for a rigid sphere in contact with a planar surface considering sliding, rolling and spinning friction effects, followed the Finite Element

Method as presented in [33]. The development was made in the framework of non-smooth contact dynamics with finite displacements and large rotations referred to inertial frame. The integration of the equations of motion was made with the non-smooth generalized- α time integrator scheme [21].

Frictional contact problem

The non-conservative character of the friction forces introduces additional complexity in the mechanical contact problem with respect to the frictionless case. Marques *et al* [49] made a review of the modelling and analysis of frictional effects in multibody systems. In spite of the different friction models proposed along the years, the Coulomb friction law [23] continues to be the most popular model used in numerical simulations. The decoupled version of the nonsmooth generalized- α time integrator requires to impose unilateral constraints both at the position level (position correction subproblem) and at the velocity level (velocity correction subproblem). Constraints at the position level allow to compute the displacements correction to verify the non-penetration constraint, while constraints at the velocity level give the corrections due to the velocity jumps produced by impacts.

The solution of the unilateral frictional contact problem at the position level is given by:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu}) &= \operatorname{argmin} [\Pi^{c,p}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\nu})] \\ g_N &\geq 0 \quad \nu_N \geq 0, \quad g_N \nu_N = 0; \\ \|\mathbf{g}_T\| &\geq 0, \quad \|\boldsymbol{\nu}_T\| \leq \mu \nu_N, \quad \|\mathbf{g}_T\| (\|\boldsymbol{\nu}_T\| - \mu \nu_N) = 0 \end{aligned} \tag{A.16}$$

where $\Pi^{c,p} = -g_N \nu_N - \mathbf{g}_T \cdot \boldsymbol{\nu}_T$ is the contact pseudo-potential at position level (which includes friction effects). The gap vector $\mathbf{g}$ and the Lagrange multiplier $\boldsymbol{\nu}$ are split into normal components g_N and ν_N and into tangential components $\mathbf{g}_T$ and $\boldsymbol{\nu}_T$, respectively. This splitting is carried out using the normal vector $\mathbf{N}$ to the contact surface of one body. Then, $\mathbf{g}_T$ is the tangential component of the incremental relative displacement between two points in contact during the considered period of time (the integrator time step). It is important to remark that it is mandatory to impose the Coulomb friction constraint at the position level in the framework of our integrator. In order to understand this, we recall that the time integration scheme is characterized by three decoupled sub-problems, and that the correction at position level is blind to any correction done at velocity level for the same time step because both terms are independent from each other. The need to impose friction at position level in sliding was demonstrated in one example by Galvez *et al* [32].

The restrictions of contact, stick or slip are described by the inequality constraints Eq.(A.16). The first inequality in Eq. (A.16)-b indicates the non-penetration constraint; the second one is the non-traction condition (only compression is allowed) and the third one is the complementarity equation. This multivalued contact law can be also expressed using pseudo-potentials in the form

of an inclusion,

$$-\nu_N \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(g_N) \quad (\text{A.17})$$

where $\psi_{\mathbb{R}^+}(g_N)$ is the zero-infinity indicator function of the real half line $\mathbb{R}^+$ and $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(g_N)$ is the sub-differential of $\psi_{\mathbb{R}^+}(g_N)$. The second set of restrictions, Eq. (A.16)-c, represents the classical Coulomb's friction law. The two bodies are assumed in contact, with $g_N = 0$ and $\nu_N > 0$ (note that if $\nu_N = 0$, there is no friction and $\|\nu_T\| = 0$). Two different conditions arise: *stick* or *slip*. In the stick case, there is no relative displacement between the bodies ($\|g_T\| = 0$), while in the slip case the bodies slide over each other ($\|g_T\| > 0$). The first inequality states that the modulus of the tangential relative displacement should be positive or zero; the second one establishes that the maximum value of the tangential contact force is $\mu\nu_N$, where μ is the dry friction coefficient; the third one is the complementarity equation, which states that $\|g_T\|$ and $(\|\nu_T\| - \mu\nu_N)$ cannot be simultaneously different from zero. Hence, when $\|\nu_T\| < \mu\nu_N$ and $\|g_T\| = 0$ the contact status is in stick, and when $\|g_T\| > 0$, the body slips and the modulus of the tangential force is equal to $\|\nu_T\| = \mu\nu_N$.

The equations of the frictional contact problem (A.16)-c are not complete, and need to be supplemented by a slip rule. An associative slip rule is considered, in which the tangential incremental displacement and the tangential contact force are assumed collinear, with the tangential force opposed to motion:

$$g_T \|\nu_T\| = -\|g_T\| \nu_T \quad (\text{A.18})$$

In the same form as in unilateral contact, this multivalued friction law can also be expressed using pseudo-potentials in the form of inclusions as follows,

$$-\nu_T \in \partial\psi_{C(\nu_N)}^*(g_T) \quad \text{when } g_N = 0 \quad (\text{A.19})$$

where ψ_C^* is the conjugate function of ψ_C and $\partial\psi_C^*$ its sub-differential and $C(\nu_N)$ is the cross-section of the Coulomb's cone with radius $\mu\nu_N$ defined as

$$C(\nu_N) = \{-\nu_T \mid \|\nu_T\| \leq \mu\nu_N\} \quad (\text{A.20})$$

The solution of the frictional contact problem at velocity level is computed as follows:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}, \mathbf{A}) &= \operatorname{argmin} [\Pi^{c,v}(\mathbf{W}, \mathbf{A})] \\ \dot{g}_N &\geq 0, \quad \Lambda_N \geq 0, \quad \dot{g}_N \Lambda_N = 0; \\ \|\dot{g}_T\| &\geq 0, \quad \|\mathbf{A}_T\| \leq \mu\Lambda_N, \quad \|\dot{g}_T\| (\|\mathbf{A}_T\| - \mu\Lambda_N) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

where $\Pi^{c,v} = -\dot{g}_N \Lambda_N - \dot{g}_T \cdot \mathbf{A}_T$ is the contact pseudo-potential at velocity level (which includes friction effects); Λ_N and $\mathbf{A}_T$ are the normal and the tangential Lagrange multipliers at velocity

level in the normal and tangential directions, respectively. The terms $\dot{g}_N$ and $\dot{g}_T$ express the Newton impact's law in the normal and tangential directions, respectively, and are given by:

$$\begin{aligned}\dot{g}_N &= g_{Nq,n+1}v_{n+1} + e_N g_{Nq,n}v_n \quad (= 0) \\ \dot{g}_T &= g_{Tq,n+1}v_{n+1} + e_T g_{Tq,n}v_n \quad (= 0)\end{aligned}\tag{A.22}$$

Here, e_N and e_T are the coefficients of restitution in the normal and tangential directions, respectively. Then, the note $(= 0)$ on the right-hand-side of the former definitions, indicates that the corresponding equation is zero when convergence is achieved.

The first inequality in Eq. (A.21)-b indicates that when impacting, $\dot{g}_N = 0$ and a velocity jump is produced (Newton's impact law in the normal direction); the second one is the non-traction condition (only compression is allowed at impact) and the third one is the complementarity equation.

The second set of restrictions, Eq. (A.21)-c, gives the impact equations in the tangential direction. The two bodies are assumed impacting, with $\dot{g}_N = 0$ and $\Lambda_N > 0$. Two different conditions arise: *stick* or *slip*. In the stick case, a tangential impact between the bodies is produced ($\|\dot{g}_T\| = 0$), with post-impact velocity $g_{Tq,n+1}v_{n+1}$ (pre-impact velocity is $g_{Tq,n}v_n$) given by the Newton law while in the slip case the bodies slide over each other ($\|\dot{g}_T\| > 0$). The first inequality states that when impacting, $\|\dot{g}_T\| = 0$ and a velocity jump is produced (Newton's impact law in the tangential direction); the second one establishes that the maximum value of the tangential impulsion is $\mu\Lambda_N$, where μ is the dry friction coefficient; the third one is the complementarity equation, which states that $\|\dot{g}_T\|$ and $(\|\Lambda_T\| - \mu\Lambda_N)$ cannot be simultaneously different from zero. Hence, when $\|\Lambda_T\| < \mu\Lambda_N$ and $\|\dot{g}_T\| = 0$ the impact status is such that a velocity jump is produced, and when $\|\dot{g}_T\| > 0$, the body slips and the modulus of the tangential multiplier is $\|\Lambda_T\| = \mu\Lambda_N$.

An associative slip rule is assumed, in which the tangential velocity jump and the tangential contact impulse are considered collinear with the tangential impulse opposed to motion:

$$\dot{g}_T \|\Lambda_T\| = -\|\dot{g}_T\| \Lambda_T\tag{A.23}$$

In a real sphere / plane contact, both bodies deform. When the sphere rotates in rolling motion, a non-symmetric contact pressure distribution is produced. Therefore, the contact reaction Λ_N is displaced by a distance ρ from the projection of the center of the sphere, see Fig. 1. The eccentricity of the normal contact force produces an antagonist moment of maximum value $\|\chi_T\| = \rho\Lambda_N$ which is at the origin of the rolling resistance. This effect is more evident in elastoplastic or viscoelastic materials as for instance the rubber composites used in vehicle wheels. The equations of rolling resistance can be expressed in terms of a dimensionless coefficient of rolling $f_\rho = \rho/R$, where R is the radius of the sphere. The phenomenon is analogous to the Coulomb friction.

The three-dimensional impulsive antagonist moment χ_T acting over the sphere has two

components χ_1 and χ_2 along both tangential directions to the plane $\mathbf{T}_1$ and $\mathbf{T}_2$ at the contact point P , respectively, it is $\chi_T = \chi_1 \mathbf{T}_1 + \chi_2 \mathbf{T}_2$ (Fig. 1). It is always opposing motion with modulus equal to $\|\chi_T\| = \rho \Lambda_N$ for non null velocity, while for zero angular velocity it can take any value below $\rho \Lambda_N$. This is represented by inequality constraints analogous to those of sliding friction Eq.(A.16):

$$\|\omega_T\| \geq 0 \quad \|\chi_T\| \leq \rho \Lambda_N \quad \|\omega_T\|(\|\chi_T\| - \rho \Lambda_N) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Λ_N is the normal impulse and $\omega_T = \omega_1 \mathbf{T}_1 + \omega_2 \mathbf{T}_2$ is the tangential spatial angular velocity of the sphere, with components ω_1 and ω_2 along directions $\mathbf{T}_1$ and $\mathbf{T}_2$, respectively. The first condition in Eq.(A.24) indicates that the tangential rotation velocity is positive or zero. The second inequality establishes that the maximum value of the moment for which the sphere stays without rotational speed $\|\omega_T\| = 0$ is $\|\chi_T\| < \rho \Lambda_N$. In the case that $\|\chi_T\| = \rho \Lambda_N$, the tangential rotation velocity $\|\omega_T\| > 0$ and the sphere is in rolling motion. The third equation is the complementarity equation. Finally, in case of motion with $\|\omega_T\| > 0$ and $\|\chi_T\| > 0$, an associative rule states that the tangential angular velocity is opposed to the resistant moment χ_T :

$$\omega_T \|\chi_T\| = -\|\omega_T\| \chi_T \quad (\text{A.25})$$

Analogously to the rolling resistance, an impulsive *spinning* resistant moment χ_N originated by the friction between the plane and the sphere can be considered. Again, the equations can be expressed as inequality constraints as in Eqs.(A.24) but taking into account that this moment is aligned with the normal direction $\mathbf{N}$:

$$|\omega_N| \geq 0 \quad |\chi_N| \leq \gamma \Lambda_N \quad |\omega_N|(|\chi_N| - \gamma \Lambda_N) = 0 \quad (\text{A.26})$$

where $\omega_N = \omega \cdot \mathbf{N}$ is the normal component of the spatial angular velocity and γ is a parameter with dimensions of length, equivalent to ρ for the rolling friction, which controls the magnitude of spinning resistance. Again, an associative rule is given which tells that the normal rotation velocity is opposed to the impulsive spinning resistant moment:

$$\omega_N |\chi_N| = -|\omega_N| \chi_N \quad (\text{A.27})$$

The saddle point problems stated by Eqs.(A.16, A.21) and by Eqs.(A.24, A.26) have all the same structure and can be solved by using the augmented Lagrangian formulation (Alart and Curnier [6], Pietrzak and Curnier [54], Stupkiewicz *et al* [57]). The form of this Lagrangian allows the use of a monolithic solution scheme based on a semi-smooth Newton like method to solve these problems simultaneously for the Lagrange multipliers and for the displacements and rotations.

The augmented Lagrangian function for the frictional contact problem at position level in terms

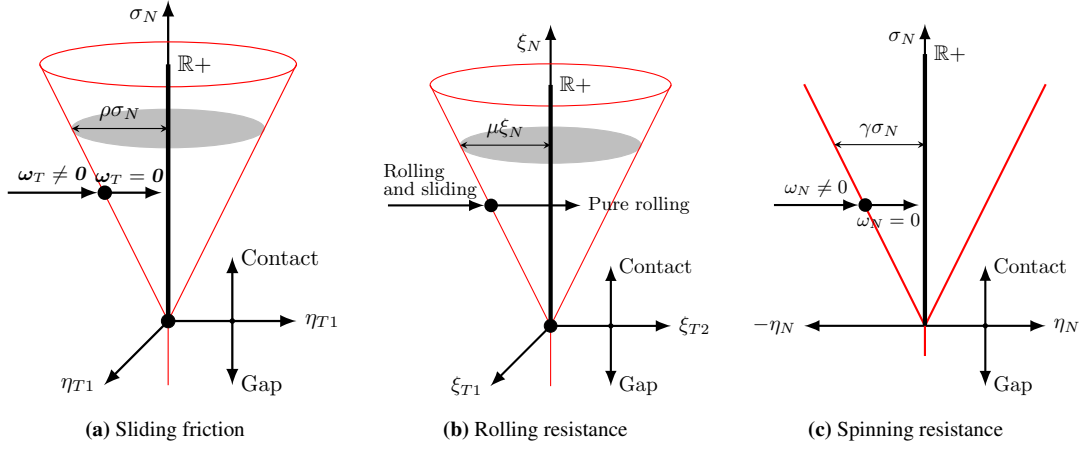


Figure A.2: Augmented Coulomb isotropic friction cone, and rolling and drilling resistance cones.

of $\mathbf{q}$ and $\boldsymbol{\nu}$, Eq.(A.16), is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^p(\mathbf{q}_{n+1}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}) = & -k_p g_{N,n+1} \nu_{N,n+1} + \frac{p_p}{2} (g_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_p} \text{dist}^2 [\xi_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_p \mathbf{g}_{T,n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} + \frac{p_p}{2} \|\mathbf{g}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_p} \text{dist}^2 [\boldsymbol{\xi}_{T,n+1}, C_{\xi_N}] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

where $\xi_N = k_p \nu_{N,n+1} - p_p g_{N,n+1}$ is the augmented multiplier at position level for the normal direction while $\boldsymbol{\xi}_T = k_p \boldsymbol{\nu}_{T,n+1} - p_p \mathbf{g}_{T,n+1}$ is the corresponding augmented multiplier at position level for the tangential direction; p_p is a positive penalty parameter and k_p is a scaling factor for the Lagrange multiplier. The default values of p_p and k_p in numerical computations were given in Sec. 2. As the solution does not depend on the value of these parameters, eventually, different sets of these parameters can be used for the normal and for the tangential parts to improve the convergence rate in some problems. The function $\text{dist}(\mathbf{z}, C)$ is the distance between a point $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ and the convex set C . The cone C_{ξ_N} is the convex set defined by the extension of the friction cone $C(k_p \nu_N + p_p g_N) \equiv C(\xi_N)$ to the half-line $\mathbb{R}^-(\xi_N)$, i.e., the set of negative values of the normal augmented multiplier $\xi_N = k_p \nu_N + p_p g_N$, see Fig.A.2-a [32].

The formulation of the problem for sliding, rolling and drilling resistance at velocity level is given by an augmented Lagrangian function split in three terms that correspond to the sliding, the rolling and the drilling contributions:

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \mathcal{L}_S^v(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) + \mathcal{L}_R^v(\omega_{T,n+1}, \chi_{T,n+1}) + \mathcal{L}_D^v(\omega_{N,n+1}, \chi_{N,n+1}) \quad (\text{A.29})$$

The sliding contribution to the augmented Lagrangian is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^v(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = & -k_v \dot{g}_{N,n+1} A_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} (\dot{g}_{N,n+1})^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\sigma_{N,n+1}, \mathbb{R}^+] \\ & - k_v \dot{\mathbf{g}}_{T,n+1} \cdot \mathbf{A}_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\dot{\mathbf{g}}_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2 [\boldsymbol{\sigma}_{T,n+1}, C_{\sigma_N}] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

where $\sigma_N = k_v \Lambda_N - p_v \dot{g}_N$ and $\sigma_T = k_v \Lambda_T - p_v \dot{g}_T$ are the augmented multipliers at velocity level in the normal and tangential direction, respectively. C_{σ_N} is a section of radius $\mu \sigma_N$ of the augmented Coulomb friction cone expressed in terms of velocity variables. Then, p_v is a positive penalty parameter and k_v is the scaling factor for the Lagrange multiplier.

The rolling contribution to the augmented Lagrangian is given by

$$\mathcal{L}_R^v(\omega_{T,n+1}, \chi_{T,n+1}) = -k_v \omega_{T,n+1} \cdot \chi_{T,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\omega_{T,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2[\eta_{T,n+1}, C_{\chi_T \sigma_N}] \quad (\text{A.31})$$

which is expressed in terms of the tangential components of the spatial angular velocity ω and the impulsive antagonist moment χ . Then, $\eta_{T,n+1} = k_v \chi_{T,n+1} - p_v \omega_{T,n+1}$, is the augmented multiplier. Then, $C_{\chi_T \sigma_N}$ is the convex set defined by the extension η_T to the half-line $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$, see Fig.A.2-b. Finally, the drilling contribution to the augmented Lagrangian is given by

$$\mathcal{L}_D^v(\omega_{N,n+1}, \chi_{N,n+1}) = -k_v \omega_{N,n+1} \chi_{N,n+1} + \frac{p_v}{2} \|\omega_{N,n+1}\|^2 - \frac{1}{2p_v} \text{dist}^2[\eta_{N,n+1}, C_{\eta_N \sigma_N}] \quad (\text{A.32})$$

which is expressed in terms of the normal components of the spatial angular velocity ω and the impulsive antagonist moment χ . where $\eta_{N,n+1} = k_v \chi_{N,n+1} - p_v \omega_{N,n+1}$ is an augmented multiplier. Then, $C_{\eta_N \sigma_N}$ is the convex set defined by the extension η_N to the half-line $\mathbb{R}^-(\sigma_N)$, see Fig.A.2-c.

A.4. Internal force vectors

In order to simplify the analysis, the sliding, the rolling and the spinning resistance models are studied independently as Fig. A.1 shows schematically. The local internal force vectors and Hessian matrices, both at position and velocity levels, contribute to the generalized internal forces vectors and global tangent matrices by a standard assembly procedure. In the frame on the non-smooth generalized- α method, the contact elements contribute only to the position and velocity corrections, i.e. they are absent from equations for the smooth motion. Thus, only the position and the velocity subproblems will be analysed. In what follows, the subindex n or $n + 1$ will be omitted as much as possible from the equations to simplify the notation.

Variation of the augmented Lagrangian for the sliding, rolling and spinning resistance

The generalized internal force vectors at position level for sliding resistance is obtained by taking variations in $\mathcal{L}^p$ of Eq.(A.28) giving

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_S^p(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}) = & -k_p \delta \nu_N g_N - \xi_N \delta g_N - \frac{1}{p_p} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\xi_N, \mathbb{R}^+) \right] \\ & - k_p \delta \nu_T \cdot \mathbf{g}_T - \boldsymbol{\xi}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T - \frac{1}{p_p} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\boldsymbol{\xi}_T, C_{\xi_N}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

The variation of the term $(1/2)\text{dist}^2(\xi_N, \mathbb{R}^+)$ in Eq. (A.33) gives

$$\delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\xi_N, \mathbb{R}^+) \right] = \begin{cases} \xi_N \delta \xi_N & \text{if } \xi_N < 0 \\ 0 & \text{if } \xi_N \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

which defines the contact status, e.g if $\xi_N < 0$ the gap condition is active and the bodies are separated; on the contrary, if $\xi_N \geq 0$ the bodies are in contact. Then, the variation of the term $(1/2)\text{dist}^2(\xi_T; C_{\xi_N})$ associated to sliding friction contact problem yields

$$\delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\xi_T; C_{\xi_N}) \right] = \begin{cases} \xi_T \cdot \delta \xi_T & \text{if } \xi_N < 0 \quad \text{Gap} \\ 0 & \text{if } \|\xi_T\| < \mu \xi_N \quad \text{Stick} \\ (\|\xi_T\| - \mu \xi_N) \tau_p \cdot \delta \xi_T & \text{if } \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N \quad \text{Slip} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

where the friction conditions are shown in Eq.(A.35) and $\tau_p = \xi_T / \|\xi_T\|$ is a unit vector that defines the tangential direction of the contact force. Similarly, the variation of the augmented Lagrangian for sliding, rolling and spinning resistance at velocity level (Eqs.(A.30, A.31,A.32)) is,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_S^v(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = & -k_v \delta \Lambda_N \dot{g}_N - \sigma_N \delta \dot{g}_N - \frac{1}{p_v} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\sigma_N, \mathbb{R}^+) \right] - k_v \delta \mathbf{A}_T \cdot \dot{\mathbf{g}}_T - \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \delta \dot{\mathbf{g}}_T \\ & - \frac{1}{p_v} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\boldsymbol{\sigma}_T, C_{\sigma_N}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\delta \mathcal{L}_R^v(\boldsymbol{\omega}_T, \boldsymbol{\chi}_T) = -k_v \boldsymbol{\omega}_T \cdot \delta \boldsymbol{\chi}_T - \boldsymbol{\eta}_T \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_T - \frac{1}{p_v} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\boldsymbol{\eta}_T, C_{\boldsymbol{\chi}_T \sigma_N}) \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\delta \mathcal{L}_D^v(\omega_N, \chi_N) = -k_v \omega_N \delta \chi_N - \eta_N \delta \omega_N - \frac{1}{p_v} \delta \left[\frac{1}{2} \text{dist}^2(\eta_N, C_{\eta_N \sigma_N}) \right] \quad (\text{A.38})$$

where the variation of terms $(1/2)\text{dist}^2(\cdot, \cdot)$ is computed as in Eqs.(A.34, A.35) using the augmented multipliers $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\chi}$ instead of $\boldsymbol{\xi}$.

Internal force vectors for the sliding, rolling and spinning resistance

The internal force vectors for the different friction cases can then be readily identified as those conjugated to the variation of configuration, i.e. $\delta \mathcal{L}^p(\boldsymbol{\Phi}) = \delta \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}^p(\boldsymbol{\Phi})$ for the position level and $\delta \mathcal{L}^v(\dot{\boldsymbol{\Phi}}) = \delta \dot{\boldsymbol{\Phi}}^T \mathbf{F}^v(\dot{\boldsymbol{\Phi}})$ for the velocity level. Here, $\boldsymbol{\Phi}$ is the generalized coordinates vector which includes the Lagrange multipliers and the dot indicates time differentiation. Then, by taking variations of the sliding resistance Lagrangian at position level, see Eq.(A.33), with $\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{q}^T \ \nu_N \ \nu_T^T]^T$, the internal force vector at position level for the different contact status yields,

$$\delta \mathcal{L}_S^p(\Phi) = \delta \Phi^T \mathbf{F}_S^p(\Phi) \rightarrow \mathbf{F}_S^p(\Phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \nu_N \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \nu_T \end{pmatrix} & \xi_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \xi_N - \mu \xi_N \mathbf{g}_{Tq}^T \tau_p \\ -k_p g_N \\ \frac{k_p}{p_p} (-k_p \nu_T + \mu \xi_N \tau_p) \end{pmatrix} & \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N \quad \text{Slip} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \xi_N - \mathbf{g}_{Tq}^T \xi_T \\ -k_p g_N \\ -k_p \mathbf{g}_T \end{pmatrix} & \|\xi_T\| < \mu \xi_N \quad \text{Stick} \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

The linearization of the internal force vector at position level from Eq.(A.39) gives the contact Hessian matrix for the different conditions, see Appendix A2. The internal force vectors and Hessian matrices at velocity level are computed by the same procedure as before, but taking into account that the generalized coordinates vector at velocity level is given by $\dot{\Phi} = [\mathbf{v}^T \ \Lambda_N \ \Lambda_T^T \ \chi_N \ \chi_T^T]^T$ which includes the Lagrange multipliers for the sliding, rolling and spinning motion. From the variation of the Lagrangian $\delta \mathcal{L}_S^v(\dot{\Phi})$, given in Eq.(A.36), the sliding resistance contribution to the internal force vector for the different contact status is

$$\mathbf{F}_S^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_N \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_T \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \sigma_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \sigma_N - \mu \sigma_N \mathbf{g}_{Tq}^T \tau_v \\ -k_v \dot{g}_N \\ \frac{k_v}{p_v} (-k_v \Lambda_T + \mu \sigma_N \tau_v) \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \|\sigma_T\| \geq \mu \sigma_N \quad \text{Slip} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \sigma_N - \mathbf{g}_{Tq}^T \sigma_T \\ -k_v \dot{g}_N \\ -k_v \dot{\mathbf{g}}_T \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \|\sigma_T\| < \mu \sigma_N \quad \text{Stick} \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

where $\tau_v = \sigma_T / \|\sigma_T\|$ is a unit vector that defines the tangential direction of the contact force at velocity level. The Hessian matrices are obtained by a linearization of the internal contact force vectors of Eq.(A.40), see Appendix B. The internal force vector for the rolling resistance with the

different status is obtained from the Lagrangian variation presented in Eq.(A.37) giving

$$\mathbf{F}_R^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ -\frac{k_v^2}{p_v}\chi_T \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \sigma_N < 0 \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_{Tq}^T \eta_T \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ -k_v \omega_T \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \|\eta_T\| < \rho \sigma_N \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho \sigma_N \omega_{Tq}^T \tau_{TW} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \frac{k_v}{p_v} [-k_v \chi_T + \rho \sigma_N \tau_{TW}] \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \|\eta_T\| \geq \rho \sigma_N \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

where $\tau_{TW} = \eta_T / \|\eta_T\|$. The Hessian matrix is given by the linearization of Eq.(A.41), see Appendix A2. Finally, the internal force vector at velocity level for spinning resistance for the different status is calculated from Eq.(A.38) yielding,

$$\mathbf{F}_D^v(\dot{\Phi}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v}\chi_N \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \sigma_N < 0 \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_{Nq}^T \eta_N \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ -k_v \omega_N \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \|\eta_N\| < \gamma \sigma_N \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma \sigma_N \omega_{Nq}^T \text{sgn}(\eta_N) \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \frac{k_v}{p_v} [-k_v \chi_N + \gamma \sigma_N \text{sgn}(\eta_N)] \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \|\eta_N\| \geq \gamma \sigma_N \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

and the Hessian matrix is obtained by linearization of Eq.(A.42), see Appendix A2. These internal force vectors and Hessian matrices have been developed in a completely general form, allowing to include the kinematics of any element by properly defining the gap distance vector and the gradients in both the normal and tangential directions. Next section particularizes to the case of the

sphere-plane frictional contact element.

A.5. Sphere-plane frictional contact model

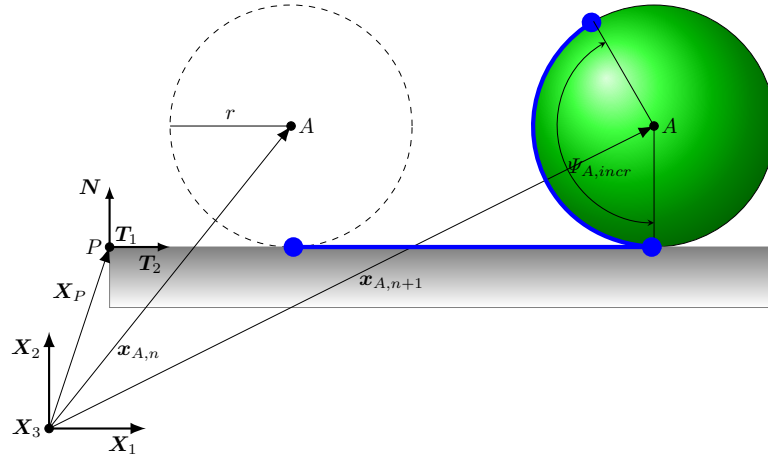


Figura A.3: General configuration for the three-dimensional sphere-plane contact model.

The sphere-plane contact element represents motion of a rigid ball over a fixed planar surface as shown in Fig. A.3. The surface is considered planar and fixed for conciseness; however, the formulation could be easily extended to eliminate these restrictions. The total motion is referred to an inertial frame defined by a set of orthonormal basis vectors $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ and $\mathbf{X}_3$. The sphere-plane contact element is formed by a sphere described by a node A located at the ball centre and a planar surface defined by a reference node P , a unit vector $\mathbf{N}$ normal to the plane and two tangential unit vectors $\mathbf{T}_1$ and $\mathbf{T}_2$ orthogonal to $\mathbf{N}$. The coordinates of the reference node P are given by the position vector $\mathbf{X}_P$ while the coordinates of node A at the current and previous time step are given by vectors $\mathbf{x}_{A,n+1}$ and $\mathbf{x}_{A,n}$, respectively. The description of motion of the sphere is completed by giving the rotation vector at node A from time step n to time step $n + 1$, which is represented by the incremental rotation vector $\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} \in \mathbf{R}^3$ as follows

$$\exp(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{A,\text{incr}}) = \mathbf{R}_{A,n}^T \mathbf{R}_{A,n+1}$$

where the exponential map $\exp(\tilde{\boldsymbol{\Psi}})$ is used. Here, $\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{A,\text{incr}})$ is the so-called Cartesian rotation vector which has the direction of the rotation axis and a length equal to the amplitude of the incremental rotation [33]. The operator $\tilde{\cdot} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}^3$ returns a 3×3 skew-symmetric matrix such that $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. We recall that in the scope of Sec. A.2, the “tilde” operator is used to denote the smooth contribution, and should not be confused with the notation for skew operator to be used later in the paper. The gap between the contact surfaces is represented by vector

$\mathbf{g}$, which is decomposed into the normal and the tangential directions $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}_1$ and $\mathbf{T}_2$:

$$\mathbf{g}_{n+1} = g_{N,n+1}\mathbf{N} + g_{T1,n+1}\mathbf{T}_1 + g_{T2,n+1}\mathbf{T}_2 \quad \text{with} \quad g_N \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \mathbf{g}_{T,n+1} = [g_{T1,n+1} \ g_{T2,n+1}]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.43})$$

By taking into account that the sphere has radius r , the normal gap g_N at the current configuration is calculated as the normal projection of the distance between the nodes A and P minus r as follows,

$$g_{N,n+1} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{X}_P) - r \quad (\text{A.44})$$

The normal gap g_N represents the shortest distance from the boundary surface of the sphere to the plane at the current configuration. As usual in contact mechanics, if this measure is greater than zero it implies that the sphere is separated from the plane and when $g_N = 0$ it expresses that the sphere is in contact. On the other hand, for a given time interval $(t_n, t_{n+1}]$ when the bodies are in contact, i.e $g_N = 0$, the kinematic constraint which imposes that the sphere can be in pure rolling or in sliding movement is computed using the incremental tangential vector $\mathbf{g}_T$ defined as

$$\mathbf{g}_{T,n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} \times \mathbf{N})r - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \\ \mathbf{T}_2 \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} \times \mathbf{N})r - \mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

where the term $\mathbf{T}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n})$ gives the component of displacement of the node A in the direction $\mathbf{T}_\alpha$, with $\alpha = 1, 2$. The term $\mathbf{T}_\alpha \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,n+1} \times \mathbf{N}) r$, represents the arc-length increment of the sphere boundary during rotation. Therefore, two scenarios can be defined: i) if $\mathbf{g}_T = \mathbf{0}$ the sphere is in a pure rolling motion because the displacement of the contact point over the plane is equal to the arc-length of motion on the sphere, see Fig. A.3; and ii) if $\mathbf{g}_T \neq \mathbf{0}$ the sphere is in sliding motion. Finally, the generalized gap vector which includes the normal gap and the incremental tangential gap is defined as follows,

$$\mathbf{g}_{n+1} = \begin{bmatrix} g_{N,n+1} \\ g_{T1,n+1} \\ g_{T2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{X}_P) - r \\ \mathbf{T}_2 \cdot \boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \\ -\mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r - \mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

where properties of the scalar triple product for orthonormal vectors were used.

In order to calculate the internal force vectors and the Hessian matrices presented in Sec. A.4, the constraints gradient matrix is required. The variation of the normal gap g_N (A.44) is given by

$$\delta g_N = g_{Nq} \delta \mathbf{q} \quad (\text{A.47})$$

where $\delta \mathbf{q} = [\delta \mathbf{x}_A^T \ \delta \boldsymbol{\Theta}_A^T]^T$ is the virtual variation of the position coordinates vector, with $\delta \mathbf{x}_A$ the variation of the position of node A and $\delta \boldsymbol{\Theta}_A$ the variation of the material rotation at node A , both

at the current configuration. Matrix g_{Nq} is the gradient matrix for the normal gap:

$$g_{Nq} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

Similarly, by taking the virtual variation of the incremental tangential displacements g_T given in Eq.(A.45), the following equation is obtained,

$$\delta g_T = g_{Tq} \delta q \quad (\text{A.49})$$

where g_{Tq} is the gradient matrix for the tangential gap which yields

$$g_{Tq,n+1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^T & \mathbf{T}_2^T \mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}})r \\ -\mathbf{T}_2^T & -\mathbf{T}_1^T \mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}})r \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

where the so-called tangent operator $\mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}})$, which relates the variation of the material rotation $\delta \Theta_A$ to the variation of the incremental rotational vector, was used. This relation can be written $\delta \Psi_A = \mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}}) \delta \Theta_A$, see [33] for a full expression of $\mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}})$.

Concerning the Hessian matrix computation at position level, the linearisation of the internal force vectors are required. We do not give here these expressions for conciseness of presentation. Note that usually, the factor $\mathbf{T}^{-1}(\Psi_{A,\text{incr}})$ in Eq.(A.50) can be considered constant and therefore, the gradient matrices for the normal and tangential direction could be also assumed constant, thus $\Delta g_{Tq} = \Delta g_{Nq} \approx \mathbf{0}$. Then, the computational implementation of the Hessian matrix is notably simplified.

The internal force vectors at velocity level are computed following a similar procedure as above. However, now we require the evaluation of the Newton impact's law which for this element is written:

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_{N_{n+1}} \\ \dot{g}_{T1_{n+1}} \\ \dot{g}_{T2_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{v}_{A,n+1} + e_N \mathbf{v}_{A,n}) \\ (\mathbf{T}_2 \cdot \omega_{A,n+1} r - \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_{A,n+1}) + e_T (\mathbf{T}_2 \cdot \omega_{A,n} r - \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{v}_{A,n}) \\ (-\mathbf{T}_1 \cdot \omega_{A,n+1} r - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_{A,n+1}) + e_T (-\mathbf{T}_1 \cdot \omega_{A,n} r - \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{v}_{A,n}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

The formulation in our code uses material angular velocities Ω as independent variables, therefore we express $\omega_A = \mathbf{R}_A \Omega_A$, and we get $\delta \omega_A = \mathbf{R}_A \delta \Omega_A$ [33]. Then, the normal and tangential components of the variation of spatial angular velocity result $\delta \omega_{N,A} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_A \delta \Omega_A$ and $\delta \omega_{T\alpha,A} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{R}_A \delta \Omega_A$ with $\alpha = 1, 2$, respectively. These variations expressed in terms of the velocity coordinate vector $\delta \mathbf{v} = [\delta \dot{\mathbf{x}}_A^T \delta \Omega_A^T]^T$ yield

$$\delta \omega_{N,A} = \omega_{Nq} \delta \mathbf{v} \quad \delta \omega_{T,A} = \omega_{Tq} \delta \mathbf{v} \quad (\text{A.52})$$

where the gradient matrices for the normal and tangential components of the angular velocity are

$$\omega_{Nq} = [\mathbf{0}^T \mathbf{N}^T \mathbf{R}_A] \quad \omega_{Tq} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{T}_1^T \mathbf{R}_A \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{T}_2^T \mathbf{R}_A \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

Finally, to compute the Hessian matrices at velocity level, the linearisation of the Newton impact's law of Eq.(A.51) is required, thus

$$\Delta \dot{\mathbf{g}}_N = \dot{\mathbf{g}}_{Nq} \Delta \mathbf{v} \quad \Delta \dot{\mathbf{g}}_T = \dot{\mathbf{g}}_{Tq} \Delta \mathbf{v} \quad (\text{A.54})$$

where $\Delta \mathbf{v} = [\Delta \dot{\mathbf{x}}_A^T \Delta \dot{\boldsymbol{\Omega}}_A^T]^T$ and the gradient matrices $\dot{\mathbf{g}}_{Nq}$ and $\dot{\mathbf{g}}_{Tq}$ are the same as those given in Eq.(A.48,A.49). Lastly, the variation of the unit vectors in the tangential direction for the sliding, the rolling and the spinning resistance, they are $\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\xi}_T / \|\boldsymbol{\xi}_T\|$, $\boldsymbol{\tau}_v = \boldsymbol{\sigma}_T / \|\boldsymbol{\sigma}_T\|$ and $\boldsymbol{\tau}_{TW} = \boldsymbol{\eta}_T / \|\boldsymbol{\eta}_T\|$, are give by

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\tau}_p &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_p \otimes \boldsymbol{\tau}_p) \frac{\Delta \boldsymbol{\xi}_T}{\|\boldsymbol{\xi}_T\|} \\ \Delta \boldsymbol{\tau}_v &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_v \otimes \boldsymbol{\tau}_v) \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}_T}{\|\boldsymbol{\sigma}_T\|} \\ \Delta \boldsymbol{\tau}_{TW} &= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_{TW} \otimes \boldsymbol{\tau}_{TW}) \frac{\Delta \boldsymbol{\eta}_T}{\|\boldsymbol{\eta}_T\|} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

The linearization of the augmented multipliers are

$$\begin{aligned} \Delta \xi_N &= k_p \Delta \nu_N - p_p \dot{\mathbf{g}}_{Nq} \Delta \mathbf{q} & \Delta \xi_T &= k_p \Delta \nu_T - p_p \dot{\mathbf{g}}_{Tq} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \sigma_N &= k_v \Delta \lambda_N - p_v \dot{\mathbf{g}}_{Nq} \Delta \mathbf{v} & \Delta \sigma_T &= k_v \Delta \lambda_T - p_v \dot{\mathbf{g}}_{Tq} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \eta_N &= k_v \Delta \chi_N - p_v \omega_{Nq} \Delta \mathbf{v} & \Delta \eta_T &= k_v \Delta \chi_T - p_v \omega_{Tq} \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

with $\Delta \mathbf{q} = [\Delta \mathbf{x}_A^T \Delta \boldsymbol{\Theta}_A^T]^T$. Thus, the Hessian matrices at position and velocity level for the sliding, rolling and spinning can been addressed.

A.6. Numerical examples

Six numerical examples are presented to show the accuracy and robustness of the proposed methodology. The contact element developed in this work has been implemented in the finite element research code Oofelie [15]. The convergence criterion used for the numerical examples is given by

$$\|\mathbf{r}^i\| < \text{tol}_r \left(\sum_k \|\mathbf{r}_k^i\| + \text{tol}_f \right) \quad (\text{A.57})$$

where tol_r is a given relative tolerance, $\mathbf{r}_k^i$ is the k th term contributing to the residual $\mathbf{r}^i$, $i = s, p, v$, tol_f is a reference value of tolerance, and $\|\cdot\|$ is the L^2 norm. In the convergence rate studies, the

L^1 norm was used with an error measure defined as

$$\text{Error}(h) = \frac{\sum_{i=0}^N |f_i - f(t_i)|}{\sum_{i=0}^N |f(t_i)|} \quad (\text{A.58})$$

where N is the number of time steps, f_i is the numerical solution given by the nonsmooth generalized- α method (NSGA) and $f(t_i)$ is the reference solution. The analytical solution is taken as reference solution when available; otherwise, the numerical solution corresponding to a very small time step is taken as a reference.

Sphere on a horizontal rigid plane

The first validation example allows us to compare the numerical solution against the analytical results for the movement of a sphere on a rigid plane, see Fig. A.4. Here, the sliding, the rolling and the spinning resistance are studied separately in order to compare the robustness and the performance of the proposed algorithm for each friction model. A sphere of radius $r = 0.5$ m, mass $M = 1309$ kg and inertia moment $I = 131$ kgm² is initially located at $x = 0.1$ m, $z = 0$ m on a horizontal plane. The gravity acceleration is $g = 9.8$ m/s² and the normal and tangential restitution coefficients are 0. The Lagrange multipliers scaling factors k_v and k_p and the penalty parameters p_p and p_v , were selected equal to 1 for all the examples presented in this section. The values of tolerances for checking the convergence of the Newton solver are equal to 10^{-5} , the simulation time interval was 1 s and a spectral radius of $\rho_\infty = 0.8$ was selected.

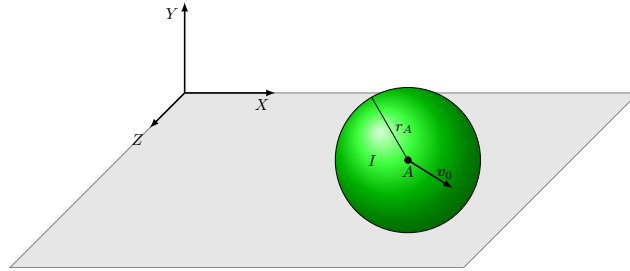


Figura A.4: General configuration for the three-dimensional sphere-plane contact model.

Sliding resistance

An initial horizontal speed $v_0 = (1.5; 0.0; 1.5)$ m/s is applied, with zero initial angular velocity. This initial condition was selected to evaluate the capability of the element to capture pure rolling and sliding motion. The friction coefficient is $\mu = 0.25$, and the rolling and spinning coefficients ρ and γ are both equal to zero. The analytic solution is that the sphere slides until time $t = 2v_0/(7\mu g) = 0.24738$ s and then, it moves with pure rolling and constant angular velocity equal to $\omega_{\text{roll}} = 5v_0/(7r) = 3.03$ rad/s. The sphere continues moving with constant speed because the friction rolling coefficient is zero. Figure A.5-a shows good agreement between the numerical and

the analytical solutions, where the moduli of the displacement $\|u\|$, of the linear velocity $\|v\|$, of the angular rotation $\|\theta\|$ and of the angular velocity $\|\omega\|$ at the center of mass of the sphere are compared. The maximum number of iterations per time-step was 1, 2 and 2 for the smooth, position

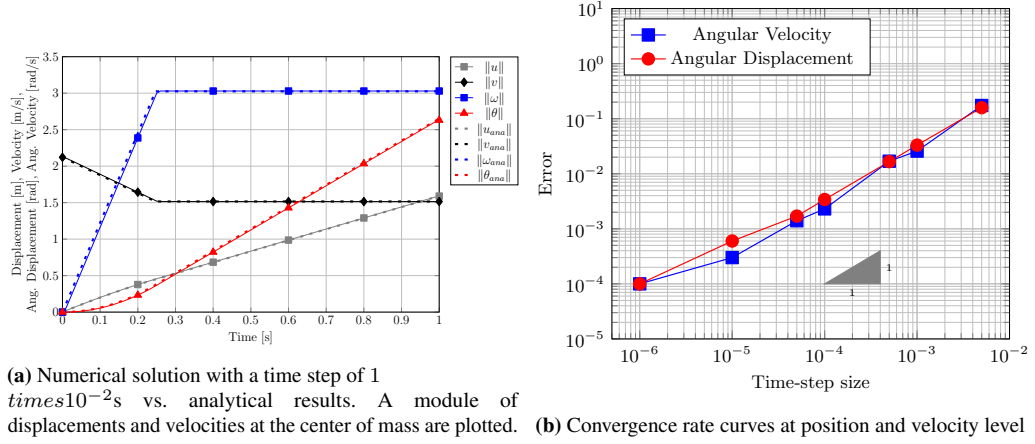


Figure A.5: Numerical solutions for the sliding resistance example.

and velocity sub-problems, respectively. The mean number of iterations was 1 per time-step for each sub-problem. Fig. A.5-b shows the convergence rate in terms of the time step size, showing a linear convergence rate as expected, due to the ball being in contact/impact during the period of simulation.

Rolling resistance

In this case, only an initial angular velocity $\omega_x = 0.4$ rad/s is applied to the sphere in the X direction. The friction and spinning coefficients are zero while the rolling friction coefficient is $\rho = 0.01$ m. Fig. A.6 shows the sphere rotates and decreases the angular velocity until full stop as a consequence of the antagonist moment produced by the friction rolling coefficient ρ . The

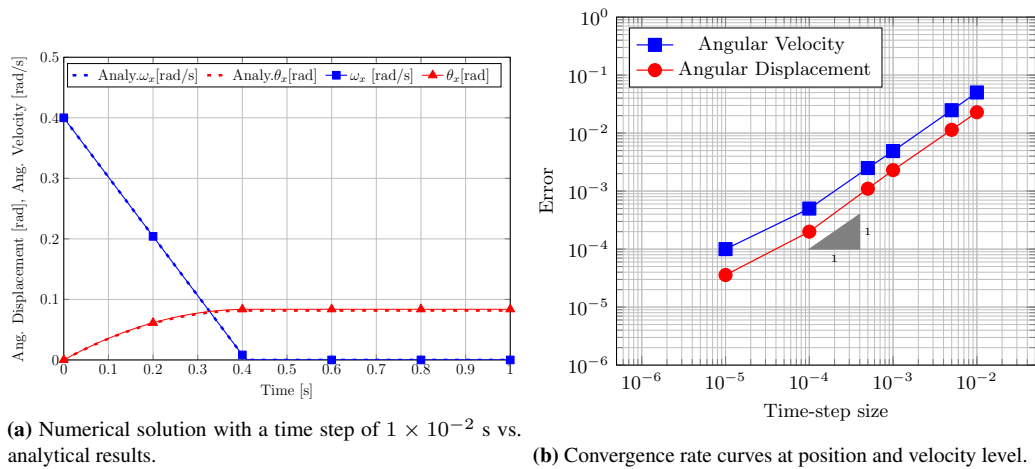


Figure A.6: Numerical solutions for the rolling resistance example.

analytical solution predicts that the sphere reaches full stop at time $t_{\text{stop}} = (\omega_0 I) / (\rho m g) = 0.408$ s

with a maximum angular rotation $\theta_{x,\max} = \omega_0 t_{\text{stop}} - (mg\rho)/(2I)t_{\text{stop}}^2 = 0.0816$ rad. Figure A.6-a shows that the numerical solution coincides with the analytical results with excellent agreement. The maximum number of iterations per time-step was 1, 1 and 3 for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively. The mean number of iterations was 1 per time-step for each sub-problem. Fig. A.6-b shows the convergence rate in terms of the time step size, showing a linear convergence rate as expected, due to the ball being in contact/impact during the period of simulation.

Spinning resistance

This case is similar to the previous one, with the sphere in contact with the plane during motion. For the initial condition only an angular velocity $\omega_y = 1$ rad/s in the direction Y is imposed. The spinning coefficient is $\gamma = 0.0167$ and $\mu = \rho = 0$. The analytical solution predicts that the sphere reaches full stop at time $t_{\text{stop}} = (\omega_0 I)/(\gamma mg) = 0.61149$ s with a maximum angular rotation $\theta_{y,\max} = \omega_0 t_{\text{stop}} - (mg\gamma)/(2I)t_{\text{stop}}^2 = 0.3055$ rad. Fig. A.7-a shows that the numerical solution coincides with the analytical results with excellent agreement. The maximum number of iterations

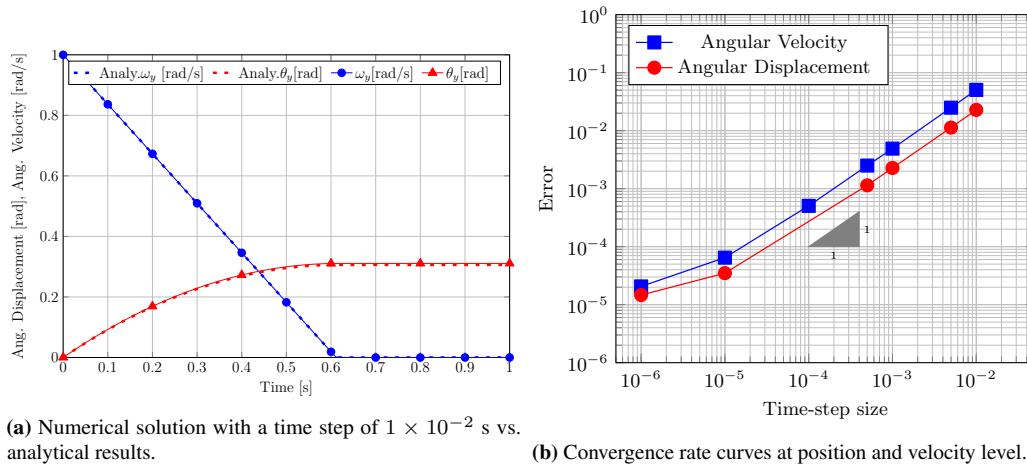


Figure A.7: Numerical solutions for the spinning resistance example.

per time-step was 1, 1 and 2 for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively. The mean number iterations was 1 per time-step for each sub-problem. Fig. A.7-b shows the convergence rate in terms of the time step size, showing a linear convergence rate as expected, due to the ball being in contact/impact during the period of simulation.

Sphere rolling and sliding on a plane

The second example is taken from the recent work presented by Acary and Bourrier [2]. It corresponds to a sphere rolling on a planar horizontal surface, where the rolling and the sliding friction are acting simultaneously. The geometry and the inertia are the same as in the

example before. Following the proposal of Acary and Bourrier, the sphere is subjected to a gravity acceleration of $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, an initial tangential velocity in the X direction $v_x = 2.5 \text{ m/s}$ and a rolling coefficient $\rho = 0.04 \text{ m}$. Three different cases were studied by varying the friction coefficient μ and the initial angular velocity as shown in Table A.1. The tolerance for convergence of the Newton solver was set equal to 10^{-5} and the spectral ratio of the integrator was $\rho_\infty = 0.8$.

Case	ω_z [rad/s]	μ
I	5	0.2
II	2.5	0.2
III	5	0.05

Table A.1: Initial angular velocity and friction coefficient for each case.

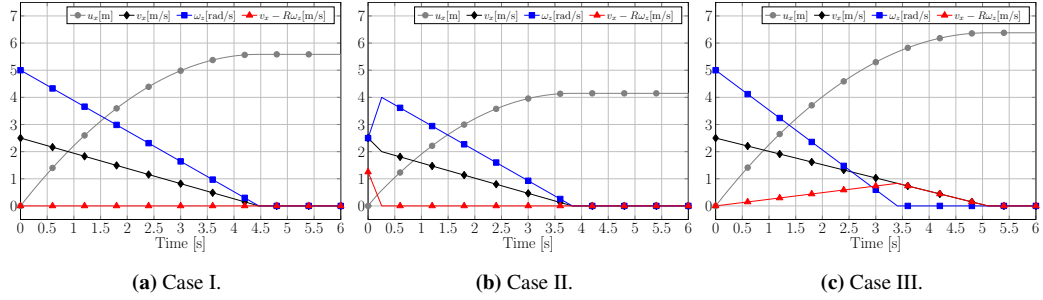


Figure A.8: Numerical solutions for the sphere rolling and sliding on a plane.

In case I, Fig. A.8-a shows that the angular velocity ω_z and the linear velocity v_x decrease until stop because of the rolling resistance. A pure rolling condition is observed all along the computation (i.e. the contact point velocity $v_x - R\omega_z = 0$). At a given time the sphere stops completely and for this reason, the displacement remains with a constant value and the velocities become zero. This case is different to the previous validation example where the sphere kept the movement with a constant angular velocity due to the absence of the rolling resistance. In case II, the initial angular velocity is smaller than in case I, as Table A.1 shows. Therefore, at the beginning the sphere is in sliding reaching a maximum angular velocity at 0.256 s, see Fig. A.8-b. The sliding behaviour can be confirmed with the curve $v_x - R\omega_z$ which is greater than zero until time 0.256 s. After that, the velocities v_x and ω_z decrease with a pure rolling movement, with contact point velocity $v_x - R\omega_z = 0$ until it stops completely as a consequence of the rolling resistance. In the last test, case III, depicted in Fig. A.8-c, the tangential velocity v_x vanishes as a result of the reduction of the friction coefficient μ compared with the rest of the cases. The results we obtained with the proposed algorithm in these three sub-cases show good agreement with those of reference [2].

Mechanism example

This example consists of a planar roller-crank mechanical system as shown in Fig. A.9. This mechanism was originally proposed by Marques *et al* [49] to study the influence of the friction forces when different kinds of friction models are selected.

The mechanism consists of four bodies: the crank, the connecting-rod and the roller, which are linked by three perfect revolute joints, and a planar surface at the ground in contact with the roller. The initial configuration is shown in Fig. A.9. The acceleration of gravity $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ is applied in the Y negative direction.

In the work of Marques *et al* [49] only rigid bodies are considered. Here, two different cases are analysed: in the first one all bodies are rigid to validate the proposal, and in the second case we incorporate flexibility in the connecting-rod by using eight beam elements [45]. The numerical solutions of these two cases are compared to study the influence of the flexibility in the dynamics of the system. The crank rotates around the Z axis with an initial angular velocity of $\omega_c = 4 \text{ rad/s}$ while the roller has an initial counter-clockwise angular velocity imposed of $\omega_r = 8 \text{ rad/s}$. During the rest of the simulation, both the crank and the roller are left free. The dynamic behaviour is studied by analysing the plots of the evolution of the angular acceleration γ at the centre of the roller.

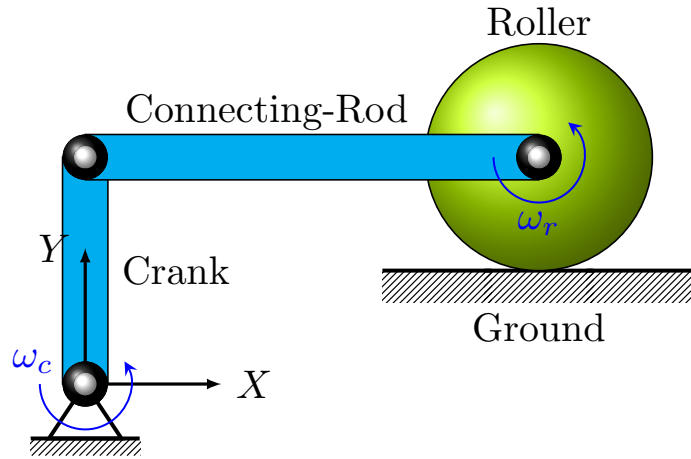


Figura A.9: Slider-crank mechanism configuration.

Rigid roller-crank mechanism

In the first case, the mechanism is composed by only rigid elements as mentioned before. The lengths, masses and inertia properties of each body are shown in Table A.2 according to reference [49].

The sphere-plane contact element presented in Sec. A.5 is used to model the contact between

Body	Length/Radius [m]	Mass [kg]	Rotational inertia [kgm ²]
Crank	0.1	0.12	0.002
Connecting rod	0.30	0.3	0.002
Roller	0.05	0.1	0.001

Table A.2: Dimensions, mass and inertia properties of the bodies.

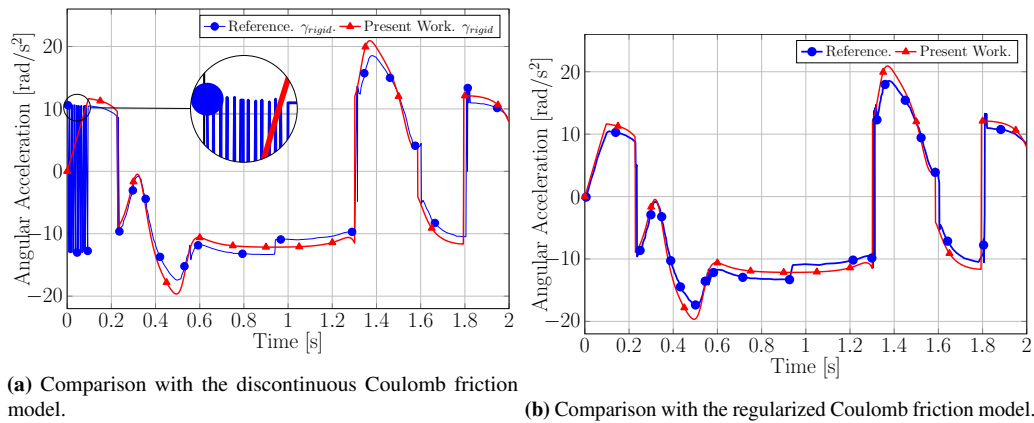
the roller and the ground. The friction coefficient between the roller and the ground is $\mu = 0.1$ and the rolling and spinning coefficients are equal to zero. The restitution coefficients were set to zero.

The time integration scheme parameters were set as follows: a constant time-step of 10^{-3} s, a spectral ratio at infinity $\rho_\infty = 0$, a total time of 2 s and tolerances for the Newton convergence equal to 10^{-5} .

Figure A.10 shows the evolution of the acceleration of the roller which is in agreement with the [49]. The maximum number of iterations per time-step was 1, 3 and 2 for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively. The mean number of iterations was of 1, 2 and 1 per time step.

Note that even though our model is a discontinuous Coulomb friction model, our formulation is able to get results without spurious oscillations, while in the case of the formulation of ref [49], they used a regularization of the friction model to avoid these oscillations.

Marques *et al* [49], used a discontinuous Coulomb model, their numerical solutions show spurious oscillations between 0 and 0.2 s as a consequence of a discontinuity at zero relative tangential velocity, see the detail of Fig. A.10-a. To avoid this numerical instability, the authors presented several alternative formulations, where the original Coulomb friction law is replaced by a regularized one in the neighborhood of zero velocity. Instead, with the formulation presented in this work, numerical solutions without instabilities close to zero velocity are obtained without modifying the friction Coulomb law. This can be seen in Fig. 10-b, where our solution is compared with the solution of the regularized approach taken from the work of Marques *et al* [49]. A good agreement between both curves is obtained.

**Figure A.10:** Angular acceleration for the rigid bodies case. Comparison with solutions of Marques *et al*, see [49].

Flexible/rigid mechanism vs rigid mechanism

The roller-crank mechanism modelled in this section considers the flexibility of the connecting-rod. The objective is to demonstrate the capability of the present methodology to simulate mechanical systems considering both flexible and rigid bodies. The lengths of the crank, the connecting-rod and of the roller are the same as those presented in Table A.2 as well as the mass and the mass inertia values of the crank. The initial configuration, the restitution coefficients, the simulation time and the friction coefficient μ also coincide with those used in Sec. A.6. Now, besides flexibility, a rolling coefficient was incorporated with a value $\rho = 0.01$ m at the roller/plane joint. The integrator parameters also coincide with those used in Sec. A.6. The cross-sectional area and the cross-inertia moment of the connecting-rod are $1.1323 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ and $1.0685 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, respectively. The material is assumed to be elastic with a Young's modulus of $4.14 \times 10^9 \text{ Pa}$, material density of 7850 kg/m^3 and Poisson coefficient of 0.3. With these geometrical and mechanical characteristics, the mass inertia of the rod is approximately equal to that of the rigid case, while the mass is slightly less than in the rigid case (0.2667 kg vs 0.3 kg).

Figure A.11 shows the difference between the computed angular accelerations of the roller in the rigid and in the flexible case. Note that the flexible response is more oscillatory and that there is a delay in the response as a consequence of the deformation of the connecting-rod and of the rolling and friction coefficients.

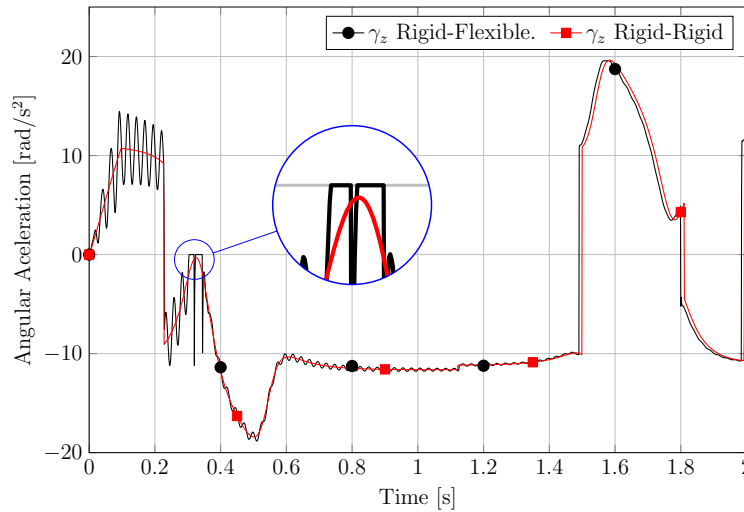


Figura A.11: Angular acceleration of the roller. Flexible vs. rigid case.

Then, Fig. A.12 shows the effect of flexibility on the deformation of the connecting-rod. The difference of the angular displacement between both ends of the connecting-rod is plotted showing a decreasing deformation in time because of the reduction of the velocity of the system by the friction effects. Figure A.13 shows that the roller rebounds in two motion instants. As a consequence of these rebounds, the roller is in free flight movement and therefore the angular acceleration is zero

during this period of time, see the detail of Fig. A.11.

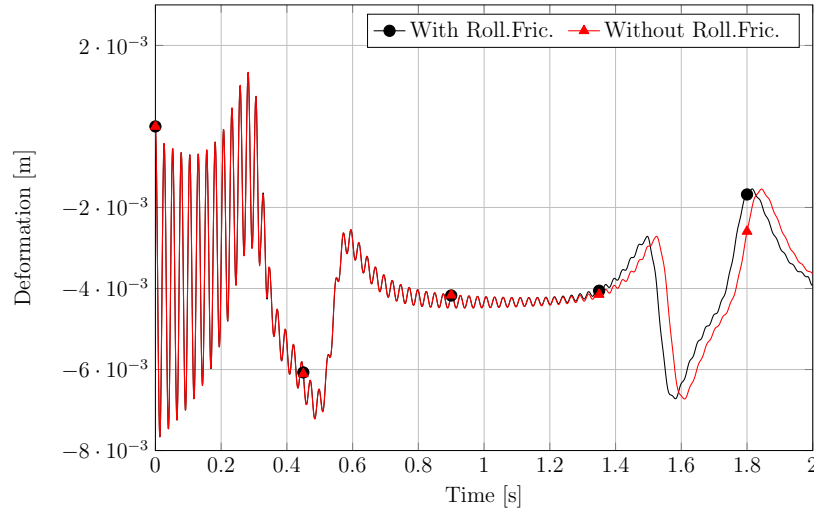


Figure A.12: Angular deformation of the connecting-rod.

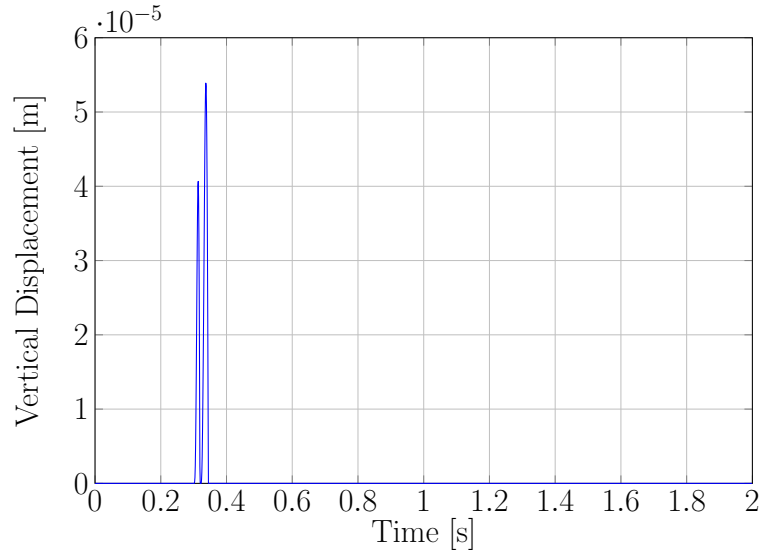


Figure A.13: Vertical displacement of the roller for the flexible case.

Finally, for the rigid case the maximum number of iterations was 1,3,3 and a mean of 1,2,2 and for the flexible case the maximum number of iterations was 2,3,1 and a mean of 2,2,1, were reported.

Impact between a ball and a rigid wall

The configuration of this problem is similar to the example presented in Sec.(A.6), with the difference that there is a rigid wall parallel to the plane $Z - Y$ at position $X = 1$ m, where the sphere impacts. A friction coefficient $\mu = 0.2$, a rolling coefficient $\rho = 0.04$ m and a spinning coefficient of $\gamma = 0.0167$ m were selected for the contact between the ball and the horizontal plane. The gravity acceleration, initial conditions, inertia and geometrical properties of the sphere

remain the same as in the first example. The following parameters were used for the time integration scheme: a constant time-step of 10^{-3} s, a spectral ratio at infinity $\rho_\infty = 0.8$, a total time of 3 s and tolerances for the Newton convergence equal to 10^{-5} . The normal and the tangential restitution coefficients between the sphere and the horizontal plane are $e_N = 0$ and $e_T = 0$, respectively, while the restitution coefficients between the sphere and the vertical plane are $e_N = 1$ and $e_T = 1$.

Figure A.14-a shows the linear velocity in the X direction. The velocity is 1.5 m/s at the beginning of motion, according to the initial velocity imposed and then, it decreases as the transference of energy from translation to rotation because of rolling until the sphere impacts with the vertical wall at time 0.411 s. Thus, a velocity jump occurs and after that the sphere enters in rolling and sliding motion. Then, at time 0.685 s the sliding velocity $v_x + R\omega_z$ becomes equal to zero and the sphere enters in pure rolling motion. Finally, the sphere stops moving at time 2.266 s because of the rolling resistance.

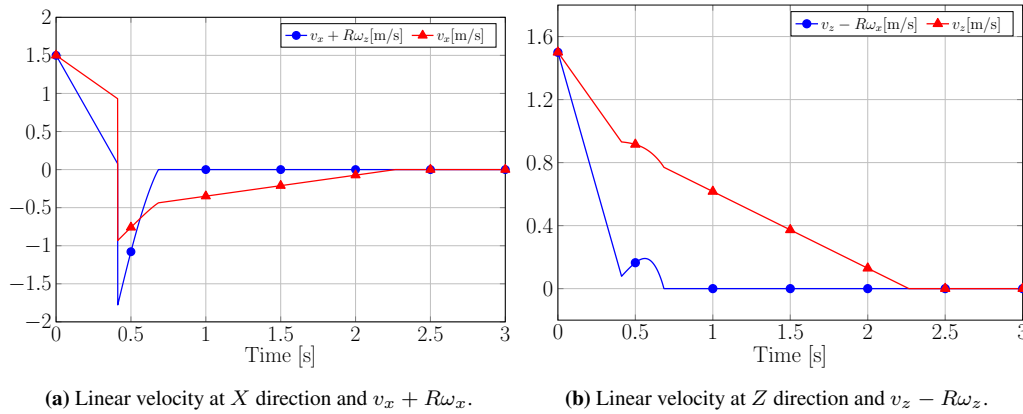


Figura A.14: Linear velocity and rolling behaviour curves.

The velocity curve in the Z direction, Fig. A.14-b, has a different behaviour from the component v_x as expected. In this case, there is no jump neither change of sign of velocity, because the vertical plane is parallel to this direction of motion. This component of velocity is continuously decreasing until the sphere fully stops. The time evolution of this component shows that at the beginning of the simulation the sphere is in sliding and rolling motion until reaching a pure rolling movement at time 0.685 s, when the component of sliding velocity $v_z - R\omega_x$ becomes equal to zero. The angular velocities for the X and Z directions are plotted in Fig. A.15. Figure A.15-b shows a change of the direction of the angular velocity as a consequence of the impact.

Note that between times 0.411 s and 0.685 s there is an abrupt change of behaviour of the linear and the angular velocities, induced by the impact process which induces a spinning motion of the ball, see Fig. A.16. This is a consequence of the restitution and friction coefficients, which are different from zero. Spinning decreases rapidly to zero because of the spinning friction. The maximum number of iterations to solve this example was 1, 7 and 7, with a mean of 1, 1 and 3 for

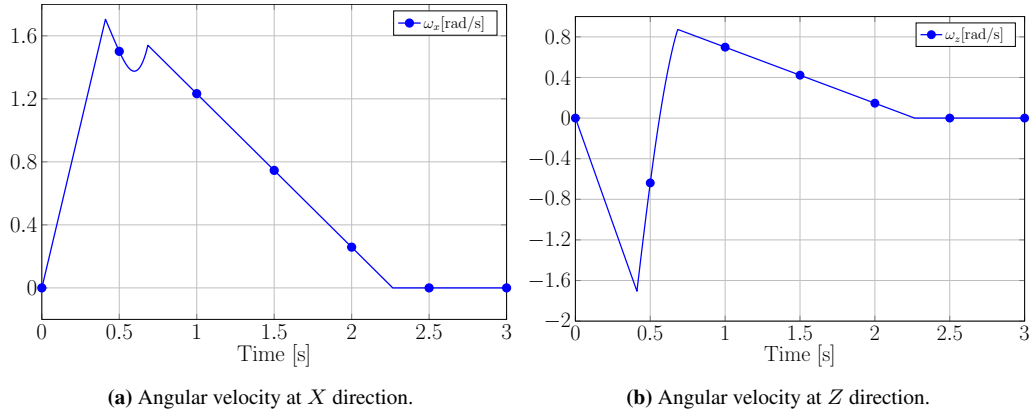


Figure A.15: Angular velocity in the X and Z directions.

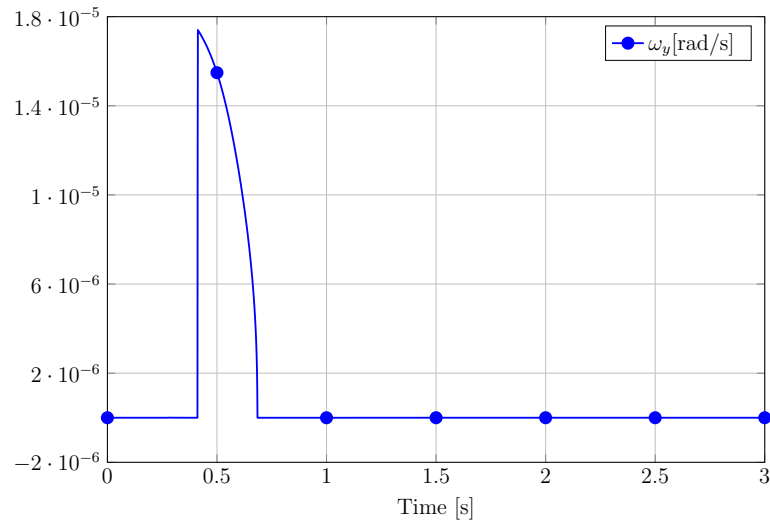


Figure A.16: Spinning velocity of the sphere.

the smooth, position and velocity sub-problems, respectively.

A.7. Conclusions

A new frictional contact element to model the non-smooth dynamics of three-dimensional spherical rigid bodies in contact with a planar surface was presented. Sliding, rolling and spinning friction forces are included in the formulation by the Coulomb friction law.

The complementary problem is solved at each time step using a monolithic Newton semi-smooth method by an augmented Lagrangian method in a fully implicit approach with fast convergence. The element was implemented in the framework of the new version of the decoupled non-smooth generalized- α time integration scheme [21]. This solver allows to integrate the flexible components with second order accuracy and controlled dissipation, something that is not possible with the first order integrators, e.g. Moreau-Jean method which is usually chosen for solving these kind of models. Furthermore, the proposed formulation guarantees the exact satisfaction of the contact

constraints at position and at velocity levels, which means that no penetration is observed. The penalty parameters in the tangential and normal directions of the augmented Lagrangian formulation do not affect the final solution, however their values mostly affect the convergence rate.

The equations for the analytical computation of internal force vectors and tangent matrices of the frictional contact algorithm of the contact element presented have been provided.

Several examples of applications have been shown. The results of the examples were compared to analytical solutions or numerical solutions obtained by other authors. In all cases the solutions showed good agreement with the references and a fast convergence rate.

An extension of this work consists in to modify the drilling friction law to take into account the Coulomb -Contesou effects [44, 12].

Appendix A1

Algorithm 1 Modified Nonsmooth GGL generalized- α time integration scheme

```

1: Inputs: initial values  $\mathbf{q}_0$  and  $\mathbf{v}_0$ ;
2: Compute consistent value of  $\tilde{\mathbf{v}}_0$ 
3:  $\mathbf{a}_0 := \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_0$ 
4: for  $n = 0$  to  $n_{\text{final}} - 1$  do
5:    $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} := \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\mathcal{U}} := \mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_{n+1} := \mathbf{0}$ 
6:    $\mathbf{A}_{n+1} := \mathbf{0}, \mathbf{W}_{n+1} := \mathbf{0}, \mathbf{U}_{n+1} := \mathbf{0}$ 
7:    $\mathbf{a}_{n+1} := 1/(1 - \alpha_m)(\alpha_f \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_n - \alpha_m \mathbf{a}_n)$ 
8:    $\mathbf{v}_{n+1} := \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} := \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1}$ 
9:    $\mathbf{q}_{n+1} := \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1}$ 
10:  Step 1 (smooth motion):
11:  for  $i = 1$  to  $i_{\text{max}}$  do
12:    Compute residual  $\mathbf{r}^s$ 
13:    if  $\|\mathbf{r}^s\| < \text{tol}$  then break end if
14:    Compute the iteration matrix  $\mathbf{S}_t^s$ 
15:     $\Delta \mathbf{x}^s := -(\mathbf{S}_t^s)^{-1} \mathbf{r}^s$ 
16:     $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} := \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \Delta \tilde{\mathbf{v}}$ 
17:     $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} := \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} + (1 - \alpha_m)/((1 - \alpha_f)\gamma h) \Delta \tilde{\mathbf{v}}$ 
18:     $\mathbf{q}_{n+1} := \mathbf{q}_{n+1} + h\beta/\gamma \Delta \tilde{\mathbf{v}}$ 
19:     $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\mathcal{U}} := \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\mathcal{U}} + \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathcal{U}}$ 
20:  end for
21:  Step 2 (projection on position constraints):
22:  for  $i = 1$  to  $i_{\text{max}}$  do
23:    Compute residual  $\mathbf{r}^p$ 
24:    if  $\|\mathbf{r}^p\| < \text{tol}$  then break end if
25:    Compute  $\mathbf{S}_t^p$ 
26:     $\Delta \mathbf{x}^p := -(\mathbf{S}_t^p)^{-1} \mathbf{r}^p$ 
27:     $\mathbf{U}_{n+1} := \mathbf{U}_{n+1} + \Delta \mathbf{U}$ 
28:     $\mathbf{q}_{n+1} := \mathbf{q}_{n+1} + \Delta \mathbf{U}$ 
29:     $\boldsymbol{\nu}_{n+1} := \boldsymbol{\nu}_{n+1} + \Delta \boldsymbol{\nu}$ 
30:  end for
31:  Step 3 (projection on velocity constraints):
32:  for  $i = 1$  to  $i_{\text{max}}$  do
33:    Compute residual  $\mathbf{r}^v$ 
34:    if  $\|\mathbf{r}^v\| < \text{tol}$  then break end if
35:    Compute  $\mathbf{S}_t^v$ 
36:     $\Delta \mathbf{x}^v := -(\mathbf{S}_t^v)^{-1} \mathbf{r}^v$ 
37:     $\mathbf{W}_{n+1} := \mathbf{W}_{n+1} + \Delta \mathbf{W}$ 
38:     $\mathbf{v}_{n+1} := \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1}$ 
39:     $\mathbf{A}_{n+1} := \mathbf{A}_{n+1} + \Delta \mathbf{A}$ 
40:  end for
41:   $\mathbf{a}_{n+1} := \mathbf{a}_{n+1} + (1 - \alpha_f)/(1 - \alpha_m) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1}$ 
42: end for

```

Appendix A2

Hessian matrix for sliding resistance at position level for the different contact conditions,

$$\Delta \mathbf{F}_S^p = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \Delta \nu_N \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \Delta \nu_T \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\Delta g_{Nq}^T \xi_N - g_{Nq}^T \Delta \xi_N - \mu \Delta \xi_N g_{Tq}^T \tau_p - \mu \xi_N \Delta g_{Tq}^T \tau_p - \\ \mu \xi_N g_{Tq}^T \Delta \tau_p \\ -k_p \Delta g_N \\ \frac{k_p}{p_p} (-k_p \Delta \nu_T + \mu \Delta \xi_N \tau_p + \mu \xi_N \Delta \tau_p) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\Delta g_{Nq}^T \xi_N - g_{Nq}^T \Delta \xi_N - \Delta g_{Tq}^T \xi_T - g_{Tq}^T \Delta \xi_T \\ -k_p \Delta g_N \\ -k_p \Delta g_T \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \xi_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N \quad \text{Slip (A.59)} \\ \|\xi_T\| < \mu \xi_N \quad \text{Stick} \end{array}$$

Hessian matrix for sliding resistance at velocity level for the different contact conditions,

$$\Delta \mathbf{F}_S^v = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Delta \Lambda_N \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Delta \Lambda_T \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^T \Delta \sigma_N - \mu \Delta \sigma_N g_{Tq}^T \tau_v - \mu \sigma_N g_{Tq}^T \Delta \tau_v \\ -k_v \Delta \dot{g}_N \\ \frac{k_v}{p_v} (-k_v \Delta \Lambda_T + \mu \Delta \sigma_N \tau_v + \mu \sigma_N \Delta \tau_v) \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -g_{Nq}^T \Delta \sigma_N - g_{Tq}^T \Delta \sigma_T \\ -k_v \Delta \dot{g}_N \\ -k_v \Delta \dot{g}_T \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \|\sigma_T\| \geq \mu \sigma_N \quad \text{Slip (A.60)} \\ \|\sigma_T\| < \mu \sigma_N \quad \text{Stick} \end{array}$$

Hessian matrix for rolling resistance at velocity level for the different contact conditions,

$$\Delta \mathbf{F}_R^v(\dot{\Phi}) = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Delta \chi_T \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\omega_{Tq}^T \Delta \eta_T \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ -k_v \Delta \omega_T \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} -\rho \Delta \sigma_N \omega_{Tq}^T \tau_{TW} - \rho \sigma_N \omega_{Tq}^T \Delta \tau_{TW} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \frac{k_v}{p_v} [-k_v \Delta \chi_T + \rho \Delta \sigma_N \tau_{TW} + \rho \sigma_N \Delta \tau_{TW}] \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_N < 0 \\ \|\eta_T\| < \rho \sigma_N \\ \|\eta_T\| \geq \rho \sigma_N \end{array} \quad (\text{A.61})$$

Hessian matrix for spinning resistance at velocity level for the different contact conditions,

$$[H] \Delta \mathbf{F}_D^v = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Delta \chi_N \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} -\omega_{Nq}^T \Delta \eta_N \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ -k_v \Delta \omega_N \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} -\gamma \Delta \sigma_N \omega_{Nq}^T \text{sgn}(\eta_N) \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \frac{k_v}{p_v} [-k_v \Delta \chi_N + \gamma \Delta \sigma_N \text{sgn}(\eta_N)] \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma_N < 0 \\ \|\eta_T\| < \gamma \sigma_N \\ \|\eta_T\| \geq \gamma \sigma_N \end{array} \quad (\text{A.62})$$

Bibliografía

- [1] V. Acary. «Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), págs. 224-250.
- [2] V. Acary y F. Bourrier. «Coulomb friction with rolling resistance as a cone complementarity problem». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 85 (2021), pág. 104046.
- [3] V. Acary y F. Périgon. *An introduction to SICONOS INRIA*. Inf. téc. INRIA, 2007.
- [4] A.M. Ahmadi, D. Petersen y C. Howard. «A Nonlinear Dynamic Vibration Model of Defective Bearings. The Importance of Modeling the Finite Size of Rolling Elements». En: *Mech. Syst. Signal Process.* 52-53 (2015), págs. 309-326.
- [5] N. Akhadkar, V. Acary y B. Brogliato. «3D Revolute Joint with Clearance in Multibody Systems». En: *Computational Kinematics-Mechanisms and Machine Science* 42 (2018), págs. 249-282. DOI: [10.1007/s11044-017-9584-5](https://doi.org/10.1007/s11044-017-9584-5).
- [6] P. Alart y A. Curnier. «A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92.3 (1991), págs. 353-375. ISSN: 0045-7825.
- [7] Algoryx. <https://www.algoryx.se>. 2020.
- [8] C. Annavarapu et al. «A weighted Nitsche stabilized method for small-sliding contact on frictional surfaces». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283 (2015), págs. 763-781.
- [9] O.A Bauchau. *Flexible multibody dynamics*. Vol. 176. Springer, 2011.
- [10] O. Brüls, V. Acary y A. Cardona. «Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized-alpha scheme». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281.0 (2014), págs. 131-161.
- [11] S.J. Burns, P.T. Piiroinen y K. Hanley. «Critical time-step for a DEM simulations of dynamic systems using a Hertzian contact model». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 119.5 (2019), págs. 432-451.
- [12] G. Capobianco et al. «A nonsmooth generalized-alpha method for mechanical systems with frictional contact». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122.22 (2021), págs. 6497-6526.
- [13] A. Cardona. «Flexible three dimensional gear modelling in mechanism analysis». En: *European Journal of Computational Mechanics* 4 (1995), págs. 663-691.
- [14] A. Cardona, M. Géradin y D.B. Doan. «Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89.1-3 (1991), págs. 395-418.
- [15] A. Cardona, I. Klapka y M. Geradin. «Design of a New Finite Element Programming Environment». En: *Engineering Computations* 11 (1994), págs. 365-381.

- [16] F.J Cavalieri y A. Cardona. «Non-smooth model of a frictionless and dry three-dimensional revolute joint with clearance for multibody system dynamics». En: *Mechanism and Machine Theory* 121 (2018), págs. 335-354.
- [17] J. Chung y G. Hulbert. «Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method». En: *ASME Journal of Applied Mechanics* 60.2 (1993), págs. 371-375.
- [18] Ramon Codina, Miguel Cervera y Eugenio Oñate. «A penalty finite element method for non-Newtonian creeping flows». En: *International journal for numerical methods in engineering* 36.8 (1993).
- [19] P. Contensou. «Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie». En: *Kreiselp Probleme und Gyrodynamics, IUTAM Symposium Celerina*. Ed. por H. Ziegler. Berlin: Springer-Verlag, 1963, págs. 201-216.
- [20] A. Cosimo et al. «A General Purpose Formulation for Nonsmooth Dynamics with Finite Rotations: Application to the Woodpecker Toy». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16 (3 2021). 031001, págs. 10-10.
- [21] A. Cosimo et al. «A robust nonsmooth generalized- α scheme for flexible systems with impacts». En: *Multibody System Dynamics* 48.2 (2020), págs. 127-149.
- [22] A. Cósimo et al. «On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems». En: *Nonlinear Dynamics* 102.4 (2020), págs. 1997-2016.
- [23] C.A. Coulomb. *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et à la roideur des cordages*. Mémoire de Mathématique et de Physique, Paris, France, 1785.
- [24] P.A. Cundall y O.D.L. Strack. «A discrete numerical model for granular assemblies». En: *Geotechnique* 29 (1979), págs. 47-65.
- [25] Ma D. et al. «Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 470. 2169. 2014, págs. 1-22.
- [26] G. De Saxcé y Z.Q. Feng. «New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach». En: *Mechanics of Structures and Machines* 19.3 (1991), págs. 301-325.
- [27] F. Dubois et al. «LMGC90». En: *Proceedings of the 10eme Colloque National en Calcul des Structures (CSMA)*. Giens, France, mayo de 2011.
- [28] N. Estrada, A. Taboada y F Radjai. «Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance». En: *Phys. Rev. E* 78 (2008), pág. 021301.
- [29] N. Estrada et al. «Identification of rolling resistance as a shape parameter in sheared granular media». En: *Phys. Rev. E* 84 (2011), pág. 011306.
- [30] P. Flores, R. Leine y C. Glocker. «Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach». En: *Multibody System Dynamics* 23.2 (2010), págs. 165-190.
- [31] Paulo Flores, Remco Leine y Christoph Glocker. «Modeling and analysis of rigid multibody systems with translational clearance joints based on the nonsmooth dynamics approach». En: *Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications* (2011), págs. 107-130.
- [32] J. Galvez et al. «A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics». En: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 121.16 (2020), págs. 3584-3609.
- [33] M. Géradin y A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. Wiley, 2001. ISBN: 0471489905.

- [34] C. Glocker. «An Introduction to Impacts». En: *Nonsmooth Mechanics of Solids*. Ed. por J. Haslinger y G.E. Stavroulakis. Vienna: Springer Vienna, 2006, págs. 45-101.
- [35] R. Hartenberg y J. Denavit. *Kinematic Synthesis of Linkages*. First Edition. McGraw-Hill, 1964.
- [36] M.D. Hersey. «Rigid body impact with moment of rolling friction». En: *Journal of Lubrication Technology* 91.2 (1969), págs. 260-263.
- [37] T. Heyn et al. «Chrono: A Parallel Physics Library for Rigid-Body, Flexible-Body, and Fluid Dynamics». En: *Mechanical Sciences* 4 (2013), págs. 49-64. DOI: [10.1115/DETC2013-13239](https://doi.org/10.1115/DETC2013-13239).
- [38] J. Huang, da Silva M. V. y K. Krabbenhoft. «Three-dimensional granular contact dynamics with rolling resistance». En: *Computers and Geotechnics* 49 (2013), págs. 289-298.
- [39] J. Irazabal, F. Salazar y E. Oñate. «Numerical modelling of granular materials with spherical discrete particles and the bounded rolling friction model. Application to railway ballast». En: *Computers and Geotechnics* 85.220 (2017), págs. 220-229.
- [40] D. Kadau et al. «Pore stabilization in cohesive granular systems». En: *Phase Transitions* 76.4-5 (2003), págs. 315-331.
- [41] C. Lacoursière. «Ghosts and machines: regularized variational methods for interactive simulations of multibodies with dry frictional contacts». Computing Science. Umea University, 2007.
- [42] C. Le Saux, R.I. Leine y C. Glocker. «Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction». En: *Journal of Nonlinear Science* 15.1 (2005), págs. 27-61.
- [43] R.I. Leine. *Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion*. Arch Appl Mech, 2009.
- [44] R.I. Leine y C. Glocker. «A set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22.2 (2003), págs. 193-216.
- [45] E.V. Lens y A. Cardona. «A nonlinear beam element formulation in the framework of an energy preserving time integration scheme for constrained multibody systems dynamics». En: *Computers and Structures* 86.1 (2008), págs. 47-63.
- [46] J.-P. Liu et al. «A model order reduction method for the simulation of gear contacts based on Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 338 (2018), págs. 68-96.
- [47] Y. Liu et al. «The effect of lubricant temperature on dynamic behavior in angular contact ball bearings». En: *Mechanism and Machine Theory* 149 (2020), pág. 103832.
- [48] D.B. Marghitu y E.D. Stoenescu. «Rigid body impact with moment of rolling friction». En: *Nonlinear Dynamics* 50 (2007), págs. 597-608.
- [49] F. Marques et al. «Modeling and analysis of friction including rolling effects in multibody dynamics: a review». En: *Multibody System Dynamics* 45 (2019), págs. 223-224.
- [50] D. Miler y M. Hoić. «Optimisation of cylindrical gear pairs: A review». En: *Mechanism and Machine Theory* 156 (2021), pág. 104156.
- [51] H. Mylapilli y A. Jain. «Complementarity techniques for minimal coordinate contact dynamics». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 12.2 (2016), pág. 021004.
- [52] D. Negrut, R. Serban y A. Tasora. «Posing multibody dynamics with friction and contact as a differential complementarity problem». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 13.1 (2018). 014503.
- [53] G.A. Neto, P. Pimenta y P. Wriggers. «Contact between spheres and general surfaces». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 328 (2018), págs. 686-716.

- [54] G. Pietrzak y A. Curnier. «Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3 (1999), págs. 351-381.
- [55] N. Song et al. «A novel nonsmooth approach for flexible multibody systems with contact and friction in 3D space». En: *Nonlinear Dynamics* 102.3 (2020).
- [56] C. Studer. *Numerics of Unilateral Contacts and Friction: Modeling and Numerical Time Integration in Non-Smooth Dynamics*. 1.^a ed. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Nº47. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [57] S. Stupkiewicz, J. Lengiewicz y J. Korelc. «Sensitivity analysis for frictional contact problems in the augmented Lagrangian formulation». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 199 (2010), págs. 2165-2176.
- [58] A. Tasora y M. Anitescu. «A complementarity-based rolling friction model for rigid contacts». En: *Procedia Engineering* 48.7 (2013), págs. 1643-1659.
- [59] A. Tasora y M. Anitescu. «A Convex Complementarity Approach for Simulating Large Granular Flows». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 5.3 (2010).
- [60] J.C. Trinkle. «Formulation of Multibody Dynamics as Complementarity Problems». En: *ASME Paper No. DETC2003/VIB-48342* (2003).
- [61] T. Yao et al. «Multibody dynamics simulation of thin-walled four-point contact ball bearing with interactions of balls, ring raceways and crown-type cage». En: *Multibody System Dynamics* 48.3 (2020), págs. 337-372.
- [62] Y.C. Zhou et al. «Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 269.2 (1999), págs. 536-553.
- [63] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor y J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition*. 7.^a ed. Elsevier, 2013.

Anexo B

Simulation of impacts between spherical rigid bodies with frictional effects

Eliana Sánchez¹, Alejandro Cosimo^{1,2}, Oliver Brüls², Alberto Cardona¹,
Federico J. Cavalieri¹

¹ Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL-CONICET, Predio CONICET Santa Fe "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina

² University of Liège, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, Allée de la Découverte 9, 4000 Liège, Belgium..

Abstract

This work studies the impact between spherical rigid bodies in the frame of nonsmooth contact dynamics considering friction effects. A new impact element formulation based on the classical instantaneous local Newton impact law is presented. The kinematics properties of the spheres are described by a rigid body formulation with translational and rotational degrees of freedom referred to an inertial frame. In addition, an extension of the nonsmooth generalized- α time integration scheme applied to collisions with multiple impacts including Coulomb's friction law is given. Six numerical examples are presented to evaluate the robustness and the performance of the proposed methodology.

B.1. Introduction

The simulation of impacts between spherical rigid bodies under friction is a challenging research topic. Roughly speaking, in these problems, two scenarios can arise: (i) **single impacts**, when two bodies are in contact at a single point and the impact occurs at this point, and (ii) **multiple impacts**

when there are several bodies are in contact in various points and the impacts occur simultaneously in some of them [52].

From a numerical perspective, the literature contains many works oriented to solving the impact using a continuous contact force model based on Hertz's law and a hysteresis damping force to introduce energy dissipation during the contact process [66, 38, 42, 36, 28, 67]. A complete review of several contact forces can be found in Rodrigues da Silva *et al* [56]. These models assume that the impact time duration is very small but of finite duration. They have the disadvantage of requiring a large amount of computational time due to the use of very small time steps to accurately capture the behavior of the bodies. Moreover, penetration between the bodies is unavoidable in this kind of approach. To overcome the limitations of these continuous contact models, some authors proposed other schemes that can solve efficiently problems involving strong discontinuities. Jean Jacques Moreau [49], proposed a general framework for nonsmooth modeling of rigid body dynamics. Other authors as Pfeiffer and Glocker, discussed impacts and friction in multi-body systems [26] and a wide overview of non-smooth dynamics is presented by Brogliato in [8]. Nonsmooth time integration based on event-driven schemes can be found in the following references [60, 1, 2, 58]. Then, Bruls and collaborators proposed a nonsmooth generalized- α time integrator scheme which overcomes many problems of the Moreau-type time-stepping schemes, see [18, 12, 13]. More recently, Capobianco *et al* [15] proposed a nonsmooth generalized- α method for the simulation of mechanical systems with frictional contact where unlike to the previous references, the constraints are satisfied on acceleration level. Tasora and Anitescu [61] and Huang *et al* [37] address the problem of impact of spherical rigid bodies by modelling rolling friction with a second-order cone complementarity problem. In this research direction, Acary and Bourrier [3] presented a formulation of contact between spheres and between a sphere and a plane, considering the Coulomb friction's law with rolling resistance as a cone complementary problem based on the work of De Saxcé and Feng [24, 25]. Recently, Sánchez *et al* [57] analyzed the general motion of a sphere in contact with a rigid planar surface with rolling, sliding and spinning friction in the context of nonsmooth contact dynamics.

In the case of multiple impacts, a wide variety of contact models has been proposed by extending single-impact formulations. The approach of Darboux-Keller [23] includes contact compliance by introducing a distributing rule, and it considers plastic deformation through the bi-stiffness contact model along with energetic coefficients of restitution. Later, Liu and Brogliato extended this methodology to study multi-impact collisions related in granular chain problems [46, 47]. Another alternative is by using the classical Poisson impact law [55, 33] or the Hurmuzlu's ICR Law which was applied to solve various types of systems like chains of aligned balls [32] and the rocking

problem [22], among others. Other approaches are based on spring-dashpot models [17, 38, 41, 63]. Again, the main drawback of this methodology is the large computation time required for the simulation because of the adoption of very small time steps.

When impact time duration is considered instantaneous, the impact process is modeled by a function, which can be explicitly or implicitly defined, relating the post- and the pre-impact velocities. The Newton model belongs to this group; unlike the Poisson model, the coefficient of restitution relates the pre- and post- impact velocities [51]. Moreau formulated the impact by a differential inclusion; thus, it can be adapted in a relatively easy way to perform computational numerical simulations in nonsmooth dynamics [49]. However, in case of multiple impacts, the admissible solutions are restricted to few cases and they may be far from the experimental observations [14]. Other alternatives can be found in [29, 8, 39] where the strength and weakness of each model is discussed in [52].

Recently, Cosimo *et al* [21] presented a general methodology to simulate multiple impact collisions assuming instantaneous impacts times and considering simultaneity of impacts and propagation effects without compliance of the system in the framework of the nonsmooth generalized- α time integrator scheme. The method is a time stepping scheme which does not require any synchronisation of the time steps with the impacts events and can deal with a large number of impacts. Additional complications arise when impact problems involve friction effects, because another non-linearity has to be included in the formulation to consider the friction effects. Several references can be found in the literature about the treatment of Coulomb's friction in the frame of Moreau's law [48, 50, 59]. The LBZ model with friction is given in [64, 65, 11], meanwhile friction models with Newton and Poisson laws can be found in [10, 27, 45, 34] and [35, 43, 54, 53, 26], respectively.

In this work, a new formulation for frictional contact and impact between two rigid spherical bodies is presented. The motion of each body is directly referred to an inertial frame for the kinematic description with large rotations and displacements, as proposed by Géradin and Cardona [31]. The time integration scheme for the equations of motion corresponds to the version of the nonsmooth generalised- α integrator presented in [20]. Because of the rigid body assumption, deformations and stresses at the contact zone are neglected. Then, the change in velocity is instantaneous and determined by the restitution coefficient, which depends on the contact surface characteristics of the contacting bodies. This coefficient is obtained experimentally and classified in tables. Then, the Coulomb's friction law is used for the frictional case, and the value of the frictional forces is determined by a single friction coefficient which is obtained experimentally. More complex models can be found in the literature; however, the Coulomb friction model is widely accepted, as

evidenced by the bibliography presented in this work. No other dissipative effects have been taken into account in the numerical examples presented. These hypotheses are of widespread use, and they are enough to accurately capture the global behavior of mechanical systems as those presented in the examples of this work, with solutions which are very close to experimental observations.

A new formulation for the modelling of frictional contact with impacts between two rigid spherical bodies is presented by Sánchez *et al.* [57] where the frictional contact between a sphere and a rigid plane is studied. Similar to the formulation of Sánchez *et al.*, the contact/impact problem between two rigid spherical bodies is solved here using an augmented Lagrangian formulation [4] which was already applied by Gálvez *et al.* [30] to dynamic problems with friction. The main contributions and differences with respect to the work of Sánchez *et al.* are listed below,

- A new formulation of the frictional contact between two spherical rigid bodies in the framework of a nonsmooth technique is presented. The constraints and constraint gradients, both at position and velocity levels, are developed. The analytical expressions for the calculation of the internal force vectors and Hessian matrices are given.
- A simplification of the constraints is introduced in order to reduce the complexity of the implementation. The limitations of the simplifying assumptions are studied.
- An extension of the algorithm to model multiple impacts with friction is presented. The proposal is based on the frictionless multiple impact algorithm presented by Cosimo *et al.* [21]. Here, the algorithm is based on modifying the active set of the velocity correction, defining a sequence of impact problems on a vanishing time interval. Then, the active set of each velocity-level sub-problem is redefined in the normal and in the tangential directions (to consider friction), in such a way that closed contacts with zero pre-impact velocity are considered inactive [21]. New expressions of the internal forces vector at velocity level are developed.
- A numerical comparison of results between the proposed method and the continuous impact method is presented for a test-case involving multiple impacts with friction, showing that the computational time is significantly reduced when using the present methodology.

Six numerical examples are presented to validate and to evaluate the performance of the method. The numerical implementation and simulations presented in this work were carried out in the research finite element code Oofelie, often used for general industrial applications as well as for academic studies. This software allows to simulate non-linear dynamic mechanical systems composed by rigid and flexible components with an efficient framework to deal with finite rotations and to automatically assemble the equations of motion [16].

This work is organized as follows: Section B.2 gives a brief explanation of the decoupled version of the nonsmooth generalized- α time integrator. Section B.3 describes the frictional contact formulation. Then, the modifications of the active set and of the internal force vector at velocity level to consider collisions with simultaneous multiple impacts and friction are presented. The equations related with the sphere-sphere contact element are developed in Section B.4. Finally, Section B.5 presents numerical examples which demonstrate the robustness of the proposed algorithm. Final conclusions are drawn in Section B.6.

B.2. Time Integration of Nonsmooth Equations of Motion

The time integration scheme used in this work to solve the equations of motion of a multibody system with unilateral and bilateral constraints, is the decoupled version of the nonsmooth generalized- α described in Cosimo *et al* [20]. This is an implicit time integrator scheme where the final system of equations results in three decoupled sub-problems to be solved at each time step by an iterative Newton semi-smooth method, which can also be interpreted as an active set method. The first sub-problem corresponds to the smooth motion contribution of the system, where the equations of motion are integrated with second order accuracy by means of the generalized- α scheme [20]. The second and third sub-problems compute the impulsive contributions (non smooth) at position and at velocity levels, yielding a first-order accurate solution of the system with impacts. The integrator for a general multibody system that includes unilateral and bilateral constraints is written as follows,

$$M(\check{q}_{n+1})\dot{\check{v}}_{n+1} - f(\check{q}_{n+1}, \check{v}_{n+1}, t_{n+1}) - g_{\check{q},n+1}^{\bar{U},T} \left(k_s \check{\lambda}_{n+1}^{\bar{U}} - p_s g_{\check{q},n+1}^{\bar{U}} \check{v}_{n+1} \right) = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$-k_s g_{\check{q},n+1}^{\bar{U}} \check{v}_{n+1} = 0 \quad (\text{B.1b})$$

$$M(\check{q}_{n+1})U_{n+1} - \frac{h^2}{2} f^p - g_{\check{q},n+1}^{A,T} (k_p \nu_{n+1}^A - p_p g_{n+1}^A) = 0 \quad (\text{B.1c})$$

$$-k_p g_{n+1}^A = 0 \quad (\text{B.1d})$$

$$-\frac{k_p^2}{p_p} \nu_{n+1}^{\bar{A}} = 0 \quad (\text{B.1e})$$

$$M(q_{n+1})W_{n+1} - h f^v - g_{q,n+1}^{B,T} (k_v \Lambda_{n+1}^B - p_v \dot{g}_{n+1}^B) = 0 \quad (\text{B.1f})$$

$$-k_v \dot{g}_{n+1}^B = 0 \quad (\text{B.1g})$$

$$-\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_{n+1}^{\bar{B}} = 0 \quad (\text{B.1h})$$

where the following notation in Eqs.(B.1) was used for conciseness,

$$\mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T = \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}}^T(\check{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{q}}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T \check{\check{\lambda}}_{n+1}^U \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{f}^v = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{q}}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T \check{\check{\lambda}}_{n+1}^U \quad (\text{B.4})$$

Equations (B.1)-a-b are the momentum balance and bilateral constraints (smooth contribution), meanwhile Eqs.(B.1)-c-d-e and Eqs.(B.1)-f-g-h give the position and velocity corrections of motion due to impacts: $\mathbf{U}_{n+1}$ and $\mathbf{W}_{n+1}$, respectively. Then, t is the time, h is the time step size, $\mathbf{M}$ is the mass matrix, $\mathbf{g}$ is the combined set of bilateral and unilateral constraints, $\mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}}(\check{\mathbf{q}})$ is the gradient of $\mathbf{g}$ and $\check{\mathbf{g}}$ is the Newton's law which will be defined in Sec. B.3. The variable $\check{\check{\lambda}}$ is a Lagrange multiplier vector associated to the bilateral restriction, and $\check{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\check{\mathbf{v}}_{n+1}$ and $\check{\check{\mathbf{v}}}$ are the position, the velocity and the acceleration vectors of the system, respectively. These variables are the contributions of the smooth problem, i.e. they are solution of the problem without considering impacts. The position jumps contribution $\mathbf{U}_{n+1}$ due to impact is associated with the Lagrange multiplier $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$ for the unilateral and bilateral constraints. The Lagrange multiplier $\mathbf{A}$ represents an impulsive force that can be interpreted as the integral of the reactions in the time interval $(t_n, t_{n+1}]$ and $\mathbf{W}_{n+1}$ is the velocity correction. Then, taking into account the splitting of motion into a smooth and a nonsmooth contributions, the physical displacement and velocity fields are computed by adding the correction vectors $\mathbf{U}_{n+1}$ and $\mathbf{W}_{n+1}$ to the smooth parts of motion as follows,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \check{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{B.5a})$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \check{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (\text{B.5b})$$

where $\mathbf{q}$ is the vector of nodal coordinates and $\mathbf{v}$ is the nodal velocity assumed to be of bounded variation. The penalty factors $p_s > 0$, $p_p > 0$, $p_v > 0$ of the smooth, position and velocity problems are used to improve the convergence rate, while the scaling factors $k_s > 0$, $k_p > 0$ and $k_v > 0$ contribute to an improvement of the condition number of the iteration matrix. They are chosen as $k_s = p_s = \bar{m}/h$, $k_p = p_p = \bar{m}$ and $k_v = p_v = \bar{m}$ giving a good scaling of equations where $\bar{m}$ is a characteristic mass of the problem. The integration algorithm is completed with the following difference equations of the generalized- α scheme

$$\check{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{B.6a})$$

$$\check{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{B.6b})$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\check{\check{\mathbf{v}}}_{n+1} + \alpha_f\check{\check{\mathbf{v}}}_n \quad (\text{B.6c})$$

where $\mathbf{a}_{n+1}$ is a pseudo acceleration term. The numerical coefficients γ , β , α_m , and α_f are selected by imposing the spectral radius at infinity $\rho_\infty \in [0, 1)$,

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = 0.5 + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = 0.25(\gamma + 0.5)^2 \quad (\text{B.7})$$

Then, $\mathcal{U}$ denotes the set of indices of the unilateral constraints, $\bar{\mathcal{U}}$ is its complementarity set, i.e., the set of bilateral constraints and $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \bar{\mathcal{U}}$ is the full set of constraints. The set of active unilateral constraints $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{n+1}$ and bilateral constraints and $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{n+1}$, together with their complementary sets $\bar{\mathcal{A}}_{n+1} \equiv \bar{\mathcal{A}}_{n+1}$ and $\bar{\mathcal{B}}_{n+1} \equiv \bar{\mathcal{B}}_{n+1}$, are defined in the following form

$$\mathcal{A}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{U} : k_p \nu_{n+1}^j - p_p \mathbf{g}_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (\text{B.8a})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}_{n+1} \quad (\text{B.8b})$$

$$\mathcal{B}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \{ j \in \mathcal{A}_{n+1} : k_v \mathbf{A}_{n+1}^j - p_v \mathbf{g}_{n+1}^j \geq 0 \} \quad (\text{B.8c})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_{n+1} \quad (\text{B.8d})$$

Then, the residual vectors $\mathbf{r}^s, \mathbf{r}^p, \mathbf{r}^v$ of the smooth, position and velocity sub-problems are obtained from the imbalance of Eqs.(B.1)-ab, Eqs.(B.1)-cde, and Eqs.(B.1)-fgh, respectively. By defining the generalized unknown vectors

$$\Delta \mathbf{x}^s = \begin{Bmatrix} \Delta \check{\mathbf{v}}_{n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \\ \Delta \check{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{A}} \\ \Delta \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\bar{\mathcal{A}}} \end{Bmatrix}, \quad \text{and} \quad \Delta \mathbf{x}^v = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{W}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\mathcal{B}} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\bar{\mathcal{B}}} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

the iterative correction equations for each sub-problem are evaluated as follows

$$\mathbf{S}_t^i \Delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{r}^i, \quad \text{for } i = s, p, v \quad (\text{B.10})$$

where the iteration matrices are:

$$\mathbf{S}_t^s = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{s*} & -k_s \mathbf{g}_{q,n+1}^{\bar{\mathcal{U}},T} \\ -k_s \left(\mathbf{g}_{q,n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} + \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{G}^s \right) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{S}_t^p = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{p*} & -k_p \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{A},T} & \mathbf{0} \\ -k_p \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{k_p^2}{p_p} \mathbf{I}^{\bar{\mathcal{A}}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{S}_t^v = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t^{v*} & -k_v \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{B},T} & \mathbf{0} \\ -k_v \mathbf{g}_{q,n+1}^{\mathcal{B}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{k_v^2}{p_v} \mathbf{I}^{\bar{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

where $\mathbf{I}^{\bar{\mathcal{A}}}$. In practice, the Newton scheme is complemented with a line-search strategy to improve the robustness of the resulting algorithm. The complete description of the integrator is not given here for conciseness, more details can be found in [20] with the full expressions of the tangent

matrices. The pseudocode is given in the Appendix A. An extension of this algorithm for handling frictionless multiple impact collisions can be found in [21].

B.3. Frictional Contact Formulation

The kinematics of two contacting bodies with friction effects is described in terms of the gap distance between the potential contact surfaces. It is usually split into a normal and a tangential component: $g_N \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{g}_T = [g_{T1} \ g_{T2}]^T \in \mathbb{R}^2$, referred to a material orthonormal frame at the contact point, respectively. The same procedure is performed with the contact force $\boldsymbol{\nu}$, which is decomposed into a normal component $\nu_N \in \mathbb{R}$ and a tangential component $\boldsymbol{\nu}_T = [\nu_{T1} \ \nu_{T2}] \in \mathbb{R}^2$. This splitting allows to define the restrictions of gap, contact, stick or slip of the frictional contact problem at position level as follows:

$$\begin{aligned} g_N &\geq 0 & \nu_N &\geq 0, & g_N \nu_N &= 0; \\ \|\mathbf{g}_T\| &\geq 0, & \|\boldsymbol{\nu}_T\| &\leq \mu \nu_N, & \|\mathbf{g}_T\| (\|\boldsymbol{\nu}_T\| - \mu \nu_N) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

where μ is the friction coefficient, and where the associative slip rule $\|\boldsymbol{\nu}_T\| \mathbf{g}_T = -\|\mathbf{g}_T\| \boldsymbol{\nu}_T$ also holds. The first set of inequality equations of Eq.(B.14) represents the normal contact conditions telling if the bodies are in *gap* or in *contact* status. The second set corresponds to the Coulomb's friction law which states whether the bodies are in *stick* or in *slip* status.

The set of inequality constraints in Eq.(B.14) can be enforced using an augmented Lagrangian formulation as proposed Alart and Curnier[4]. The adopted augmented Lagrangian function for the frictional contact problem at position level, in terms of the nodal coordinates vector $\mathbf{q}$ and contact forces $\boldsymbol{\nu}$, is given by

$$\mathcal{L}^p(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}) = -k_p g_N \nu_N + \frac{p_p}{2} g_N^2 - \frac{\text{dist}^2}{2p_p} [\xi_N, \mathbb{R}^+] - k_p \mathbf{g}_T \cdot \boldsymbol{\nu}_T + \frac{p_p}{2} \|\mathbf{g}_T\|^2 - \frac{\text{dist}^2 [\boldsymbol{\xi}_T, C_{\xi_N}]}{2p_p} \quad (\text{B.15})$$

where $\xi_N = k_p \nu_N - p_p g_N$ and $\boldsymbol{\xi}_T = k_p \boldsymbol{\nu}_T - p_p \mathbf{g}_T$ are the augmented multipliers for the normal and the tangential direction at position level, respectively; p_p is a positive penalty parameter and k_p is a scaling factor for the Lagrange multipliers ν_N and $\boldsymbol{\nu}_T$. Function $\text{dist}(\mathbf{z}, C)$ is the distance between a point $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ and the convex set C , while the cone C_{ξ_N} is the convex set defined by the extension of the friction cone $C(k_p \nu_N + p_p g_N) \equiv C(\xi_N)$ to the half-line $\mathbb{R}^-(\xi_N)$, i.e. the set of negative values of the normal augmented multiplier $\xi_N = k_p \nu_N + p_p g_N$ (more details can be found in [44]). Note that $\mathbf{g}_T$ is the tangential component of the incremental relative displacement between points in contact during the considered time step.

We define the terms $\dot{g}_N \in \mathbb{R}$ and $\dot{\mathbf{g}}_T \in \mathbb{R}^2$ to express the Newton impact's law in the normal

and tangential directions, as follows,

$$\dot{g}_N = g_{N\mathbf{q},n+1}\mathbf{v}_{n+1} + e_N g_{N\mathbf{q},n}\mathbf{v}_n \quad \dot{\mathbf{g}}_T = \mathbf{g}_{T\mathbf{q},n+1}\mathbf{v}_{n+1} + e_T \mathbf{g}_{T\mathbf{q},n}\mathbf{v}_n \quad (\text{B.16})$$

Here, $e_N \in [0, 1]$ and $e_T \in (-1, 1)$ are the coefficients of restitution in the normal and tangential directions, respectively, and $g_{N\mathbf{q}}$ and $\mathbf{g}_{T\mathbf{q}}$ are the gradients of the normal and incremental tangential displacements, respectively. Then, the frictional contact conditions at velocity level are written in analogous form as Eq.(B.14) yielding,

$$\begin{aligned} \dot{g}_N &\geq 0, & \Lambda_N &\geq 0, & \dot{g}_N \Lambda_N &= 0; \\ \|\dot{\mathbf{g}}_T\| &\geq 0, & \|\Lambda_T\| &\leq \mu \Lambda_N, & \|\dot{\mathbf{g}}_T\| (\|\Lambda_T\| - \mu \Lambda_N) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

where the associative rule $\|\Lambda_T\| \dot{\mathbf{g}}_T = -\|\dot{\mathbf{g}}_T\| \Lambda_T$ holds, and where $\Lambda_N \in \mathbb{R}$ and $\Lambda_T = [\Lambda_1 \ \Lambda_2]^T \in \mathbb{R}^2$ are the normal and the tangential impulses in the normal and tangential directions, respectively, with respect to an orthonormal material frame located at the contact point. Then, similarly to Eq.(B.15), the augmented Lagrangian for the frictional contact problem at velocity level is given by

$$\mathcal{L}^v(\mathbf{v}, \Lambda) = -k_v \dot{g}_N \Lambda_N + \frac{p_v}{2} \dot{g}_N^2 - \frac{\text{dist}^2[\sigma_N, \mathbb{R}^+]}{2p_v} - k_v \dot{\mathbf{g}}_T \cdot \Lambda_T + \frac{p_v}{2} \|\dot{\mathbf{g}}_T\|^2 - \frac{\text{dist}^2[\boldsymbol{\sigma}_T, C_{\sigma_N}]}{2p_v} \quad (\text{B.18})$$

where $\sigma_N = k_v \Lambda_N - p_v \dot{g}_N$ and $\boldsymbol{\sigma}_T = k_v \Lambda_T - p_v \dot{\mathbf{g}}_T$ are the augmented multipliers at velocity level in the normal and tangential directions, respectively and C_{σ_N} is a section of radius $\mu \sigma_N$ of the augmented Coulomb friction cone expressed in terms of velocity variables. Then, p_v is a positive penalty parameter and k_v is the scaling factor for the Lagrange multipliers Λ_N and Λ_T .

The virtual variations of the augmented Lagrangians (B.15, B.18) give the internal forces vectors, and their linearisation yields the corresponding Hessian matrices. They are calculated in the next subsection.

Internal Forces Vectors and Hessian Matrices

The contact elements contribute only via unilateral constraints to the position and velocity correction equations, or in other words, they do not contribute to the smooth motion subproblem. In what follows, the indices n or $n+1$ will be omitted from the equations to simplify the notation. The generalized internal force vector at position level is obtained by taking variations in the augmented Lagrangian $\mathcal{L}^p$ of Eq.(B.15) giving

$$\delta \mathcal{L}^p(\mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}) = -k_p \delta \nu_N g_N - \xi_N \delta g_N - \frac{1}{p_p} \delta \left(\frac{1}{2} \text{dist}^2(\xi_N, \mathbb{R}^+) \right) - k_p \delta \nu_T \cdot \mathbf{g}_T - \boldsymbol{\xi}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T - \frac{1}{p_p} \delta \left(\frac{1}{2} \text{dist}^2(\boldsymbol{\xi}_T, C_{\xi_N}) \right) \quad (\text{B.19})$$

Details about the variations of the terms in Eq. (B.19) can be found in Sánchez *et al* [57]. Then, by defining the generalized coordinates vector $\Phi = [q^T \nu_N \nu_T^T]^T$, the variation of the augmented Lagrangian is written as follows

$$\delta \mathcal{L}^p(\Phi) = \delta \Phi^T F^p(\Phi) \quad (\text{B.20})$$

where the internal force vector at position level for the different contact status is given by

$$F^p(\Phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \nu_N \\ -\frac{k_p^2}{p_p} \nu_T \end{pmatrix} & \xi_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \xi_N - \mu \xi_N g_{Tq}^T \tau_p \\ -k_p g_N \\ \frac{k_p}{p_p} (-k_p \nu_T + \mu \xi_N \tau_p) \end{pmatrix} & \|\xi_T\| \geq \mu \xi_N \quad \text{Slip} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \xi_N - g_{Tq}^T \xi_T \\ -k_p g_N \\ -k_p g_T \end{pmatrix} & \|\xi_T\| < \mu \xi_N \quad \text{Stick} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

where $\tau_p = \xi_T / \|\xi_T\|$ is a unit vector that defines the tangential direction of the contact force. The linearization of the internal force vectors at position level yields the contact Hessian matrix for the different contact conditions (see details in [57]). By following a similar reasoning as in the position level subproblem, the variation of the augmented Lagrangian at velocity level is calculated from Eq.(B.18) giving

$$\delta \mathcal{L}^v(\Phi) = \delta \Phi^T F^v(\Phi) \quad (\text{B.22})$$

Then, from Eq.(B.22), the internal force vectors at velocity level for the contact status are given by

$$F^v(\Phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_N \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \Lambda_T \end{pmatrix} & \sigma_N < 0 \quad \text{Gap} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \sigma_N - \mu \sigma_N g_{Tq}^T \tau_v \\ -k_v \dot{g}_N \\ \frac{k_v}{p_v} (-k_v \Lambda_T + \mu \sigma_N \tau_v) \end{pmatrix} & \|\sigma_T\| \geq \mu \sigma_N \quad \text{Slip} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^T \sigma_N - g_{Tq}^T \sigma_T \\ -k_v \dot{g}_N \\ -k_v \dot{g}_T \end{pmatrix} & \|\sigma_T\| < \mu \sigma_N \quad \text{Stick} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

where $\tau_v = \sigma_T / \|\sigma_T\|$ is a unit vector that defines the tangential direction of the contact force at velocity level. The Hessian matrices are obtained by a linearization of the internal contact force

vectors at velocity level (see [57]).

The internal force vectors and Hessian matrices have been developed in a completely general form, without particularizing to any contact model. They depend on the definition of the gap distance vector and the gradient matrices in the normal and tangential directions.

Multiple Impacts Collisions

In the case of collisions with multiple frictional impacts, a similar procedure is applied which iterates over a sequence of impact problems on a vanishing time interval until no further impact is detected. This formulation, which exploits a modified activation criterion at velocity level, is based on the recent work presented by Cosimo *et al.* [21].

The first iteration is equivalent to the procedure already described. Variables $\mathbf{V}^-$ and $\tilde{\mathbf{V}}^-$ are introduced, which respectively represent the updated expressions of the pre-impact velocities $\mathbf{v}_n$ and $\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}$ for the next iterations. The Newton impact law in the normal and tangential directions is defined in terms of $\mathbf{V}^-$ as

$$\mathring{\mathbf{g}}_{N,n+1}^{*,j} = g_{N\mathbf{q},n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_N^j g_{N\mathbf{q},n}^j \mathbf{V}^- \quad \mathring{\mathbf{g}}_{T,n+1}^{*,j} = g_{T\mathbf{q},n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e_T^j g_{T\mathbf{q},n}^j \mathbf{V}^- \quad (\text{B.24})$$

These computations are performed for every impact point $j \in \mathcal{C}$. Accordingly, the modified augmented multiplier involved by the sub-problem at velocity level is denoted by σ_{n+1}^* :

$$\sigma_{n+1}^* = \left\{ \begin{array}{l} k_v \Lambda_{N,n+1} - p_v \mathring{\mathbf{g}}_{N,n+1}^* \\ k_v \Lambda_{T,n+1} - p_v \mathring{\mathbf{g}}_{T,n+1}^* \end{array} \right\} \quad (\text{B.25})$$

The modified active set is denoted by $\mathcal{G}^*$ and it is defined as

$$\mathcal{G}_{n+1}^* = \overline{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{A}_{n+1} : g_{\mathbf{q},n+1}^j \tilde{\mathbf{V}}^- < \text{tol}_v \text{ and } \sigma_{N,n+1}^{*,j} \geq 0\} \quad (\text{B.26})$$

where σ_N^* is the first row of vector in Eq.(B.25) which corresponds to the normal component of σ^* . The condition $g_{\mathbf{q},n+1}^j \tilde{\mathbf{V}}^- < \text{tol}_v$ asks for the admissibility of the pre-impact velocity. The other condition states that the augmented multiplier corresponding to the impact impulsion must be positive. Once an impact from the sequence is solved, the pre-impact velocities $\mathbf{V}^-$ and $\tilde{\mathbf{V}}^-$ are updated taking into account the contribution of the just computed velocity jump $\mathbf{W}_{n+1}$,

$$\mathbf{V}^- = \mathbf{v}_n + \mathbf{W}_{n+1} \quad (\text{B.27a})$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^- = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} \quad (\text{B.27b})$$

This process continues until no more impacts take place in the sequence, which is equivalent to an empty active set $\mathcal{G}_{n+1}^*$. The velocity jump $\mathbf{W}_{n+1}$ should be here interpreted as the *total* jump which results from the accumulation of previously resolved impact problems from the generated sequence

of impacts. Therefore, the resulting impulses are accumulated and taken into consideration in each impact problem of the sequence:

$$\mathbf{P}_N = \sum_j^{i-1} g_{Nq}^{*,T} \mathbf{\Lambda}_N^{\mathcal{G}_j^*} \quad \mathbf{P}_T = \sum_j^{i-1} g_{Tq}^{*,T} \mathbf{\Lambda}_T^{\mathcal{G}_j^*} \quad (\text{B.28})$$

where the index i is used to denote the impact problem from the sequence of impacts currently being solved.

Finally, the internal force vector for the velocity level sub-problem in the case of multiple frictional impacts is written as

$$\mathbf{F}^{v*,\mathcal{G}^*}(\Phi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \mathbf{\Lambda}_N^{\mathcal{G}^*} \\ -\frac{k_v^2}{p_v} \mathbf{\Lambda}_T^{\mathcal{G}^*} \end{pmatrix} & \sigma_N^* < 0 \quad \text{Gap} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^{*,T} \sigma_N^* - \mu \sigma_N^* g_{Tq}^{*,T} \tau_v - \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_T \\ -k_v g_{Nq}^{\mathcal{G}^*} \\ \frac{k_v}{p_v} (-k_v \mathbf{\Lambda}_T^{\mathcal{G}^*} + \mu \sigma_N^* \tau_v) \end{pmatrix} & \|\sigma_T^*\| \geq \mu \sigma_N^* \quad \text{Slip} \\ \begin{pmatrix} -g_{Nq}^{*,T} \sigma_N^* - g_{Tq}^{*,T} \sigma_T^* - \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_T \\ -k_v g_{Nq}^{\mathcal{G}^*} \\ -k_v g_{Tq}^{\mathcal{G}^*} \end{pmatrix} & \|\sigma_T^*\| < \mu \sigma_N^* \quad \text{Stick} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

B.4. Sphere-Sphere Contact Model

The strategy that we adopted to develop a contact model for a rigid sphere in contact with another sphere, see Fig.C.16, follows the methodology given in [31]. The element takes into account sliding friction in the framework of nonsmooth contact dynamics with finite displacements and large rotations. The spheres are able to come in contact, rotate or slide one over the other. The

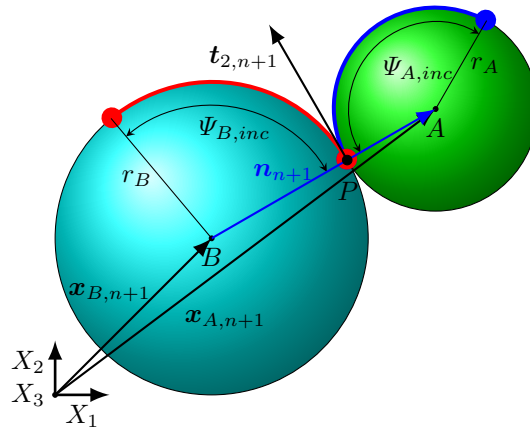


Figura B.1: Configuration of the three-dimensional sphere-sphere contact model.

motion is referred to an inertial frame (Fig. C.16). The centres of spheres A and B , with radius

r_A, r_B , are given by position vectors $\mathbf{x}_A$ and $\mathbf{x}_B$, respectively. The description of motion of the spheres is completed by giving the rotation operators $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B$ at each node, with the incremental rotation vector $\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} \in \mathbb{R}^3$ from time t_n to time t_{n+1} given by

$$\exp(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{A,\text{incr}}) = \mathbf{R}_{A,n}^T \mathbf{R}_{A,n+1} \quad (\text{B.30})$$

where the exponential map $\exp(\tilde{\boldsymbol{\Psi}})$ is used. Here, $\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{A,\text{incr}})$ is the so-called Cartesian rotation vector which has the direction of the rotation axis and length equal to the amplitude of the incremental rotation [31]. Analogous equations can be derived for sphere B . The operator $\tilde{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ gives a 3×3 skew-symmetric matrix such that $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

The direction of contact between spheres is given by the unit vector $\mathbf{n}$, which is defined as

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B}{\|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\|} \quad (\text{B.31})$$

In order to obtain the gap function of this element we define a material frame at the contact point P , using the normal vector $\mathbf{n}$ and the tangential vectors $\mathbf{t}_1$ and $\mathbf{t}_2$ which are defined as follows

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{n}\|} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 \quad (\text{B.32})$$

Here, $\mathbf{e}$ is an arbitrary vector not collinear with $\mathbf{n}$. The normal gap between the spheres is simply computed as

$$g_N = \|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\| - (r_A + r_B) \quad (\text{B.33})$$

The contact status is established when the distance $\|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\|$ is equal to the sum of radii of the spheres $r_A + r_B$; otherwise, the spheres are not in contact. The velocities of the spheres A and B at the contact point P are $\dot{\mathbf{x}}_{PA}(t)$ and $\dot{\mathbf{x}}_{PB}(t)$, respectively. They are calculated as follows

$$\dot{\mathbf{x}}_{PA}(t) = \dot{\mathbf{x}}_A(t) + \mathbf{n}(t) \times \boldsymbol{\omega}_A(t) r_A \quad \dot{\mathbf{x}}_{PB}(t) = \dot{\mathbf{x}}_B(t) - \mathbf{n}(t) \times \boldsymbol{\omega}_B(t) r_B \quad (\text{B.34})$$

We define the incremental tangential slip distance $\mathbf{g}_{T,n+1}$ between the spheres A and B , from time t_n to time t_{n+1} , as the integral of the relative velocity at the contact point: $\dot{\mathbf{x}}_{PA}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{PB}(t)$ in the tangential directions $\mathbf{t}_1(t)$ and $\mathbf{t}_2(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{T,n+1} &= \begin{Bmatrix} g_{T1,n+1} \\ g_{T2,n+1} \end{Bmatrix} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1(t)^T \\ \mathbf{t}_2(t)^T \end{bmatrix} (\dot{\mathbf{x}}_{PA}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{PB}(t)) dt = \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1(t)^T \\ \mathbf{t}_2(t)^T \end{bmatrix} \left(\dot{\mathbf{x}}_A(t) - \dot{\mathbf{x}}_B(t) + \mathbf{n}(t) \times (\boldsymbol{\omega}_A(t)r_A + \boldsymbol{\omega}_B(t)r_B) \right) dt \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

After integration of Eq.(B.35), the following expression is obtained

$$\begin{Bmatrix} g_{T1,n+1} \\ g_{T2,n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{1,n} \cdot [(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) - (\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{B,n}) + \mathbf{n}_n \times (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r_A + \boldsymbol{\Psi}_{B,\text{incr}} r_B)] \\ \mathbf{t}_{2,n} \cdot [(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) - (\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{B,n}) + \mathbf{n}_n \times (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r_A + \boldsymbol{\Psi}_{B,\text{incr}} r_B)] \end{Bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

where $\mathbf{t}_{\alpha,n} \cdot [(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{A,n}) - (\mathbf{x}_{B,n+1} - \mathbf{x}_{B,n})]$ is the tangential relative displacements produced by the displacement of the spheres in space. Meanwhile, $\mathbf{t}_{\alpha,n} \cdot [\mathbf{n}_n \times (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r_A + \boldsymbol{\Psi}_{B,\text{incr}} r_B)]$ with $\alpha = 1, 2$ can be interpreted as the tangential relative displacements produced by the rotation of the spheres. Note that in Eq.(B.36) the normal and tangential vectors are evaluated at the previous time step in order to facilitate the convergence and the internal force vectors and tangential matrices derivations. Refined formula may be considered, e.g., by using SE(3) integration [9]. Nevertheless, convergence of the nonlinear problem may then become more difficult. We remark that the simplification of evaluating the normal and the tangential vectors at previous time step does not affect the accuracy of the numerical solutions as we will demonstrate in the examples. In the Appendix B, a numerical experiment is presented in order to know the range of validity of Eq.(B.36). Finally, the generalized gap vector is defined as

$$\mathbf{g}_{n+1} = \begin{bmatrix} g_{N,n+1} \\ \mathbf{g}_{T,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}\| - (r_A + r_B) \\ \mathbf{t}_{1,n} \cdot [(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}) - (\mathbf{x}_{A,n} - \mathbf{x}_{B,n})] - \mathbf{t}_{2,n} \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r_A + \boldsymbol{\Psi}_{B,\text{incr}} r_B) \\ \mathbf{t}_{2,n} \cdot [(\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}) - (\mathbf{x}_{A,n} - \mathbf{x}_{B,n})] + \mathbf{t}_{1,n} \cdot (\boldsymbol{\Psi}_{A,\text{incr}} r_A + \boldsymbol{\Psi}_{B,\text{incr}} r_B) \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

where the circular-shift properties and the anti-commutativity of the cross-product for the scalar triple product were used to simplify the expressions.

The variation of the normal gap is given by

$$\delta g_N = g_{Nq,n+1} \delta \mathbf{q} \quad (\text{B.38})$$

where $\delta \mathbf{q}$ is the variation of the generalized coordinates vector $\delta \mathbf{q} = [\delta \mathbf{x}_A^T \delta \mathbf{x}_B^T \delta \boldsymbol{\Theta}_A^T \delta \boldsymbol{\Theta}_B^T]^T$; here, $\delta \mathbf{x}_A$ and $\delta \mathbf{x}_B$ are the variations of the position vectors whilst $\delta \boldsymbol{\Theta}_A$ and $\delta \boldsymbol{\Theta}_B$ are the incremental material rotations at nodes A and B , respectively. The normal gap gradients matrix of the element is

$$g_{Nq,n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{n+1}^T & -\mathbf{n}_{n+1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

By taking virtual variations of the incremental tangential displacements $\mathbf{g}_{T,n+1}$, Eq.(B.36), we get

$$\delta \mathbf{g}_T = \mathbf{g}_{Tq,n} \delta \mathbf{q} \quad (\text{B.40})$$

where $\mathbf{g}_{Tq,n}$ is the gradients matrix for the tangential displacements, which is computed as follows

$$\mathbf{g}_{Tq,n} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,n}^T & -\mathbf{t}_{1,n}^T & -r_A \mathbf{t}_{2,n}^T & -r_B \mathbf{t}_{2,n}^T \\ \mathbf{t}_{2,n}^T & -\mathbf{t}_{2,n}^T & r_A \mathbf{t}_{1,n}^T & r_B \mathbf{t}_{1,n}^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.41})$$

At this point, all the expressions necessary to evaluate the internal force vectors at position level for this element have been computed, see Eq.(B.21).

In order to obtain the Hessian matrix at position level, the calculation of $\Delta g_{Nq,n+1}^T$ is required. It yields the final expression,

$$g_{Nq,n+1}^T = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}}{\|\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}\|} & -\frac{\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}}{\|\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}\|} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}}{\|\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}\|} & \frac{\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}}{\|\mathbf{x}_{A,n+1} - \mathbf{x}_{B,n+1}\|} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

where the arrangement of this matrix is according to $\Delta \mathbf{q} = [\Delta \mathbf{x}_A^T \Delta \mathbf{x}_B^T \Delta \Theta_A^T \Delta \Theta_B^T]^T$. Furthermore, the linearization $\Delta g_{Tq}^T = \mathbf{0}$ since this matrix is evaluated at the previous time step. The other terms needed for the calculation of the Hessian matrix at position level were presented before.

The internal force vectors at velocity level are computed following the same procedure. The expression of the Newton's impact law, which appears in the vectors in Eq.(B.22), takes the following form,

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_{N,n+1} \\ \dot{g}_{T1,n+1} \\ \dot{g}_{T2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{n+1} \cdot (\mathbf{v}_{A,n+1} - \mathbf{v}_{B,n+1}) + e_N \mathbf{n}_n \cdot (\mathbf{v}_{A,n} - \mathbf{v}_{B,n}) \\ \mathbf{t}_{1,n} \cdot (\mathbf{v}_{A,n+1} - \mathbf{v}_{B,n+1}) - \mathbf{t}_{2,n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{A,n+1} r_A + \boldsymbol{\omega}_{B,n+1} r_B) + \\ + e_T [\mathbf{t}_{1,n} \cdot (\mathbf{v}_{A,n} - \mathbf{v}_{B,n}) - \mathbf{t}_{2,n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{A,n} r_A + \boldsymbol{\omega}_{B,n} r_B)] \\ \mathbf{t}_{2,n} \cdot (\mathbf{v}_{A,n+1} - \mathbf{v}_{B,n+1}) + \mathbf{t}_{1,n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{A,n+1} r_A + \boldsymbol{\omega}_{B,n+1} r_B) + \\ + e_T [\mathbf{t}_{2,n} \cdot (\mathbf{v}_{A,n} - \mathbf{v}_{B,n}) + \mathbf{t}_{1,n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{A,n} r_A + \boldsymbol{\omega}_{B,n} r_B)] \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

At velocity level, the variable $\mathbf{q}$ coming from the solution of the position sub-problem is fixed, thus $\Delta g_{Nq} = \mathbf{0}$ and the complete gradient matrix is constant during the velocity iteration, see the step 3 of the algorithm presented in the Appendix A. Thus, the complete set of equations to compute the internal force vectors and the Hessian matrices at velocity level have been developed.

Finally, the Hessian matrices and the internal force vectors of the element both at position and velocity levels contribute to the global tangent matrices and to the generalized internal forces vectors by a standard assembly procedure.

B.5. Numerical Examples

The contact element developed in this work has been implemented in the finite element research code Oofelie [16]. Six numerical examples are presented to show the accuracy and robustness of the proposed methodology.

The convergence criterion used in the numerical examples is given by

$$\|\mathbf{r}^i\| < \text{tol}_r \left(\sum_k \|\mathbf{r}_k^i\| + \text{tol}_f \right) \quad i = s, p, v \quad (\text{B.44})$$

where tol_r is a given relative tolerance, $\mathbf{r}_k^i$ is the k -th term contributing to the residual $\mathbf{r}^i$ (i.e., the vectors of external forces, of internal forces, etc), tol_f is a reference value of tolerance, and $\|\cdot\|$ is

the L^2 norm.

The error for the computation of convergence rates in the examples was evaluated as

$$\text{Error}(h) = \frac{\sum_{i=0}^N |f_i - f(t_i)|}{\sum_{i=0}^N |f(t_i)|} \quad (\text{B.45})$$

where h is the time step, N is the number of steps, f_i is the numerical solution computed by our algorithm, $f(t_i)$ is the reference solution and $|\cdot|$ the L^1 norm. The reference solution is taken equal to the analytical solution when available; otherwise, the numerical solution corresponding to a very small time step is used as a reference.

Frictional Contact between Spheres

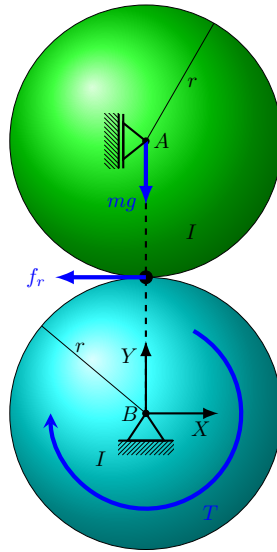


Figura B.2: Validation example. Frictional spheres configuration.

This first simple example is used to validate the sphere-sphere contact element in a case of contact with friction. It consists of two touching spheres. The upper one A is free to rotate and to displace in the vertical direction, and is submitted to gravity $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, see Fig. B.2. Sphere B is fixed at its centre and can rotate freely; rotation is imposed at sphere B with a time increasing torque law $T(t) = k t = 20 t \text{ Nm}$. Both spheres remain in contact with a friction coefficient $\mu = 0.3$. The mass inertia moment of the spheres is $I = 0.4 \text{ kg m}^2$, the mass is $m = 1 \text{ kg}$ and the radius is $r = 1 \text{ m}$.

This problem has an analytical solution. For instance, the angular velocities and the angular displacements of the spheres are given as

$$\omega_A(t) = \begin{cases} \frac{kt^2}{4I} & \text{if } t \leq t_{lim} \\ \frac{kt_{lim}}{2I} \left(t - \frac{t_{lim}}{2} \right) & \text{if } t > t_{lim} \end{cases} \quad \omega_B(t) = \begin{cases} -\frac{kt^2}{4I} & \text{if } t \leq t_{lim} \\ -\frac{k}{4I} \left(t_{lim}^2 + 2t(t - t_{lim}) \right) & \text{if } t > t_{lim} \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

$$\theta_A(t) = \begin{cases} \frac{kt^3}{12I} & \text{if } t \leq t_{lim} \\ \frac{kt_{lim}t}{4I} (t - t_{lim}) + \frac{kt_{lim}^3}{12I} & \text{if } t > t_{lim} \end{cases} \quad \theta_B(t) = \begin{cases} -\frac{kt^3}{12I} & \text{if } t \leq t_{lim} \\ -\frac{kt_{lim}t}{4I} (t - t_{lim}) + \frac{k}{6I} \left(\frac{kt_{lim}^3}{2} - t^3 \right) & \text{if } t > t_{lim} \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

where $t_{lim} = 2mg\mu r/k$. The system is simulated for a total time 1 s with a constant time step 1×10^{-3} s. The tolerance for the nonlinear solver is fixed to 1×10^{-5} and the spectral ratio of the integrator is selected as $\rho_\infty = 0.8$. The numerical solution is given in Fig. B.3. The contact force remains constant and is equal to the weight of sphere A, $f_c = mg = 9.8$ N, see Fig. B.3-a. The tangential force increases linearly reaching the maximum value of $f_T^{max} = \mu mg = 2.94$ N at time $t_{lim} = 0.294$ s; then, it remains constant when the spheres enter in slip state, see Fig. B.3-a. The angular velocities of both spheres are equally accelerating and with opposite direction until time $t_{lim} = 0.294$ s while the contact status is stick. Then, velocity of the sphere B continues quadratically increasing in time because of the linearly increasing torque, while velocity of sphere A remains linearly increasing because of the slipping state which limits the transmitted torque to a constant value, see Fig. B.3-b.

The maximum number of iterations per time-step in each sub-problem is 1, 3 and 3 with a mean number of 1, 2 and 2 iterations per time-step. Fig. B.4 shows the computed convergence rate for the angular displacement and velocity of sphere A. The analytical solution was taken as reference, and a linear convergence rate is observed. No line search iterations were required to achieve convergence of the Newton scheme.

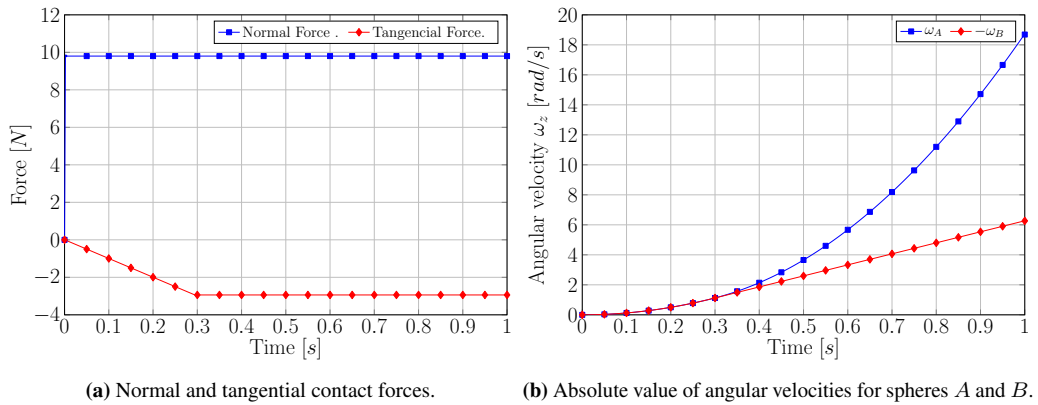


Figure B.3: Numerical solution for the frictional spheres example.

Single Collision Example

This case, which concerns the impact of two spheres, serves to validate the simulations of impact problems taking into account friction between the balls and the planar surface. The numerical

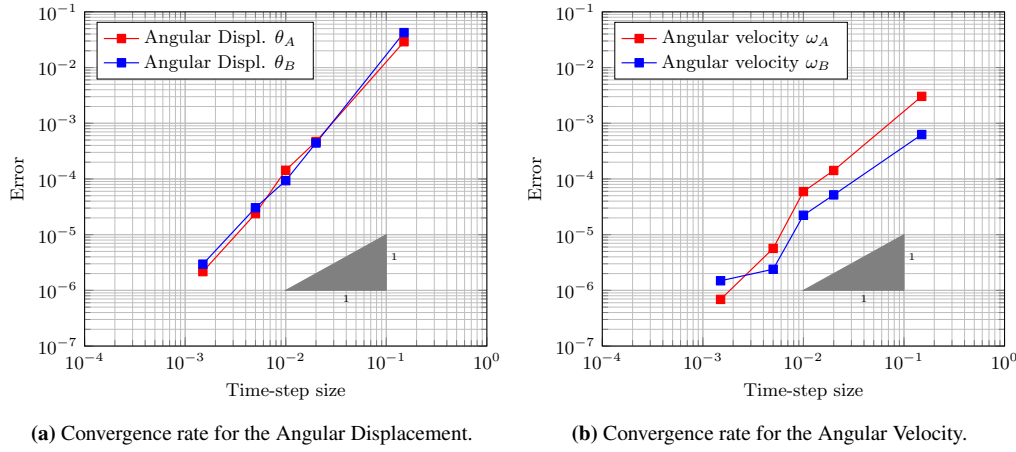


Figura B.4: Convergence rate for the frictional contact between spheres example.

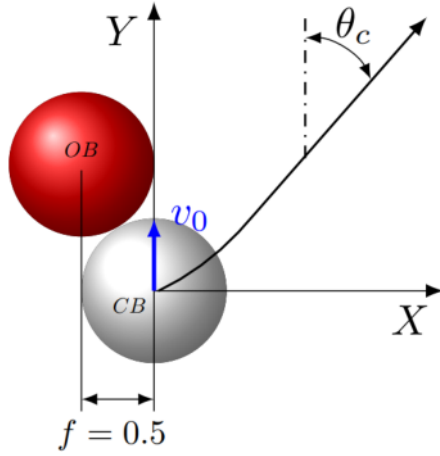
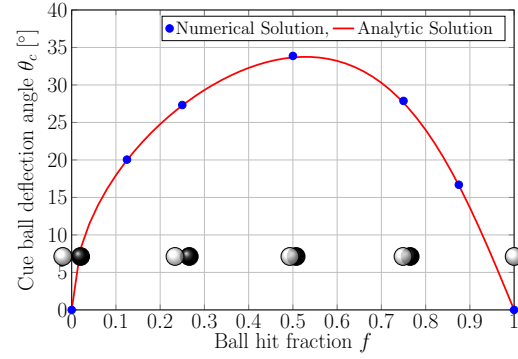
solutions are compared against analytical solutions developed by Alciatore [5]. This example illustrates the 30° rule, which is well known in the billiard balls game. This rule states that if the cue ball in rolling motion impacts the target ball in rest at a point between 1/4-ball hit (49° cut) and 3/4-ball hit (14° cut), it will deflect by almost 30° from its original direction after hitting the target ball. When friction between balls is neglected and the coefficient of restitution is $e_N = 1$, the cue ball deflection angle θ_c as a function of the cut angle ϕ [5], is given by,

$$\theta_c = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{\sin^2(\phi) + \frac{2}{5}} \right) \quad (\text{B.48})$$

where $\phi = \sin^{-1}(1 - f)$ and f is the hit ball fraction factor $f \in [0, 1]$ between balls (see Figure B.5-a). Comparisons of this analytical solution with experimental measurements can be found in [5, 62] and in many videos available in websites, showing good agreement. The geometrical and physical properties for the simulations, typical of the classical pool/billiard game, were selected from the book of Alciatore [5]. The radius of the balls are $r = 2.8575$ cm, the mass $m = 0.17$ kg and the coefficient of friction between the balls and the cloth is $\mu = 0.2$. The normal restitution coefficient value between the balls, and between the balls and the cloth, is $e_N = 1$. The tangential restitution coefficient is $e_T = 0$ for all contact points. The acceleration of gravity is $g = 9.8$ m/s².

The cue ball impacts the target at a velocity $v^- = 1.8$ m/s in pure rolling motion. The numerical solution was computed with a time step $h = 1 \times 10^{-4}$ s and spectral radius $\rho_\infty = 0.8$. The value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. Computations for seven different hit ball fraction factors $f = [0, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 0.875, 1]$ were performed. Figure B.5-b shows the agreement between the analytical and the numerical solutions. The maximum number of iterations per time-step were 1, 4 and 5 with a mean number of 1 iteration per time-step for each sub-problem.

A second case more challenging than the previous one was considered, with friction between balls and restitution coefficient different from 1 [5]. The tangential component of the friction impulse

(a) The cue ball deflection angle θ_c .

(b) The 30 ° rule. Numerical and analytical solution comparison.

Figure B.5: Impact between two spheres.

was neglected, and the balls spinning velocity was imposed to be zero. With these assumptions, the trajectory of the cue ball immediately after impact can be described by the following set of equations,

$$\{x(t); y(t)\} = \begin{cases} \{x_c(t); y_c(t)\} & \text{if } t \leq t_{roll} \\ \{x_c(t_{roll}) + v_x(t_{roll}) [t - t_{roll}]; y_c(t_{roll}) + v_y(t_{roll}) [t - t_{roll}]\} & \text{if } t > t_{roll} \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

where t_{roll} is the time needed by the cue ball to stop sliding and enter into pure rolling motion after impact. The full set of equations necessary to calculate the evolution of the cue ball is given in Appendix C; the complete development can be found in [5].

Three cases with different values for the friction and restitution coefficients between balls, and hit fraction $f = 0.5$, were proposed to study the friction effects; they are: i) $\mu_{ball} = 0$, $e_N = 1$, ii) $\mu_{ball} = 0.06$, $e_N = 1$ and iii) $\mu_{ball} = 0$, $e_N = 0.94$. Figure B.6-a displays the trajectory of the cue ball after impact calculated with Alciatore formulas and compared to the numerical solution of this work. From time 0 to t_{roll} , the cue ball describes a curved trajectory as a consequence of sliding with friction with the cloth; after that, when the ball is in a pure rolling motion, the trajectory is straight. Figure B.6-a shows a good agreement between the analytical and numerical solutions.

Figure B.6-b shows the analytical results compared with the numerical solutions computed when balls spinning is released, without being fixed to a zero value. We can observe that in this case we depart slightly from the trajectory calculated in [5]. The numerical solution was computed with a time step $h = 1 \times 10^{-4}$ s and spectral radius $\rho_\infty = 0.8$.

The displayed energy evolution is such that the system does not generate spurious energy throughout the simulation. Figure B.7-a shows that, initially, the cue ball is in sliding movement with a reduction of kinetic energy. Subsequently, it enters in pure rolling motion conserving energy

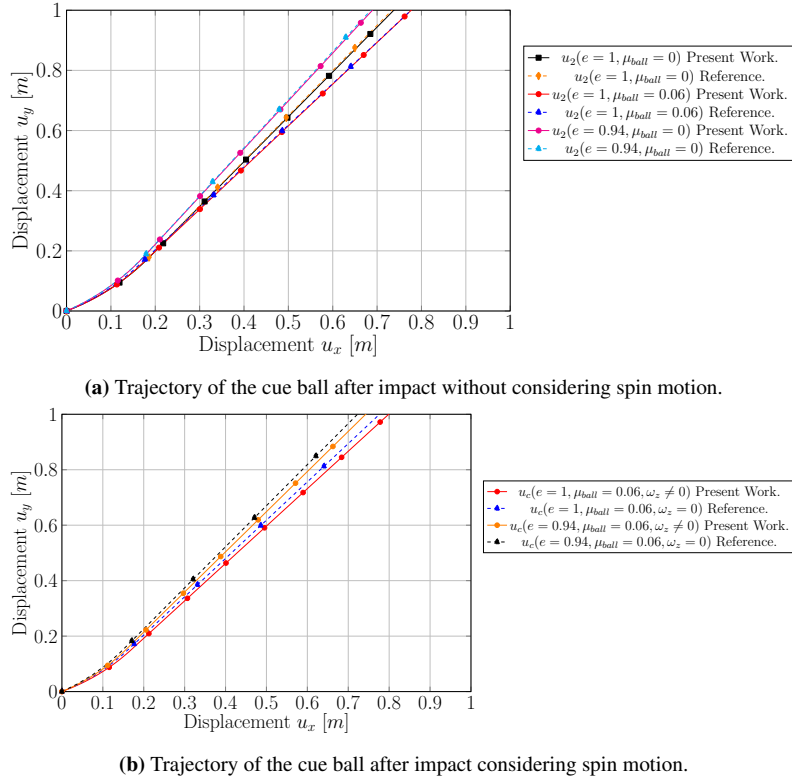


Figure B.6: Numerical vs. analytical solutions when friction between balls is considered and e_N is different to 1.

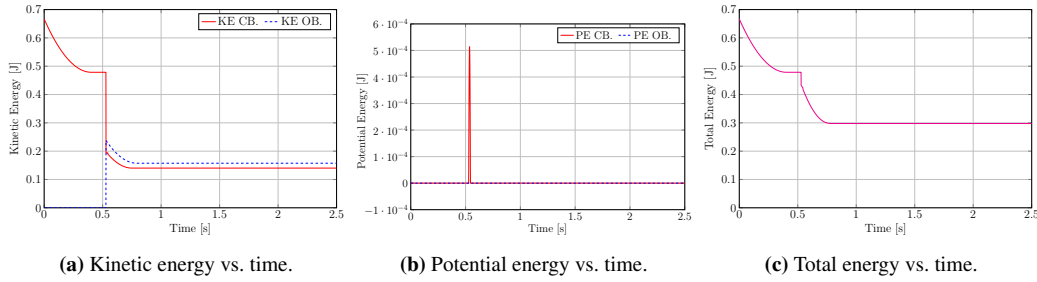
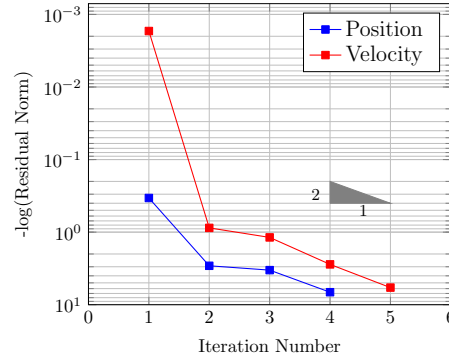


Figure B.7: Energy evolution in time for the single collision example (case $f = 0.5$, $e_N = 0.94$, $\mu_{ball} = 0.06$, $\omega_{zOB} = \omega_{zCB} = 0$ without spin motion).

until collision with the object ball. At the moment of impact, the cue ball rebounds and separates from ground, as illustrated in Fig. B.7-b, where an increase in potential energy is observed. Then, both balls change progressively from sliding to pure rolling motion reducing the total kinetic energy, as shown in Fig. B.7-c. Finally, both balls move in pure rolling movement without losing energy.

The nonlinear problem at each time step was solved by Newton iterations, where the value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. The maximum number of iterations per time-step was 1, 4 and 5 for each subproblem, with a mean number of 1 iteration per time-step. Figure B.8 illustrates the evolution of the logarithm of the residual norm, for the case $f = 0.5$, $e_N = 0.94$, $\mu_{ball} = 0.06$ without spin motion, at the step of impact for which the position and velocity iterations were activated. At impact instant, a quadratic convergence rate of the Newton iteration was obtained. In the first iteration of the Newton method, 3 iterations of line search at velocity level were required

to convergence. In the remaining time steps, no line search iterations were required to achieve the convergence of the Newton scheme.



(a) Evolution of logarithm of residual norm in terms of number of iterations.

Figura B.8: Logarithmic evolution of residual norm.

Finally, the convergence rate as a function of the time step, compared with the analytical solution, was calculated. The following set of parameters were used: $\mu_{ball} = 0.2$, $e_N = 0.94$, $\mu = 0.2$, $\omega_z = 0$ and $f = 0.5$. Figure B.9 shows a linear convergence rate as expected.

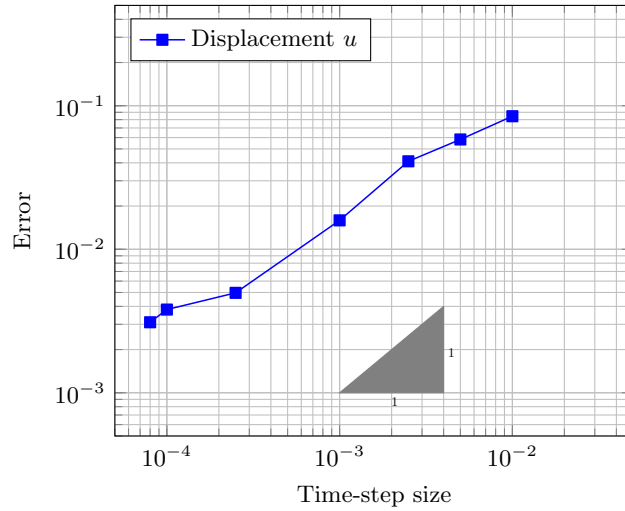


Figura B.9: Convergence rate for the single collision example.

Spinning Ball hitting a Ball at Rest

In this case, a spinning cue ball (CB) hitting an object ball (OB) at rest is considered. Throw effects are produced because of the spinning motion and the friction between balls. Figure B.10 shows a scheme of the kinematics of impact between the CB and the OB. The CB has a spinning angular velocity ω_{zCB} and an initial linear shot velocity v^- . After impact, the OB exits with a throw angle θ_{throw} and gets a post-impact velocity v^+ . The throw angle depends on the speed of the shot v^- , the cut angle ϕ , the amount and direction of the CB spin velocity ω_{zCB} , the friction

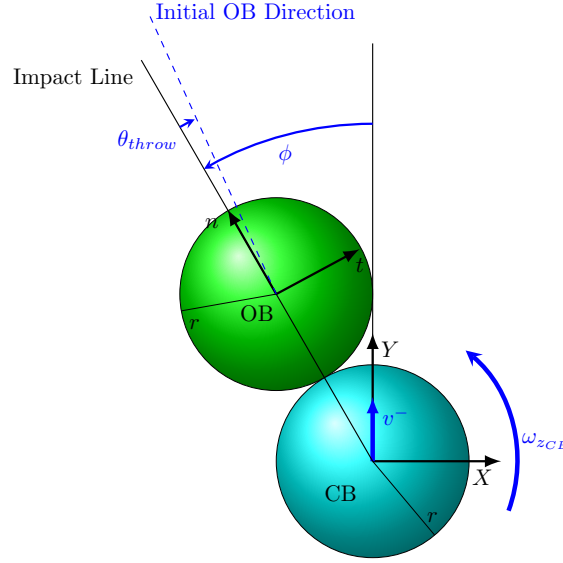


Figura B.10: Throw angle effect in two spherical bodies.

coefficient between balls μ_b and the radius R of the balls. The analytical expression to calculate θ_{throw} is given in [5]

$$\theta_{\text{throw}} = \tan^{-1} \left[\min \left(\frac{\mu_b v^- \cos \phi}{v_{\text{rel}}}, 1/7 \right) \frac{v^- \sin \phi - R \omega_{zCB}}{v^- \cos \phi} \right] \quad (\text{B.50})$$

where $v_{\text{rel}} = \sqrt{(v^- \sin \phi - R \omega_{zCB})^2 + (R \omega_{xCB} \cos \phi)^2}$ is the tangential component of the relative velocity between balls at the impact point, with ω_{xCB} the rolling angular velocity of the CB. Several experiments performed by Jewett [40] and Alciatore [6, 7] verified the validity of Eq.(B.50). The friction coefficient was computed by a fitting process from experimental data, in terms of the relative velocity of the balls at the point of impact, giving [5]:

$$\mu_b = 9.951 \times 10^{-3} + 0.108 e^{-1.088 v_{\text{rel}}} \quad (\text{B.51})$$

Numerical experiments were performed for typical dimensions of billiard balls taken from bibliography [5], the radius of the balls are $r = 2.8575$ cm, the mass $m = 0.17$ kg and the acceleration of gravity is $g = 9.8$ m/s². The coefficient of friction between the balls and the cloth was neglected in order to consider only the spin impulsion which is transferred from the CB to the OB. The friction coefficient between balls was calculated as in Eq. (B.51). The normal restitution coefficient value between the balls, is $e_N = 1$, and between the balls and the cloth, is $e_N = 0$. The tangential restitution coefficient is $e_T = 0$ for all contact points. The CB velocity was $v^- = 1.341$ m/s (3 mph) in the x direction, thus, the angular velocity in pure rolling is $\omega_{\text{roll}} = v^- / R = 46.929$ rad/s.

Seven cases for different values of the ratio $R\omega_{zCB}/v^-$ of the CB were considered:

$$R\omega_{zCB}/v^- = [-1.25, -0.9, -0.4, 0, 0.4, 0.9, 1.25] \quad (\text{B.52})$$

Simulations were performed for two values of rolling angular velocities and two values of cut angles [5]: $\omega_{xCB} = [0, 0.5 \times \omega_{roll}]$ (pure sliding and half sliding) and $\phi = [0, 30^\circ]$ (straight impact and 30° impact).

The numerical solutions were computed with a time step $h = 1 \times 10^{-4}$ s and the total time for the simulation was 1 s. The spectral radius of the integrator was $\rho_\infty = 0.8$.

Figures B.11a-b show comparisons between the throw angle θ_{throw} as a function of the ratio $R\omega_z/v^-$ calculated with Eq.(B.50) and the numerical solution computed with the methodology presented in this work. As Fig. B.11 shows, both solutions are in a good agreement.

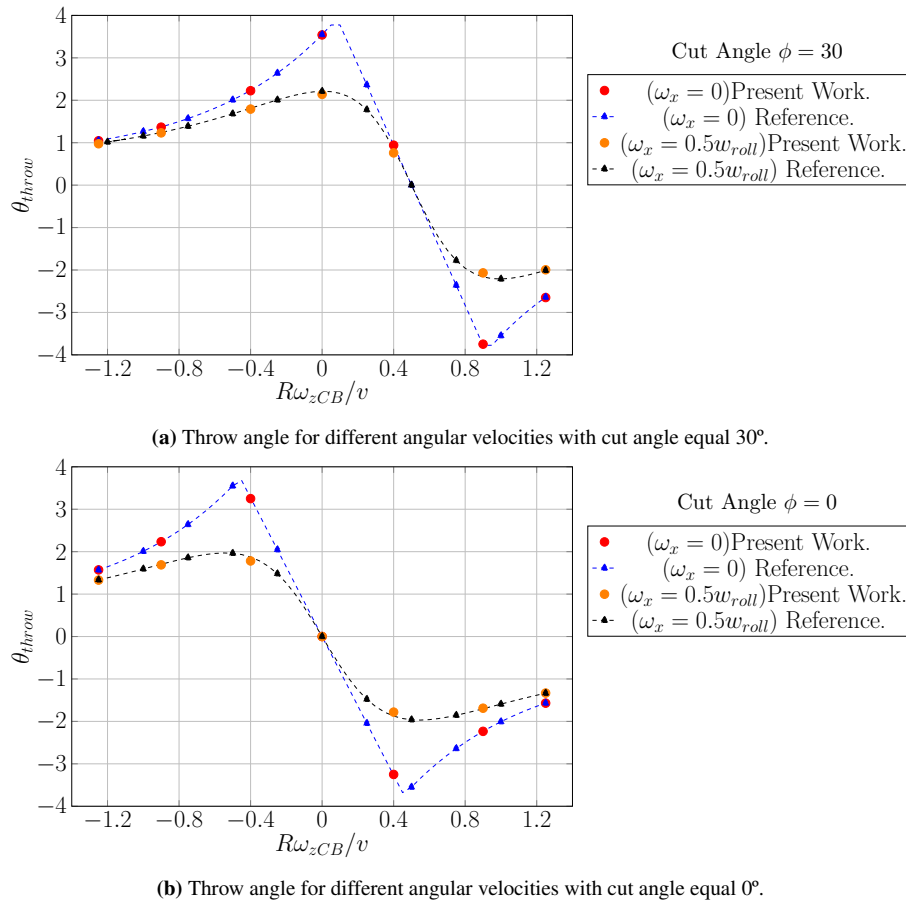


Figure B.11: Throw angle vs. spin angular velocity.

The displayed energy evolution is such that the system does not generate spurious energy throughout the simulation, as displayed in Figure B.12. Energy is practically conserved all along the simulation, unless at the time instant of impact where an exchange of energies between balls is produced with some amount of dissipation because of friction.

The nonlinear problem at each time step was solved by Newton iteration, where the value of

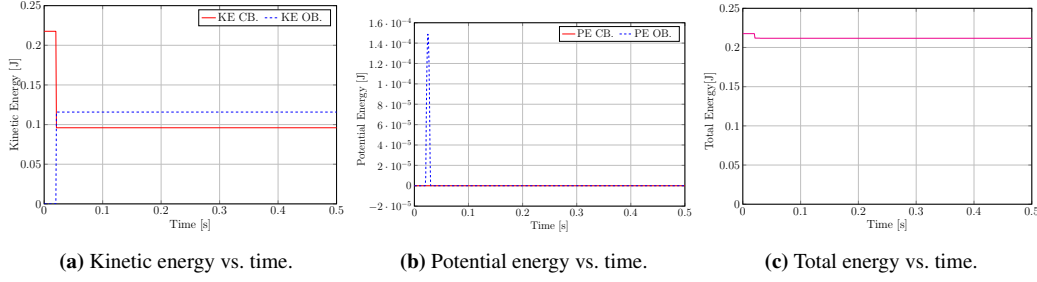
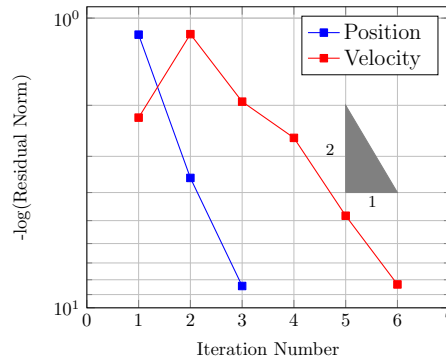


Figure B.12: Evolution of energies in time (case $\mu = 0$, $e_N = 1$, $\mu_{ball} = 0.06$, $\phi = 30^\circ$, $\omega_{xCB} = 0.5 \times \omega_{roll} = 23.46$ rad/s, $v^- = 1.341$ m/s, $R\omega_{xCB}/v^- = 0.9$).

tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. The maximum number of iterations per time-step was 1, 3 and 6 for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively. The mean number of iterations was 1 per time-step for each sub-problem. Figure B.13 illustrates the evolution of the logarithm of the residual norm vs. iterations, for the case $\mu = 0$, $e_N = 1$, $\mu_{ball} = 0.06$, $\phi = 30^\circ$, $\omega_{xCB} = 0.5 \times \omega_{roll} = 23.46$ rad/s, $v^- = 1.341$ m/s at the step of impact for which the position and velocity iterations were activated. At impact instant, a quadratic convergence rate of the Newton iterations is evidenced. No line search iterations were required to achieve convergence of the Newton scheme.



(a) Evolution of the logarithm of the residual norm in terms of number of iterations.

Figure B.13: Logarithmic evolution of residual norm.

Finally, the convergence rate with respect to the analytical solution as a function of the time step is given. The following parameters were used: $R\omega_z/v^- = -0.4$, $\omega_x = 0.5\omega_{roll}$ and $\phi = 30^\circ$. Figure B.14 shows a linear convergence as expected.

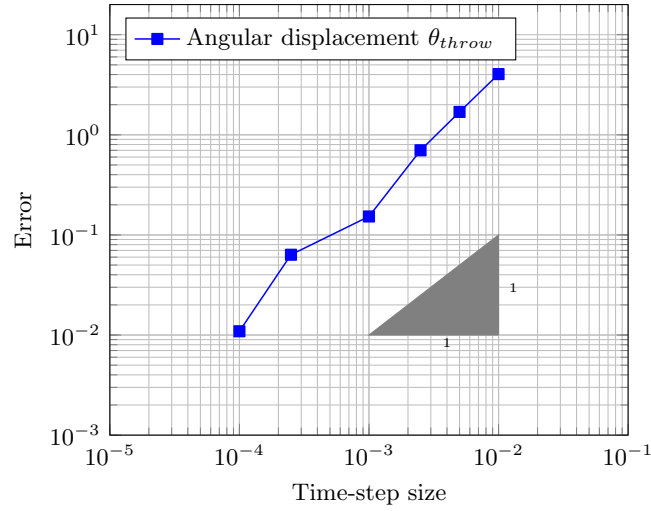


Figure B.14: Convergence rate for the effect of friction on the throw angle example.

Multiple Impacts Collision

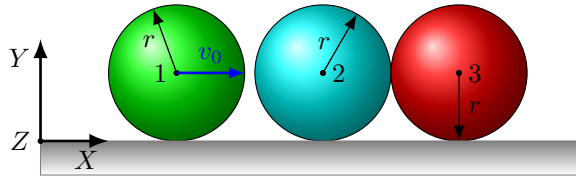


Figure B.15: Multiple impacts collision of three balls.

The fourth example consists of the multiple impacts collision of three spheres, see Fig. B.15. Sphere 1 has an initial velocity $v_0 = 2$ m/s in the X direction, a zero initial angular velocity and is located such that contact with sphere 2 is at a distance of 0.5534 m. Spheres 2 and 3 are initially at rest and in contact. Dimensions, friction coefficients and mass properties of the balls correspond to typical values in a pool game. Each sphere is assumed rigid with a radius of 0.0283 m, mass 0.185 kg and a mass inertia moment of 0.000057 kg m². The normal and tangential restitution coefficients between the spheres are $e_N = 1$ and $e_T = 0$, respectively; meanwhile, $e_N = e_T = 0$ are used for the the contact between the balls and the cloth. The numerical solutions were computed with a time step $h = 1 \times 10^{-3}$ s and the total time for the simulation was 1 s. The spectral radius of the integrator was $\rho_\infty = 0.8$. The value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$.

Two different cases are simulated for comparison. The first one is frictionless and is solved using the algorithm proposed by Cosimo *et al* [21]; in the second one, friction is considered in all contact points using the equations presented in Sec. B.3, with friction coefficients $\mu_b = 0.06$ between balls, and $\mu = 0.2$ between balls and cloth. These values are taken from reference [5].

Let us analyze first the frictionless case. The first sphere impacts sphere 2 at 0.277 s (Fig. B.16-a-b). Then, sphere 2 fully transmits its impulse to sphere 3 in only one time step. After that,

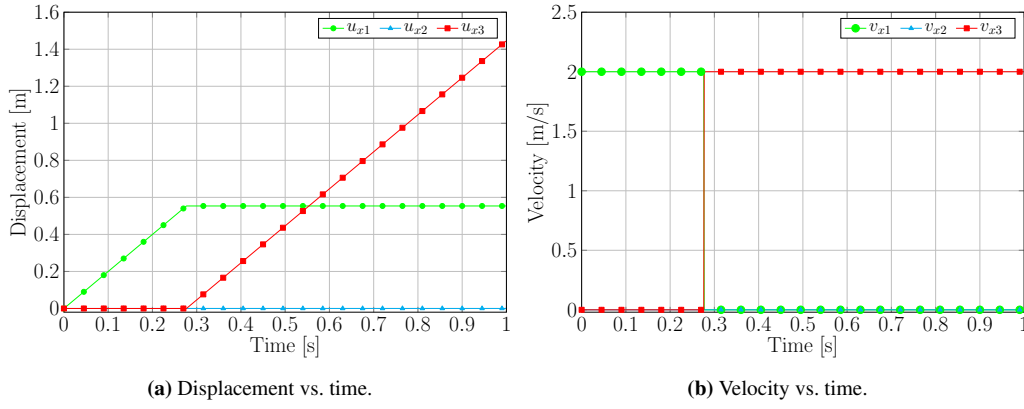


Figura B.16: Frictionless case. Displacement and velocity of the spheres.

sphere 3 gets the same velocity of sphere 1 before the impact, as Fig. B.16-b shows. Note that spheres 1 and 2 remain at rest after impact in agreement with the experimental observations. The maximum number of iterations at smooth, position and velocity levels are 1,3 and 1, while the mean number of iterations for the three sub-problems is 1.

The complexity of the problem is increased when friction is taken into account; for this reason, the global convergence rate of the contact algorithms is somehow deteriorated. The initial conditions, the masses, the dimensions and solver parameters are the same as in the case before. At the beginning of motion, the angular velocity of the sphere 1 decreases linearly in time reflecting that it is in sliding movement until time 0.284 s; then, the angular velocity becomes constant, which expresses that it changes to a pure rolling movement, see Fig. B.17-b-c. The first impact is produced at time 0.328 s, when the spheres 2 and 3 are moved forward, see Fig. B.17-a. However, the sphere 1 bounces back, see the detail of Fig. B.17-b where the velocity is negative. The detail of Fig. B.17-d shows the height of rebound of the spheres 1 and 3 after the first impact. When compared with the frictionless case, we remark that there is a delay as a consequence of friction between the sphere and the plane, as depicted in Fig. B.17-a-b-c.

After the bounce and once that sphere 1 touches the plane again, due to the rolling movement it impacts again sphere 2. Then, there is a sequence of impacts between spheres 1 and 2 that goes on with decreasing intensity and with frictional sliding in sphere 1 and pure rolling in sphere 2, see Fig. B.17-b. Finally, both spheres move forward together with a rolling movement and without impacts, see Fig. B.17-c. On the other hand, sphere 3 moves forward with sliding movement reducing the velocity until reaching pure rolling.

In this example, the maximum number of iterations at smooth, position and velocity levels are 1,4 and 2, while the mean number of iterations for the three sub-problems is 1. No line search iterations were required to achieve convergence of the Newton scheme.

Figure B.18-a shows that initially, the cue ball is in sliding movement with a reduction of

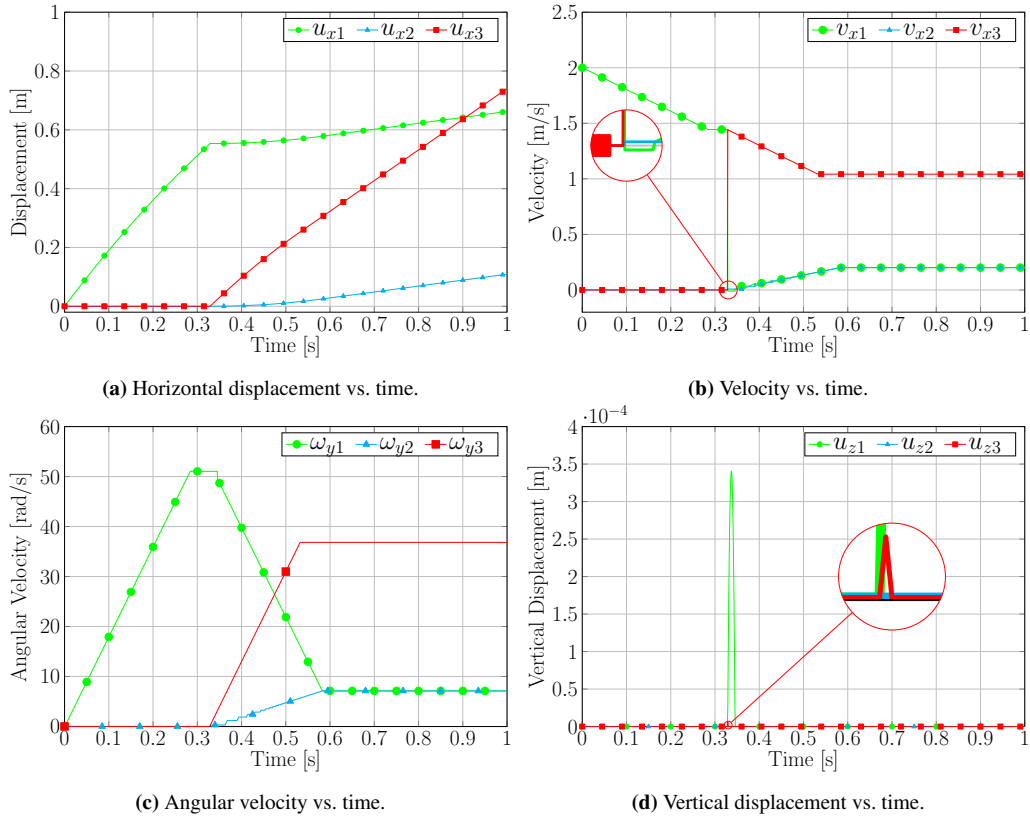


Figure B.17: Frictional case. Displacements and velocities of the spheres.

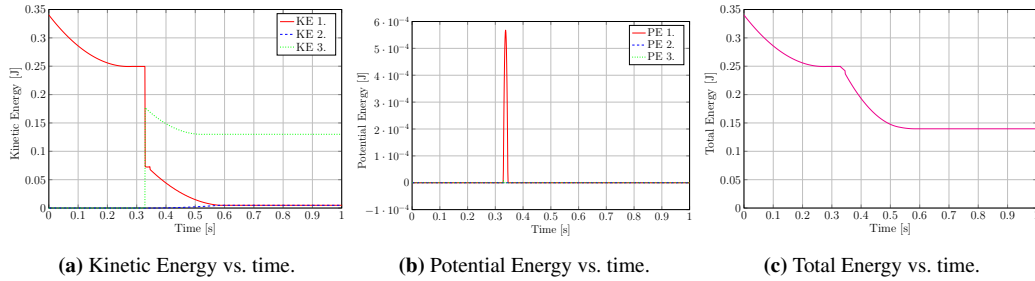


Figure B.18: Evolution of energies in time, frictional case.

kinetic energy. Subsequently, it enters in pure rolling motion conserving energy until collision with the second ball. At the moment of impact, the cue ball rebounds and separates from ground, as illustrated in Fig. B.18-b, where an increase in potential energy is observed. Most of kinetic energy is transferred to ball 3, and the balls change progressively from sliding to pure rolling motion reducing the total kinetic energy, as shown in Fig. B.18-c. Finally ball 3 moves in pure rolling movement without losing energy, while balls 1 and 2 are almost stopped.

Finally, the convergence rate as a function of the time step is given. The error was calculated with respect to a numerical solution with time step $h = 1 \times 10^{-5}$ s. Figure B.19 shows a linear convergence as expected.

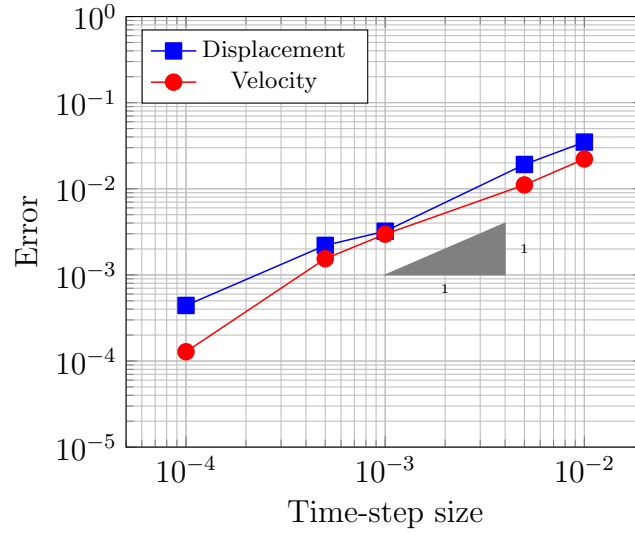


Figure B.19: Convergence analysis for the multiple impact example with friction.

Bernoulli Problem

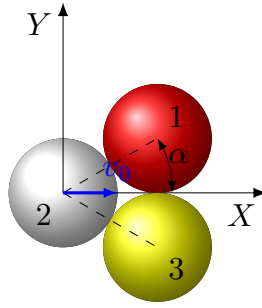


Figure B.20: The Bernoulli problem.

This example, proposed by Liu *et al.* [47], consists of a frictionless multiple impacts collision involving three rigid spheres in contact with each other at the initial configuration as shown in Figure B.20. Sphere 2 initially has a velocity of $v_0 = 1$ m/s in the X direction and zero initial angular velocity. Meanwhile, spheres 1 and 3 are at rest. The three balls have radius $r = 1$ m, mass $m = 1$ kg, and moment of inertia of 0.4 kg m^2 . The normal and tangential restitution coefficients between the spheres are $e_N = 1$ and $e_T = 0$, respectively, and between spheres and plane they are $e_N = e_T = 1$. The results are compared with the analytical solution:

$$\begin{aligned}
 v_{x1} = v_{x3} &= \frac{2v_0}{3 + \tan^2 \alpha} & v_{x2} &= v_0 - \frac{4v_0}{3 + \tan^2 \alpha} \\
 v_{y1} = -v_{y3} &= \frac{2v_0 \tan \alpha}{3 + \tan^2 \alpha} & v_{y2} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

The numerical solution was computed with a time step $h = 1 \times 10^{-2}$ s and the total time for the simulation was 0.6 s. The spectral radius of the integrator was $\rho_\infty = 0.8$. The value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. The maximum number of iterations for the smooth, position,

and velocity levels were 1, 3 and 1, and the mean number of iterations for the three sub-problems was 1. No line search iterations were required to achieve convergence of the Newton scheme.

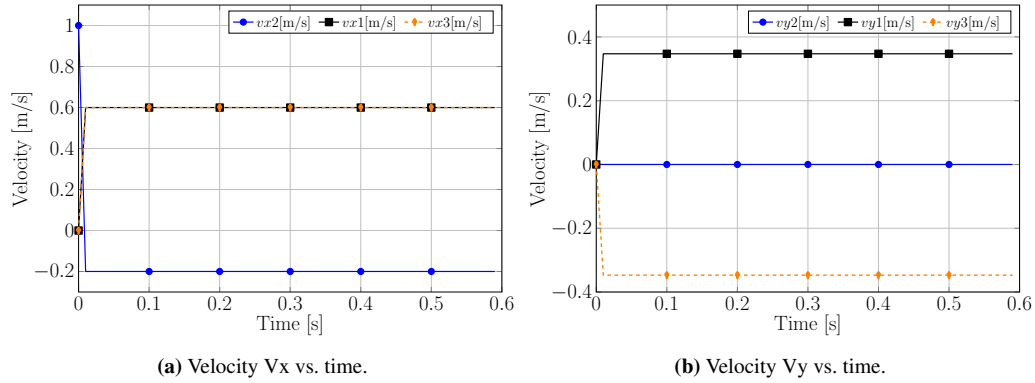


Figure B.21: Velocity of the balls.

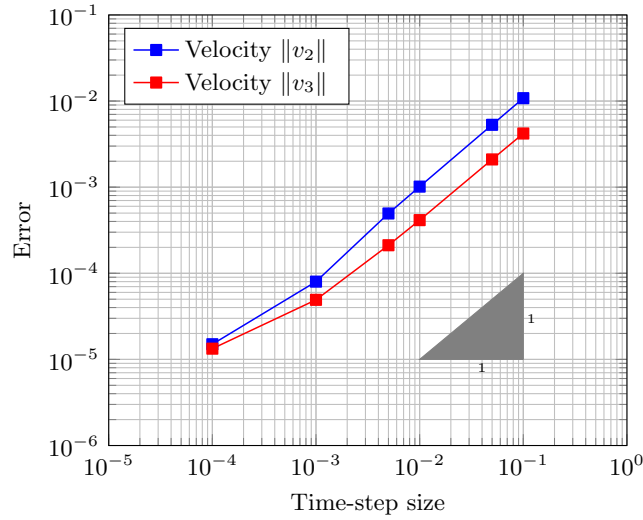


Figure B.22: Convergence analysis for the Bernoulli problem.

Figure B.21 shows the computed velocities vs. time for each ball. The values of the velocities after impact are in good agreement with those calculated by the analytical solution (B.53), which predicted $v_{x1} = v_{x3} = 0.6$ m/s, $v_{x2} = -0.2$ m/s, $v_{y1} = -v_{y3} = 0.3464$ m/s and $v_{y2} = 0$ m/s. Finally, Fig. B.22 shows the convergence rate of the velocity modulus of balls 2 and 3 compared with the analytical solutions given by Eqs. (B.53), which is linear, as expected.

Billiard balls interaction

This problem consists of a typical billiard break, see Figure B.23. It was initially presented by Gismeros *et al.* [19] in the frame of the penalty based-approach. The example allows us to study the ability of the algorithm to solve problems with multiple impacts, with the possibility to consider rolling friction effects. The results with those of reference [19], in which a penalty approach was used to model impacts, were compared.

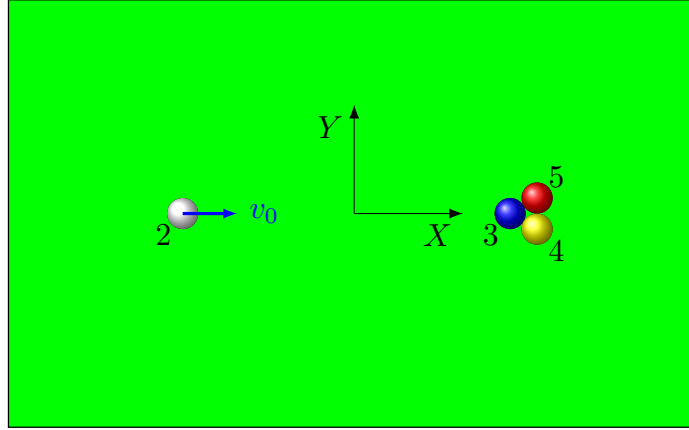


Figura B.23: Billiard break configuration.

The four balls have a radius $r = 0.028575$ m, a weight $mg = 1.666$ N and an inertia $I = 0.000055$ kg m². The table has a length of 2.54 m and a width of 1.27 m. The values of the friction coefficient μ and the normal restitution coefficient e_N are 0.2 and 0, respectively, for the contact between the balls and the table. The coefficients of friction and restitution for the contact between balls are $\mu_b = 0.06$ and $e_N = 0.93$, respectively. The contact between the balls and the edges of the table are represented with friction and restitution coefficients $\mu = 0$ and $e_N = 0.85$, respectively. The tangential restitution coefficient was set to $e_T = 0$ in all contacts. The white ball, labeled 2, starts motion with a speed of $v_x = 10.729$ m/s and hits the three balls labeled 3, 4 and 5, that are in contact between them and at rest (see Fig. B.23).

In this work two cases are analyzed: in the first one, the rolling resistance between the spheres and the plane is neglected, while in the second one a rolling resistance radius $\rho = 0.005$ m is adopted. In both cases, the total simulation time was 3 s with a time step of 1×10^{-3} s and the value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. In the first case, the cue ball starts with a velocity of 10.729 m/s and null rolling velocity, and impacts the balls at a slightly lower velocity due to the sliding friction between the ball and the plane, see Fig. B.24-a. After multiple impacts, ball 3 moves forward with a low velocity. As it can be seen, once the balls are in pure rolling, their velocity remains constant, see Fig. B.24-a. The second case is similar to the first; however, the balls reach the rest condition due to the action of the rolling resistance, see Fig. B.24-b.

This problem consists of a typical billiard break, see Figure B.23. It was initially presented by Gismeros *et al.* [19] in the frame of the penalty based-approach. The example allows us to study the ability of the algorithm to solve problems with multiple impacts, with the possibility to consider rolling friction effects. The results with those of reference [19], in which a penalty approach was used to model impacts, were compared.

The four balls have a radius $r = 0.028575$ m, a weight $mg = 1.666$ N and an inertia $I =$

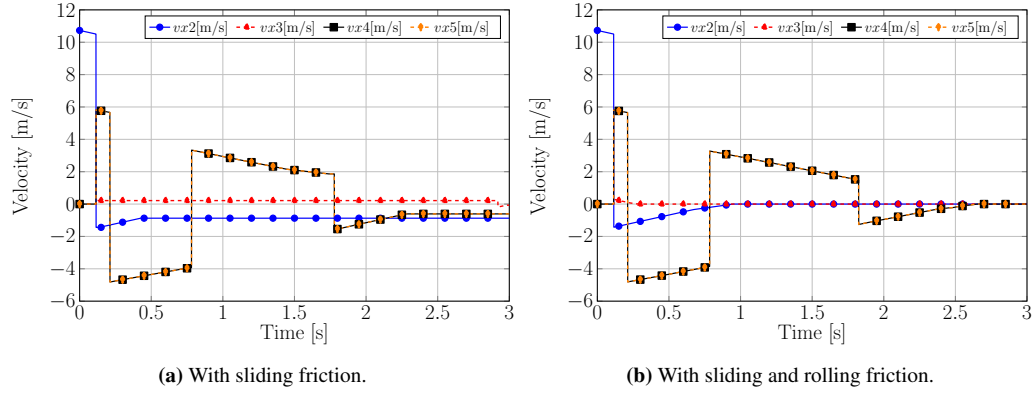


Figure B.24: Computed velocities in the billiard break problem.

0.000055 kg m². The table has a length of 2.54 m and a width of 1.27 m. The values of the friction coefficient μ and the normal restitution coefficient e_N are 0.2 and 0, respectively, for the contact between the balls and the table. The coefficients of friction and restitution for the contact between balls are $\mu_b = 0.06$ and $e_N = 0.93$, respectively. The contact between the balls and the edges of the table are represented with friction and restitution coefficients $\mu = 0$ and $e_N = 0.85$, respectively. The tangential restitution coefficient was set to $e_T = 0$ in all contacts. The white ball, labeled 2, starts motion with a speed of $v_x = 10.729$ m/s and hits the three balls labeled 3, 4 and 5, that are in contact between them and at rest (see Fig. B.23).

In this work two cases are analyzed: in the first one, the rolling resistance between the spheres and the plane is neglected, while in the second one a rolling resistance radius $\rho = 0.005$ m is adopted. In both cases, the total simulation time was 3 s with a time step of 1×10^{-3} s and the value of tolerance for convergence was $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$. In the first case, the cue ball starts with a velocity of 10.729 m/s and null rolling velocity, and impacts the balls at a slightly lower velocity due to the sliding friction between the ball and the plane, see Fig. B.24-a. After multiple impacts, ball 3 moves forward with a low velocity. As it can be seen, once the balls are in pure rolling, their velocity remains constant, see Fig. B.24-a. The second case is similar to the first; however, the balls reach the rest condition due to the action of the rolling resistance, see Fig. B.24-b.

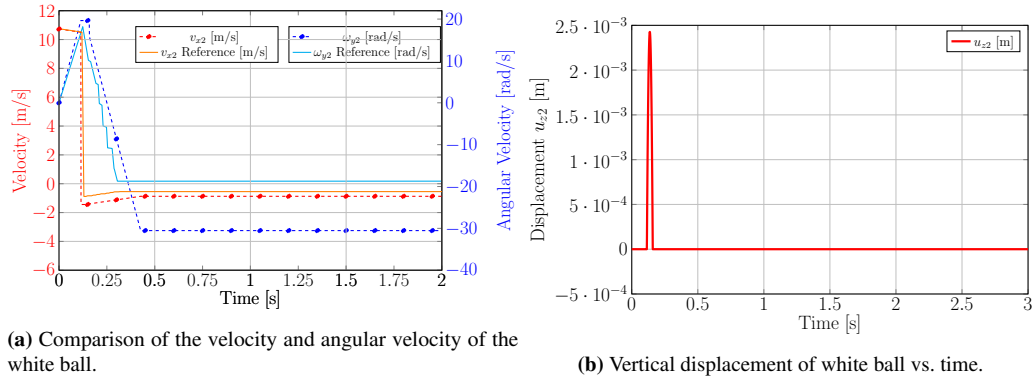
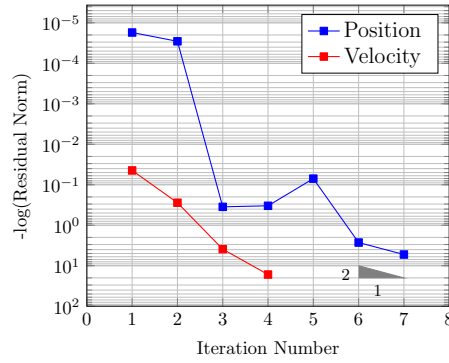


Figure B.25: Comparison with penalty-based approach in the billiard break problem.



(a) Evolution of the logarithm of the residual norm in terms of number of iterations.

Figure B.26: Logarithmic evolution of residual norm.

B.6. Conclusions

A new frictional contact element to simulate the impact between spherical rigid bodies is presented. The paper gives a detailed kinematic formulation using large rotations and absolute coordinates, with explicit expressions of internal forces and Hessians. In addition, a new methodology for handling simultaneous multiple impacts with friction effects is given. The algorithm is based on the frictionless proposal by Cosimo *et al.* [21], here modified to consider friction terms, and in which the Newton impact law is sequentially applied by assuming instantaneous local impact times. The strategy has the advantage that it does not require any intervention of the user or any topological analysis for defining the sequence for processing the multiple impacts. The studied examples demonstrate that the proposed methodology keeps a low computational cost compared with the classical smooth continuous approaches. Results were compared with results of other authors, either analytical or experimentally validated, with excellent convergence rate to the solution. This approach may also be advantageous when describing the general case of flexible multibody systems. The extension from rigid multibody dynamics to the FEM (finite element method) context can be done in a very consistent manner avoiding rewriting the equations for each particular case.

Bibliografía

- [1] V. Acary. «Higher order event capturing time-stepping schemes for nonsmooth multibody systems with unilateral constraints and impact». En: *Applied Numerical Mathematics* 62 (2012), págs. 1259-1275.
- [2] V. Acary. «Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), págs. 224-250.
- [3] V. Acary y F. Bourrier. «Coulomb friction with rolling resistance as a cone complementarity problem». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 85 (2021), pág. 104046.
- [4] P. Alart y A. Curnier. «A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92.3 (1991), págs. 353-375. ISSN: 0045-7825.
- [5] D.G. Alciatore. *The Illustrated Principles of Pool and Billiards*. First Edition. Sterling, 2017.
- [6] D.G. Alciatore. «Throw - Part II: follow and draw effects, Dr. Dave's Illustrated Principles». En: *Billiards Digest* 29.10 (2006).
- [7] D.G. Alciatore. «Throw - Part III: follow and draw effects, Dr. Dave's Illustrated Principles». En: *Billiards Digest* 29.11 (2006).
- [8] Bernard B. *Nonsmooth Mechanics*. Springer International Publishing, 2016. DOI: [10 . 1007/978-3-319-28664-8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-28664-8). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28664-8>.
- [9] A. Bosten y O. Brüls. «On the evaluation of the tangential slip increment in quasi-static beam-to-beam contact problems». En: *ECCOMAS Thematic Conference and IACM Special Interest Conference Highly Flexible Slender Structures (HFSS 2023)*. University of Rijeka. 2023, pág. 1.
- [10] A. Bowling, D. Flickinger y S. Harmeyer. «Energetically consistent simulation of simultaneous impacts and contacts in multibody systems with friction». En: *Multibody System Dynamics* 22.1 (2009), págs. 27-45.
- [11] B. Brogliato, H. Zhang y C. Liu. «Analysis of a generalized kinematic impact law for multibody-multicontact systems, with application to the planar rocking block and chains of balls». En: *Multibody System Dynamics* 27.3 (2012), págs. 351-382.
- [12] O. Brüls, V. Acary y A. Cardona. «Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized-alpha scheme». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281.0 (2014), págs. 131-161.
- [13] Olivier Brüls, Vincent Acary y Alberto Cardona. «On the Constraints Formulation in the Nonsmooth Generalized-alpha Method». En: *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Ed. por Remco Leine, Vincent Acary y Olivier Brüls. Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 335-374.

- [14] Glocker C. y Aeberhard U. «The Geometry Of Newton's Cradle». En: *Advances in Mechanics and Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, págs. 185-194. DOI: 10.1007/0-387-29195-4_16. URL: https://doi.org/10.1007/0-387-29195-4_16.
- [15] G. Capobianco et al. «A nonsmooth generalized-alpha method for mechanical systems with frictional contact». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122.22 (2021), págs. 6497-6526.
- [16] A. Cardona, I. Klapka y M. Geradin. «Design of a New Finite Element Programming Environment». En: *Engineering Computations* 11 (1994), págs. 365-381.
- [17] R Carretero-González et al. «Dissipative solitary waves in granular crystals». En: *Physical review letters* 102.2 (2009), pág. 024102.
- [18] Q. Chen et al. «A nonsmooth generalized-alpha scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), págs. 487-511.
- [19] E. Corral et al. «Dynamic Modeling and Analysis of Pool Balls Interaction». En: *Proceedings of the 9th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*. Ed. por A. Kecskeméthy y Flores Geu. Vol. 53. Berlin: Springer, 2020, págs. 201-216.
- [20] A. Cosimo et al. «A robust nonsmooth generalized- α scheme for flexible systems with impacts». En: *Multibody System Dynamics* 48.2 (2020), págs. 127-149.
- [21] A. Cósimo et al. «On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems». En: *Nonlinear Dynamics* 102.4 (2020), págs. 1997-2016.
- [22] Y. Cuneyt, M. Gharib e Y. Hurmuzlu. «Solving frictionless rocking block problems with multiple impacts». En: *Proceeding of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 465 (2009), págs. 3323-3339.
- [23] G. Darboux. «Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps». fre. En: *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* 4.1 (1880), págs. 126-160. URL: <http://eudml.org/doc/85056>.
- [24] G. De Saxcé y Z.Q. Feng. «New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach». En: *Mechanics of Structures and Machines* 19.3 (1991), págs. 301-325.
- [25] Géry De Saxcé y Z-Q Feng. «The bipotential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms». En: *Mathematical and computer modelling* 28.4-8 (1998), págs. 225-245.
- [26] Pfeiffer F. y Glocker C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley-VCH Verlag GmbH, ago. de 1996. DOI: 10.1002/9783527618385. URL: <https://doi.org/10.1002/9783527618385>.
- [27] D.M. Flickinger y A. Bowling. «Simultaneous oblique impacts and contacts in multibody systems with friction». En: *Multibody System Dynamics* 23 (2010), págs. 249-261.
- [28] P. Flores et al. «On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 25.3 (2011), págs. 357-375.
- [29] M. Frémond. «Rigid bodies collisions». En: *Physics Letters A* 204.1 (1995), págs. 33-41. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00418-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00418-3). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960195004183>.
- [30] J. Galvez et al. «A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121.16 (2020), págs. 3584-3609.

- [31] M. Géradin y A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*. Wiley, 2001. ISBN: 0471489905.
- [32] M. Gharib, A. Celik e Y. Hurmuzlu. «Shock absorption using linear particle chains with multiple impacts». En: *ASME Journal of Applied Mechanics* 78.031005 (2011).
- [33] C. Glocker. «An Introduction to Impacts». En: *Nonsmooth Mechanics of Solids*. Ed. por J. Haslinger y G.E. Stavroulakis. Vienna: Springer Vienna, 2006, p  gs. 45-101.
- [34] C. Glocker. «Energetic consistency conditions for standard impacts». En: *Multibody System Dynamics* 29.1 (2013), p  gs. 77-117.
- [35] C. Glocker y F. Pfeiffer. «Multiple impacts with friction in rigid multibody systems». En: *Nonlinear Dyn.* 7.4 (1995), p  gs. 471-497.
- [36] G. Hu et al. «On the determination of the damping coefficient of non-linear spring-dashpot system to model Hertz contact for simulation by discrete element method». En: *Journal of Computers* 6 (5 2011), p  gs. 984-988.
- [37] J. Huang, da Silva M. V. y K. Krabbenhoft. «Three-dimensional granular contact dynamics with rolling resistance». En: *Computers and Geotechnics* 49 (2013), p  gs. 289-298.
- [38] K.H. Hunt y F.R.E. Crossley. «Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact». En: *J. Appl. Mech* 42.2 (1975), p  gs. 440-445.
- [39] an I. y Gilmore B. J. «Multi-Body Impact Motion with Friction—Analysis, Simulation, and Experimental Validation». En: *Journal of Mechanical Design* 115.3 (1993), p  g. 412. DOI: 10.1115/1.2919206. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2919206>.
- [40] B. Jewett. *Seeking truth of beliefs*. Inf. t  c. Tech Talk, Billiards Digest, 1995.
- [41] Stéphane Job et al. «How Hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1D granular medium». En: *Physical review letters* 94.17 (2005), p  g. 178002.
- [42] H.M. Lankarani y P.E. Nikravesh. «A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems». En: *Journal of Mechanical Design* 112.3 (1990), p  gs. 369-376.
- [43] R.I. Leine y C. Glocker. «A set-valued force law for spatial Coulomb–Contensou friction». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22.2 (2003), p  gs. 193-216.
- [44] R.I. Leine y N van de Wouw, eds. *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [45] R.I. Leine y N. van de Wouw. «Stability properties of equilibrium sets of non-linear mechanical systems with dry friction and impact». En: *Nonlinear Dynamics* 51.4 (2008), p  gs. 551-583.
- [46] C. Liu, Z. Zhao y B. Brogliato. «Frictionless multiple impacts in multibody systems. I. Theoretical framework». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 464.2100 (dic. de 2008), p  gs. 3193-3211. DOI: 10.1098/rspa.2008.0078. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0078>.
- [47] C. Liu, Z. Zhao y B. Brogliato. «Frictionless multiple impacts in multibody systems. II. Numerical algorithm and simulation results». En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 465.2101 (ene. de 2009), p  gs. 1-23. DOI: 10.1098/rspa.2008.0079. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0079>.
- [48] J. J. Moreau. «Some numerical methods in multibody dynamics: application to granular materials». En: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 13.4-suppl (1994), p  gs. 93-114.
- [49] J.-J. Moreau. «Bounded variation in time». En: *Topics in Nonsmooth Mechanics* (1988), p  gs. 1-74.

- [50] J.J. Moreau. «Numerical aspects of the sweeping process». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3-4 (jul. de 1999), págs. 329-349. DOI: [10.1016/S0045-7825\(98\)00387-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00387-9). URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00387-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00387-9).
- [51] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Reg. Soc. Phreases, 1686.
- [52] N. S. Nguyen y B. Brogliato. *Multiple impacts in dissipative granular chains*. Vol. 72. Springer Science & Business Media, 2013.
- [53] F. Pfeiffer. «Energy considerations for frictional impacts». En: *Archive of Applied Mechanics* 80.1 (2010), págs. 47-56.
- [54] F. Pfeiffer. «Multibody systems with unilateral constraints». En: *J. Appl. Maths. Mechs.* 65.4 (2001), págs. 665-670.
- [55] S.D. Poisson. *Traité de Mécanique*. Second Edition. Bachelier, 1833.
- [56] M. Rodrigues da Silva et al. «A compendium of contact force models inspired by Hunt and Crossley's cornerstone work». En: *Mechanism and Machine Theory* 167 (2022), pág. 104501.
- [57] E. Sánchez et al. «Non-smooth numerical solution for Coulomb friction and sliding, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 59.1 (2023), págs. 69-103.
- [58] T. Schindler y V. Acary. «Timestepping schemes for nonsmooth dynamics based on discontinuous Galerkin methods: definition and outlook». En: *Mathematics and Computers in Simulation* 95 (2014), págs. 180-199.
- [59] D.E. Stewart y J.C. Trinkle. «An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction». En: *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 39.15 (1996), págs. 2673-2691.
- [60] C. Studer. *Numerics of Unilateral Contacts and Friction: Modeling and Numerical Time Integration in Non-smooth Dynamics. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Vol. 47. Springer, 2009.
- [61] A. Tasora y M. Anitescu. «A complementarity-based rolling friction model for rigid contacts». En: *Procedia Engineering* 48.7 (2013), págs. 1643-1659.
- [62] R.E. Wallace y M.C. Schroeder. «Analysis of billiard ball collisions in two dimensions». En: *American Journal of Physics* 56.9 (1988).
- [63] A. S. Yigit y R. Ulsoy A. G. and Scott. «Spring-dashpot models for the dynamics of a radially rotating beam with impact». En: *Journal of sound and Vibration* 142.3 (1990), págs. 515-525.
- [64] H. Zhang, B. Brogliato y C. Liu. «Dynamics of planar rocking-blocks with Coulomb friction and unilateral constraints: Comparisons between experimental and numerical data». En: *Multibody System Dynamics* (2013). DOI: [doi:10.1007/s11044-013-9356-9](https://doi.org/10.1007/s11044-013-9356-9).
- [65] H. Zhang, B. Brogliato y C. Liu. «Study of the planar rocking-block dynamics with Coulomb friction: Critical kinetic angles». En: *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 8.3 (2013), pág. 021002.
- [66] J. Zhang et al. «A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics». En: *Mechanism and Machine Theory* 153 (2020), pág. 103946.
- [67] P. Zhao et al. «A spring-damping contact force model considering normal friction for impact analysis». En: *Nonlinear Dynamics* 105 (2021), págs. 1437-1457.

Anexo C

Contact force multiscale calculation in the framework of the non-smooth dynamic approach

Federico J. Cavalieri¹ Eliana Sánchez¹, Alberto Cardona¹,

¹ Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), UNL-CONICET, Predio CONICET Santa Fe "Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. Nro 168, Km 0, Paraje El Pozo, Santa Fe, Argentina

Abstract

Smooth contact models derived from the Hertz theory are widely used in structural dynamics analysis to calculate variable-in-time forces, stresses, and deformations. However, these models require very small time steps during the period in which bodies are in contact to integrate the equations of motion, yielding in a highly time-consuming numerical solution. Furthermore, penetration between bodies is unavoidable. On the other hand, non-smooth techniques use an impact law to calculate the impulses. They arrive to a scheme with a constant time step resulting in very efficient calculations. However, these techniques do not provide a straightforward approach to calculate the variable in time contact forces that are needed to verify or design the structural components. In this work, a new methodology of calculation of impact forces that combines the impulse values obtained from non-smooth algorithms together with a local contact force law derived from continuous force models is presented. Thus, the computational time required to calculate the contact forces is reduced significantly. Several numerical examples are presented to show the robustness and performance of the proposed methodology.

C.1. Introduction

A multibody mechanical system is composed of interconnected links whose purpose is to transform motion or force into a desired set of outputs such as forces, large displacements, finite

rotations, velocities, or accelerations [30]. The links are connected by force elements or kinematic pairs represented by a set of mathematical constraints that restrict the relative motion of the bodies while at the same time external forces are acting on the system. These forces can be of different origin: gravitational field, state-dependent forces, inertia forces and/or contacts/impacts between two or more bodies. Internal impact in joints of a mechanism occurs as a consequence of clearances by misalignment or assembly errors. If the mechanism is subjected to a high frequency of operation, these defects can lead to repetitive and intensive impacts between components, resulting in fatigue or wear effects that can limit the operation of the system yielding component breakage or any other issues that could completely halt the mechanism. Furthermore, external impacts are produced when two bodies of a mechanism collide, for example, the grasping of robot manipulators or the electric contactors of a circuit breaker. Although real bodies suffer deformation, they can be considered as rigid in a multibody analysis to allow an easier mathematical formulation compared to considering flexibility. Usually, bodies are assumed rigid if the deformation is small enough so that it does not significantly affect the overall kinematics of the system. In contrast, bodies are considered flexible when deformations influence the motion kinematics.

Collisions between bodies involve a highly complex energy transfer process [66, 73, 20, 65]. An impact event has the four following characteristics: i) very short duration, ii) significant contact forces, iii) high acceleration and deceleration, and iv) fast energy dissipation. Then, roughly speaking, there are two main approaches to model an impact process, which differ between them in the way they take into account these features: the instantaneous impact approach and the finite duration impact approach. The first approach assumes that the impact event is instantaneous, i.e. the collision duration and the deformation of the bodies involved in the impact process are neglected. The *non-smooth* method, *piecewise* methods, *rigid* approaches and *momentum based* methods [6, 3] are all based on these hypotheses. The information of the dynamic analysis before and after the impact is provided by the multibody model, but the velocity changes and the energy loss during impact are described by a separate model (an impact law) with a single phenomenological parameter known as the coefficient of restitution, which can be determined by experiments [56].

There are two classical models used in the context of instantaneous impact assumption. The first one is the Poisson's impact law [51], which assumes that the impact process can be divided into a compression and an expansion phases, with impulsive forces before and after impact related by the coefficient of restitution [28]. The second model is the Newton's impact law [47], which relates the pre-impact and post-impact velocities by a coefficient of restitution (which is different from that used in Poisson's impact law). In both cases, the Poisson and the Newton models, a hypothesis of conservation of momentum is made.

Usually, the restitution coefficient is assumed to be constant during the impact process; however, studies at reduced scales indicate that it depends on the geometry of the contact surfaces, the pre-impact velocity, the local material, the temperature, and the friction, among other effects [40]. Despite these considerations, numerical simulations using a constant value of the coefficient of restitution yield acceptable solutions, matching experiments. The normal restitution coefficient is equal to 1 for fully elastic impacts and 0 for perfectly plastic impacts, introducing energy dissipation during impact [5, 24]. Another approach to consider the energy dissipation consists into assuming viscoelastic material properties, which depend on parameters such as the viscosity and the relaxation time [20, 21]. Restitution models based on Newton's or Poisson's laws are widely used. However, other models have been proposed in the literature [27]. For example, the Thornton's model [62] which, unlike the Newton and Poisson models, divides the impact phase into three stages. The first one is related to an elastic period, the second one reaches the yield limit, and the last stage corresponds to the unloading and separation phase.

The second approach for modelling the impact process, i.e. the finite duration approach, considers local flexibility at the contact zones of the bodies and assumes that the contact forces are a continuous function of the penetration displacement and its time derivative. These models are also known as *penalty*, *compliant* or *regularised* models. The earliest proposed model was derived from the Hertz contact theory [32], and it assumes that the contact force is a continuous function that depends linearly on the penetration depth. This model is purely elastic and is equivalent to introduce a simple non-linear spring element which represents the stiffness of the contact surfaces of the two bodies in contact. A more complete model is needed to consider the dissipated energy during impact. One option known as the Kelvin-Voigt model [29], consists of replacing the spring by a spring-damper element instead. More sophisticated models based on Hertz's and Kelvin-Voigt's theories have been proposed in the literature. In most of them, the contact force consists of an elastic force which is a non-linear function of the penetration depth, together with another force which depends on the indentation and the rate of deformation. These forces try to impede the penetration between the contacting bodies, avoiding the definition of the unilateral constraints required by the non-smooth methods.

One of the most popular continuous contact models was proposed by Hunt and Crossley [36]. This model depends on the geometry, the material and the kinematic properties of the contacting bodies. The drawback of this proposal is that, for high impact velocities, the values of the restitution coefficients at post-impact differ from the pre-impact ones [52]. Nevertheless, the significance of the Hunt and Crossley model lies in providing the foundations for more accurate models in later proposals. A comprehensive description of models derived from Hunt and Crossley's, with strengths

and weaknesses of each model, is given in [57]. In these models, the penetration displacement and its time derivative are the only variables in the formulation; then, the contact activation can be handled from the contact kinematics and the system configuration. For this reason, the computational implementation into a nonlinear finite element code can be relatively easily performed. However, the main disadvantage of continuous models is that they introduce a term into the energy functional which adds a large fictitious energy in terms of the violation of constraints. Penetration between contacting bodies is unavoidable, and in order to decrease this penetration, a high spring stiffness becomes necessary. Also, when dynamic effects are taken into account, obtaining accurate solutions at the proper initial time instant requires very small time steps in the time integration algorithms, leading to a significant increase in computational cost. Large values of contact stiffness introduce spurious high frequencies and numerical difficulties due to ill-conditioned system matrices. Also, to obtain acceptable solutions, the method requires the proper detection of the initial time instant of impact [22]. Several works can be found in the literature in which these approaches are utilised to solve problems involving granular media; they are referred to as the Discrete Element Method (DEM) [11, 19] or the Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) methods. We note that another alternative to simulate efficiently very large number of particles with contact and friction is the Differential Variational Inequality (DVI) technique which can be classified into the non-smooth type methods [48, 58, 59, 61, 60].

In the non-smooth approach, the required time step is usually large compared to that required in the continuous approach, resulting in a more efficient algorithm in terms of computational cost, even when multiple impacts occur [1, 18].

One drawback of this approach is that, because of the rigid bodies assumption, it does not allow for the calculation of the contact forces or the impact duration. This is a remarkable issue, since the contact force values resulting from impact are needed for verifying structurally the mechanical components of a mechanism. For example, fatigue or wear damage between the balls and the race of a ball bearing is influenced by factors such as the magnitude and the frequency of the contact forces, among others.

In this work we propose a novel methodology to calculate the contact forces during the impact between two bodies in the framework of non-smooth methods. The bodies in contact can be the links of a complex mechanism composed with another (rigid or flexible) components. We remark that we are not proposing a new constitutive model to calculate the contact forces. Here, the developed methodology, combines the algorithmic efficiency of non-smooth methods with the physical parameters of smooth methods. It is new and useful for expanding the potential of non-smooth methods in engineering applications. The proposal that we present assumes a constant

restitution coefficient. Nevertheless, this assumption can be easily modified to consider a variable coefficient of restitution without loss of generality, e.g. by taking into account the computed pre-impact velocity at each time step to calculate the coefficient of restitution in the impact law.

The approach is developed to be consistently implemented with the non-smooth generalised- α time integrator scheme [17, 55] and involves two main steps. First, the impulse history is obtained from the non-smooth time integrator. Then, the contact force is calculated using a continuous contact model with assumed time variation of the interpenetration velocity. Therefore, the kinematic and the dynamic variables are provided by the non-smooth methodology which allows large time steps compared to continuous methods avoiding penetration of the bodies, while the contact forces are determined by the well-known continuous contact model, in a multiscale approach.

This work is organized as follows. Section C.2 reviews briefly the theory on continuous impact models. Section C.3 gives an overview of the decoupled version of the non-smooth generalised- α time integrator. Sections C.4 and C.5 give the main novelty of this work. In it, we develop the algorithms to calculate the contact force combining the non-smooth and the smooth methodologies. Section C.6 presents numerical examples which demonstrate the efficiency of the proposed algorithm. Final conclusions are drawn in Section C.7.

C.2. Continuous contact force models

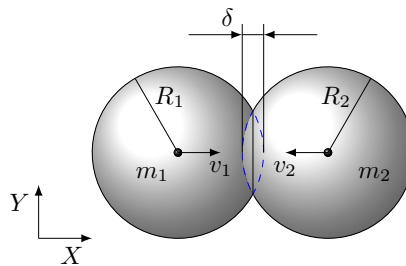
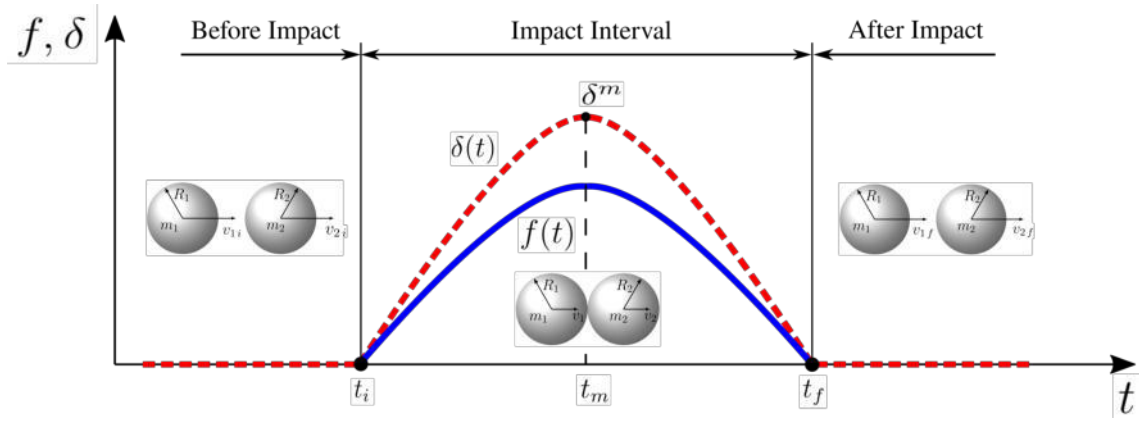
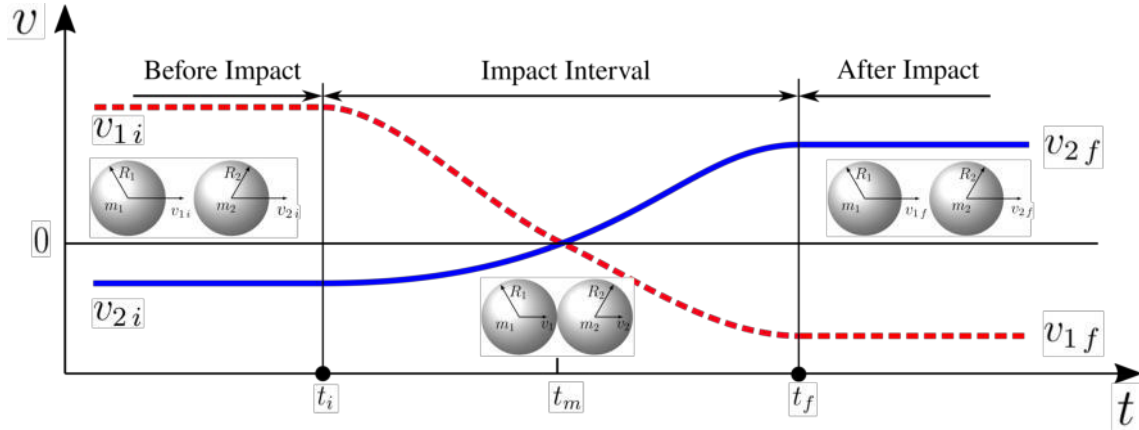


Figura C.1: Elastic collision of two hard deformable spheres.

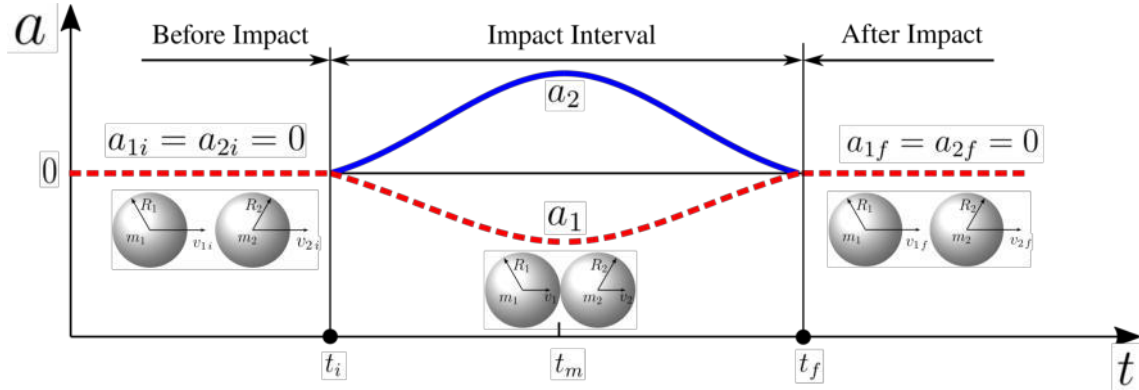
When two bodies collide, e.g. two spheres with masses m_1 and m_2 and radius R_1 and R_2 , respectively, see Fig. C.1, the deformation δ at the zone of contact (also called relative interpenetration when dealing with rigid bodies) produces a contact force. In order to calculate the magnitude of this force, the contact deformation has to be evaluated by using an appropriate measure and a constitutive law that relates the contact force to the deformation measure. The interval of deformation of the bodies is defined from an initial time t_i to a final time t_f , see Fig. C.2-a. The experimental observations indicate that the deformation between t_i and t_f is divided into a compression phase followed by a restitution phase.



(a) Deformation and contact force evolution of the spheres before, during and after impact.



(b) Velocity evolution of the spheres before, during and after impact.



(c) Acceleration evolution of the spheres before, during and after impact.

Figura C.2: Impact process between two solid spheres.

To simplify the explanation of the impact process, let us assume that the spheres 1 and 2 move freely along direction X with a constant pre-impact velocity v_{1i} and v_{2i} , respectively (Fig. C.2-b). As a result, the spheres arrive to collision with zero acceleration at time t_i , Fig. C.2-c. After impact, the spheres separate with post-impact velocities v_{1f} and v_{2f} which are usually lower than v_{1i} and v_{2i} , respectively, as a consequence of the energy dissipation. During the compression phase, the relative interpenetration increases from zero at t_i until it reaches a maximum value δ_m at t_m as Fig. C.2-a shows. Immediately after t_m , the restitution phase begins and continues until the two spheres

separate at t_f . During this interval, the contact force (and deformation) gradually decreases from time t_m and vanishes at time t_f . Once the spheres are separated, $t \geq t_f$, they continue motion with constant velocity and zero acceleration as Figs. C.2-b-c show.

In order to perform the analysis, a constitutive law that links the deformation and the contact force is required. The first and simplest model to calculate the contact force was proposed by Hooke in 1661 [33] which is defined as follows

$$F_N(t) = K\delta(t) \quad (\text{C.1})$$

Equation (C.1) represents an equivalent linear spring element, where K is a stiffness coefficient that can be obtained either analytically, by finite element simulations or by experimental tests [67]. Then, $F_N(t)$ is the normal contact force oriented along the common normal to both contact surfaces at the contact point. The assumption of a linear relationship between the normal force and the interpenetration is a rough approximation since the material, the surface or the shape of the contacting bodies are the governing variables in a contact problem. Additionally, the Hooke contact force model is limited to slow impact velocities and does not considered the energy dissipation during the impact process. To overcome these drawbacks of the Hooke model, Hertz [32] proposed a more accurate model based on the classical elasticity theory:

$$F_N(t) = K\delta(t)^n \quad (\text{C.2})$$

where the parameter K represents the generalised contact stiffness which depends on the material properties and on the geometry of the bodies; and the exponent n depends on the contact surface geometry. Note that the contact force is normal to the contact surfaces because friction was neglected. The value of K can be obtained as in the Hooke model, it is, either analytically, by finite element simulations or by experimental tests. In the particular case of two colliding spheres, the direction of F_N is given by a line that links the centres of the spheres; the exponent n equals 1.5; and the parameter K obtained from the elasticity theory is next given,

$$K = \frac{4}{3(\sigma_1 + \sigma_2)} \left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right]^{1/2} \quad (\text{C.3})$$

where the material parameters σ_1 and σ_2 are given by

$$\sigma_r = \frac{1 - \nu_r^2}{E_r} \quad r = 1, 2 \quad (\text{C.4})$$

with ν_r the Poisson's ratio and E_r the Young's modulus associated with sphere r .

Equation (C.2) does not take into account the energy dissipation during the impact event. Thus, the application of this model is restricted to cases when the impact velocities are low, with perfectly

elastic bodies and friction-less contact.

The Kelvin-Voigt model was proposed to overcome the limitation of the energy dissipation of the Hertz model by using a linear spring and a linear damper arranged in a parallel configuration [29]. In this model, the contact force is given by the following equation,

$$F_N(t) = K\delta(t) + D\dot{\delta}(t) \quad (\text{C.5})$$

where $\dot{\delta}(t)$ is the relative interpenetration velocity. The main problem of this model is that it does not consider the non-linearity of the contact process; besides, a non-physical discontinuity of the contact force in time is produced. Indeed, at the beginning of the impact process, the force component associated with the spring is null as a consequence of the null interpenetration; however, the force associated with the damper is non-zero, thus this model does not represent the physical behaviour that is depicted schematically in Fig. C.2. In addition, when the impact phase finishes, the contact force is negative, something that is non physical.

A more accurate model was presented by Hunt and Crossley [36], in which the contact force is calculated as in the Hertz theory by a non-linear function of the indentation together with a non-linear viscous component, yielding

$$F_N(t) = K\delta(t)^n + D\delta(t)^n\dot{\delta}(t) \quad (\text{C.6})$$

where the parameter D is the hysteresis damping factor defined as

$$D = \frac{3K}{2\dot{\delta}_i}(1 - e_N) \quad (\text{C.7})$$

Here, $\dot{\delta}_i$ is the initial relative interpenetration velocity calculated using the pre-impact velocities: $\dot{\delta}_i = v_{1i} - v_{2i}$, and e_N is the normal coefficient of restitution given by

$$e_N = -\frac{\dot{\delta}_f}{\dot{\delta}_i} \quad (\text{C.8})$$

where $\dot{\delta}_f = v_{1f} - v_{2f}$ is the final post-impact interpenetration velocity. The values of the coefficient of restitution e_N vary between 0 and 1. When the impact is fully elastic $e_N = 1$, while for a fully plastic impact $e_N = 0$. The final expression for the contact force model is written as

$$F_N(t) = K\delta(t)^n \left[1 + \frac{3(1 - e_N)}{2\dot{\delta}_i}\dot{\delta}(t) \right] \quad (\text{C.9})$$

The Hunt and Crossley model [36] is physically consistent and became popular for its simple and straightforward implementation. Equation (C.9) gives acceptable solutions when the amount of dissipated energy during contact is small compared to the maximum elastic energy. In other words, this equation is valid for a coefficient of restitution close to one. This model was presented in 1975

and has served as an inspiration for a large number of improved continuous contact force models. The constitutive laws derived from the Hunt and Crossley models were validated experimentally for spheres and plates geometries in several research works [71, 72, 64, 31].

The main difference between the alternatives of Hunt and Crossley of the is the way of computing the hysteresis damping factor D . Corral *et al* [15] classified the hysteresis damping models D in five main categories: (i) hysteresis damping models obtained from experimental tests [7, 4]; (ii) models calculated by a non linear function that relates D to the physical parameters of the system [44, 41, 70]; (iii) D based on a simple assumption which yields an explicit expression of the hysteresis factors [42, 63, 8, 74, 38, 37]; (iv) models that consider an expression that relates the indentation and the time derivative of the indentation providing an explicit expression of the coefficient of restitution and of the hysteresis damping factor [69, 72, 54]; (v) finally, the fifth category groups models that cannot be classified into the previous categories [53, 68, 39]. Complete reviews with applications can be found in the papers by Rodrigues da Silva *et al* [52], Corral *et al* [15] and Flores *et al* [23]. For example, Table C.1 presents several proposals of the literature.

Table C.1: Different hysteresis damping factor models.

Model	Authors	D
1	Hunt and Crossley (1975) [36]	$\frac{3(1-e_N)}{2} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
2	Lankarani and Nikravesh (1990) [42]	$\frac{3(1-e_N^2)}{4} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
3	Hu <i>et al</i> (2011) [34]	$-\frac{6.66264 \log(e_N)}{3.85238 + \log(e_N)} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
4	Flores <i>et al</i> (2011) [25]	$\frac{8(1-e_N)}{5e_N} \frac{K}{\dot{\delta}_i}$
5	Zhang <i>et al</i> (2020) [72]	$\frac{3(1-e_N)(K/\dot{\delta}_i)}{2e_N(0.6181e^{-3.52e_N} + 0.899e^{0.09025e_N})}$

C.3. Non-smooth generalised- α time integration scheme

Non-smooth dynamics is characterised by the presence of discrete jumps in the velocity field at the impact instants. The foundations of the formulation of non-smooth dynamics were established by Moreau several decades ago [46]. His initial proposal, known as the Moreau method, provides a theoretical framework for analysing systems that experience abrupt changes in their kinematic variables. Over the years, various authors have continued to expand Moreau's initial proposal by introducing variants and refinements. These extensions have allowed the application of non-smooth dynamics to a wide range of engineering problems [50, 49, 2].

Recently, Brls *et al* [9, 10] developed the so-called non-smooth generalised- α time integration scheme which is based on solving three coupled subproblems: the smooth prediction of the motion and two other problems that correct the position and velocities predictions of the smooth contributions to account for impacts. The scheme overcomes the limitations encountered

in traditional Moreau-type time-stepping approaches. The scheme solves the equations of motion of a multibody system with unilateral and bilateral constraints which are verified exactly. Then, Cosimo *et al* [17] introduced a modification to this algorithm, developing a fully decoupled version of the original integrator scheme of Br uls *et al* [9], solving each sub-problem in sequence at each time step. These techniques can be seen either as Newton semi-smooth iterations or as active set methods. The solver has been successfully used in various applications involving frictional forces, as shown in [26, 16, 55].

In this work, the nonsmooth generalized α scheme is used to integrate the equations of motion for its demonstrated robustness and accuracy in problems involving nonlinear bilateral constraints and/or flexible elements with a relatively large time stepsize [17]. However, any other nonsmooth integrator that gives the impulse and the velocity jump at the instant of impact could have been used. The main aspects of the formulation of the decoupled version of the non-smooth generalised- α scheme are next given, omitting details for conciseness. Only the governing equations and minor comments about the integrator are presented.

After spatial discretization, the equations of motion for a multibody system with unilateral and bilateral constraints can be written in the following form:

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{v}^+ \quad (\text{C.10a})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \, d\mathbf{v} - \mathbf{g}_q^T \, d\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \, dt \quad (\text{C.10b})$$

$$\mathbf{g}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.10c})$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}^{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) \perp d\mathbf{i}^{\mathcal{U}} \geq \mathbf{0} \quad (\text{C.10d})$$

where

- $\mathbf{q}$ is the vector of nodal coordinates;
- $\dot{\mathbf{q}}^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} \dot{\mathbf{q}}(\tau)$ and $\mathbf{v}^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} \mathbf{v}(\tau)$ are the right limits of the velocity, which are functions of bounded variations;
- $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{f}^{ext}(t) - \mathbf{f}^{damp}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q})$ collects the external, damping and internal forces;
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ is the mass matrix which may, in general, depend on the coordinates;
- $d\mathbf{v}$ is the differential measure associated with the velocity $\mathbf{v}$ assumed to be of bounded variation;
- t is time, and dt is the corresponding standard Lebesgue measure;
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ is the combined set of bilateral and unilateral constraints, and $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ is the corresponding matrix of constraint gradients;

- $d\mathbf{i}$ is the impulse measure of the contact reaction and the bilateral force;
- $\mathcal{U}$ denotes the set of indices of the unilateral constraints, $\overline{\mathcal{U}}$ is its complementary set, i.e., the set of bilateral constraints, $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \overline{\mathcal{U}}$ is the full set of constraints, where

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{\mathcal{U}} \\ \mathbf{g}^{\overline{\mathcal{U}}} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{i} = \begin{bmatrix} d\mathbf{i}^{\mathcal{U}} \\ d\mathbf{i}^{\overline{\mathcal{U}}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

For the sake of notation simplicity, the convention $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^+(t)$ and $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}^+(t)$ shall be used in the remaining part of the paper. Since the motion might be non-smooth, velocity jumps and impacts are expected yielding the following decomposition of the measures, neglecting singular measures:

$$d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} dt + \sum_i (\mathbf{v}(t_i) - \mathbf{v}^-(t_i)) \delta_{t_i} \quad (\text{C.12})$$

$$d\mathbf{i} = \boldsymbol{\lambda} dt + \sum_i \mathbf{p}_i \delta_{t_i} \quad (\text{C.13})$$

where $\boldsymbol{\lambda}$ is the vector of smooth Lagrange multipliers associated with the Lebesgue measurable constraint forces; $\mathbf{v}^-(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau < t} \mathbf{v}(\tau)$; $\mathbf{v}(t_i) - \mathbf{v}^-(t_i)$ is the jump in velocity at the instant t_i , δ_{t_i} the Dirac delta supported at t_i , and $\mathbf{p}_i$ is the impulse producing the jump at the instant t_i . The splitting of the variables isolates the impulsive terms from the smooth contributions to the motion. Considering a time interval $(t_n, t_{n+1}]$ the measure of the velocity $d\mathbf{v}$ is decomposed as

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{w} + \check{\mathbf{v}} dt \quad (\text{C.14})$$

where $\check{\mathbf{v}} dt$ is a purely diffusive measure and $d\mathbf{w}$ is the non-smooth impulsive contribution to the motion. Time integration of the velocity measure $d\mathbf{v}$ over the time interval $(t_n, t]$ gives

$$\mathbf{v}(t) = \int_{(t_n, t]} d\mathbf{w} + \check{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{W}(t_n, t) + \check{\mathbf{v}}(t) \quad (\text{C.15})$$

where variable $\mathbf{W}(t_n, t)$ captures all velocity jumps taking place in the interval $(t_n, t]$.

The general form of the integrator for a multibody system with unilateral and bilateral constraints is written as follows,

$$M(\check{\mathbf{q}}_{n+1})\check{\mathbf{v}}_{n+1} - \mathbf{f}(\check{\mathbf{q}}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}, n+1}^{\overline{\mathcal{U}}, T} \left(k_s \check{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\overline{\mathcal{U}}} - p_s \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}, n+1}^{\overline{\mathcal{U}}} \check{\mathbf{v}}_{n+1} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{C.16a})$$

$$-k_s \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}, n+1}^{\overline{\mathcal{U}}} \check{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (\text{C.16b})$$

$$M(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{U}_{n+1} - \frac{h^2}{2} \mathbf{f}^p - \mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^{\mathcal{A}, T} (k_p \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{A}} - p_p \mathbf{g}_{n+1}^{\mathcal{A}}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.16c})$$

$$-k_p \mathbf{g}_{n+1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.16d})$$

$$-\frac{k_p^2}{p_p} \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.16e})$$

$$M(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{W}_{n+1} - h \mathbf{f}^v - \mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^{\mathcal{B}, T} (k_v \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\mathcal{B}} - p_v \mathbf{g}_{n+1}^{\mathcal{B}}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.16f})$$

$$-k_v \mathbf{g}_{n+1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.16g})$$

$$-\frac{k_v^2}{p_v} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.16h})$$

where Eqs.(C.16)-a-b are related with the smooth motion, meanwhile Eqs.(C.16)-c-d-e and

Eqs.(C.16)-f-g-h are the position and velocity corrections part of the motion. In the set of Eqs.(C.16), the following notation is used for conciseness

$$\mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T = \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}}}^T(\check{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{q}}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T \check{\check{\lambda}}_{n+1}^U \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{f}^v = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{f}(\check{\mathbf{q}}_{n+1}, \check{\mathbf{v}}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\check{\mathbf{q}},n+1}^T \check{\check{\lambda}}_{n+1}^U \quad (\text{C.19})$$

where $\check{\check{\lambda}}$ is a Lagrange multiplier associated to the bilateral restriction, and $\check{\mathbf{q}}_{n+1}$, $\check{\mathbf{v}}_{n+1}$ and $\check{\check{\mathbf{v}}}$ are the position, the velocity and the acceleration vectors of the systems, respectively. These variables are associated with the smooth contributions of the problem, it is, the impacts are not considered in these variables. The contribution of the position jumps due to impact is associated with a Lagrange multiplier ν_{n+1} for the unilateral and bilateral constraints and the position correction is $\mathbf{U}_{n+1}$. The Lagrange multiplier Λ represents an impulsive force that can be interpreted as the integral of the reactions in the time interval $(t_n, t_{n+1}]$ and $\mathbf{W}_{n+1}$ is the velocity correction. Then, taking into account the splitting of the motion into a smooth and non-smooth contribution, the physical displacement and velocity fields are computed adding the correction vectors $\mathbf{U}_{n+1}$ and $\mathbf{W}_{n+1}$ to the smooth motions as follows,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \check{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{U}_{n+1} \quad (\text{C.20a})$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \check{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (\text{C.20b})$$

Because of using an augmented Lagrangian approach, the penalty terms of the smooth, position, and velocity problems are affected by the scalar factors $p_s > 0$, $p_p > 0$, $p_v > 0$, respectively, which improve the convergence rate. Besides, the scalar factors $k_s > 0$, $k_p > 0$, and $k_v > 0$ are associated with the Lagrange multiplier terms to improve of the condition number of the iteration matrix. As initial guess, they can be calculated as $k_s = p_s = \bar{m}/h$, $k_p = p_p = \bar{m}$ and $k_v = p_v = \bar{m}$ giving a good scaling of equations and where $\bar{m}$ is a characteristic mass of the problem. Finally, the integration algorithm is completed with the following difference equations of the generalised- α scheme

$$\check{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(0.5 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{C.21a})$$

$$\check{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (\text{C.21b})$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\check{\check{\mathbf{v}}}_{n+1} + \alpha_f\check{\check{\mathbf{v}}}_n \quad (\text{C.21c})$$

where $\mathbf{a}_{n+1}$ is a pseudo acceleration term that arises in the generalised- α integrator scheme. The numerical coefficients γ , β , α_m , and α_f can be selected by fixing the desired value of the spectral

ratio at infinity $\rho_\infty \in [0, 1]$,

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = 0.5 + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = 0.25(\gamma + 0.5)^2 \quad (\text{C.22})$$

Then, the set of active unilateral constraints $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{n+1}$ and bilateral constraints and $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{n+1}$, together with their complementary sets $\bar{\mathcal{A}} \equiv \bar{\mathcal{A}}_{n+1}$ and $\bar{\mathcal{B}} \equiv \bar{\mathcal{B}}_{n+1}$, are defined in the following form,

$$\mathcal{A}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{U} : k_p \mathbf{v}_{n+1}^j - p_p \mathbf{g}_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (\text{C.23a})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}_{n+1} \quad (\text{C.23b})$$

$$\mathcal{B}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \left\{ j \in \mathcal{A}_{n+1} : k_v \mathbf{A}_{n+1}^j - p_v \mathbf{g}_{n+1}^j \geq 0 \right\} \quad (\text{C.23c})$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_{n+1} \quad (\text{C.23d})$$

Finally, the residual vectors for the sub-problems of smooth, position and velocity are obtained from Eqs.(C.16)-a-c-f, respectively. More details about the residual vectors, as well as the iteration matrices of the nonlinear algebraic problems to be solved at each step can be found in [17].

C.4. Calculation of contact forces with the non-smooth integrator

Time integration with the generalised- α algorithm gives as results the velocity jump and the impulse at the impact time instants. This section presents the methodology to calculate the contact forces from these data by using a constitutive law at the impact zone that relates contact forces to local deformation, as used in continuous contact methods.

The discrete value of the Lagrange multiplier Λ_{n+1} computed by the integrator at time t_{n+1} is given by [9]

$$\Lambda_{n+1} = \int_{(t_n, t_{n+1}]} \left(di - \check{\lambda}(\tau) d\tau \right) \quad (\text{C.24})$$

where di is the impact measure of the contact reaction and $\check{\lambda}$ is the contact force when the contact is closed. By considering that the second part of the impulse is continuous, its integral in Eq.(C.24) can be approximated as follows

$$\Lambda_{n+1} \approx \int_{(t_n, t_{n+1}]} di - h \check{\lambda}_{n+1} = \Lambda_i - \Lambda_{\check{\lambda}} \quad (\text{C.25})$$

where $h = t_{n+1} - t_n$ is the time step of integration. Therefore, the discrete impulse Λ_{n+1} has two components: a first component named $\Lambda_i = \int_{(t_n, t_{n+1}]} di$, which is the time integral of the impulse produced by impacts occurred during the time step and is associated to a Dirac shape in time; the second component $\Lambda_{\check{\lambda}}$ is equal to the contact force $\check{\lambda}_{n+1}$ (i.e. when the contact is closed) multiplied by the time step and is associated to a continuous variation in time. Note that the impulse Λ_i can be

generated in a rigid bodies chain by an impact in another closing contact and transmitted by the chain to the contact under analysis.

Both components of the impulse, Λ_i and $\Lambda_{\check{\chi}}$, can be estimated easily in a post-processing analysis by filtering the Lagrange multiplier Λ output from the integrator, by separating the Dirac impulse from the continuous component. The filtering process is described in detail in Section C.5. Then, the closed contact force component $\check{\lambda}_{n+1}$ is simply computed by dividing $\Lambda_{\check{\chi}}$ by the time step h . However, the computation of the force component produced by the impulse Λ_i is not trivial, and requires a special treatment as follows. From classical mechanics, the impulse Λ_i delivered during the interval (t_i, t_f) by a time-dependent force $F_N(t)$ is defined as the time integral of the force $F_N(t)$,

$$\Lambda_i = \int_{t_i}^{t_f} F_N(t) dt \quad (\text{C.26})$$

In the case of impact of two bodies, by assuming the constitutive law presented in Eq.(C.6), the impulse during impact yields the following equation

$$\Lambda_i = \int_{t_i}^{t_f} [K + D\dot{\delta}(t)] \delta^n(t) dt \quad (\text{C.27})$$

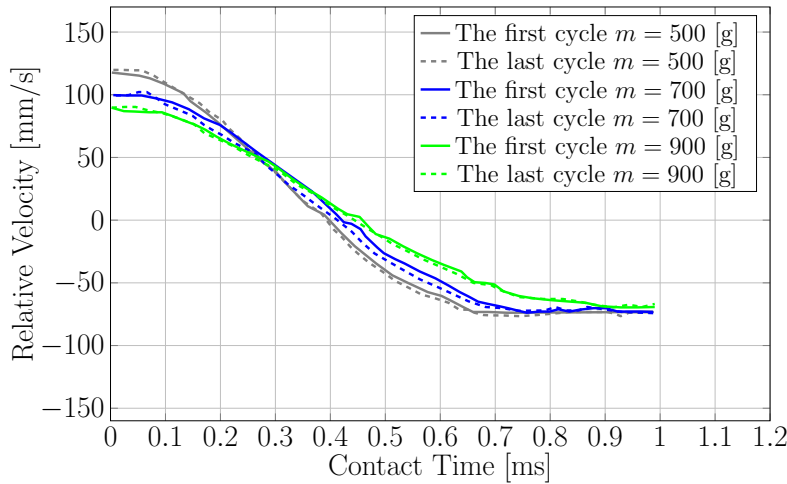


Figure C.3: Relative interpenetration velocity vs. time, for several impact masses (taken from Chen *et al.* [14]).

Experimental observations made by several authors demonstrated that the evolution of the relative interpenetration speed $\dot{\delta}(t)$ during the impact interval $[0, T]$, with $T = t_f - t_i$, looks similar to a cubic polynomial pattern, as reported by Chen *et al* [14], see Fig. C.3. Therefore, a piecewise cubic variation for $\dot{\delta}(t)$ is assumed in this work. In this function, the first part goes up to the time instant of maximum penetration and zero velocity, and the second part goes from the latter time instant up to the end of the impact duration T . Then, the proposed time evolution of the relative

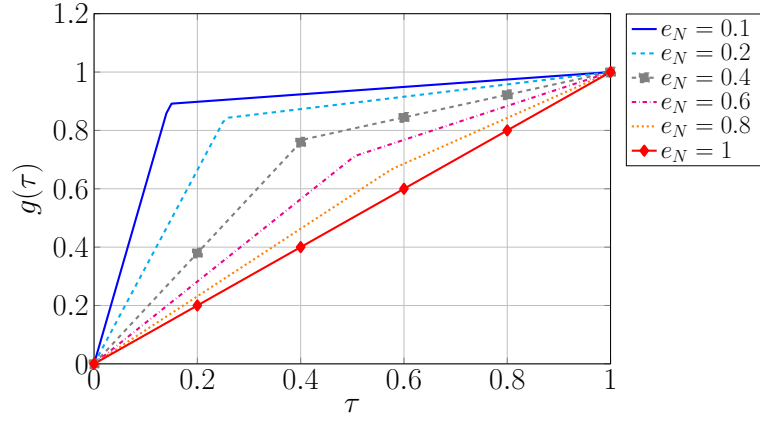


Figure C.4: Piecewise linear function $g(\tau)$ in terms of non-dimensional time, for different values of coefficient of restitution.

interpenetration velocity is given by

$$\dot{\delta}(\tau) = \dot{\delta}_i + cT^2 g^2(\tau) + dT^3 g^3(\tau) \quad (\text{C.28})$$

where $\tau = (t - t_i)/T$ is a non-dimensional time; the values of parameters c and d are determined by the boundary conditions on the displacements, velocities and accelerations during the impact of the colliding bodies (Fig. C.2); and the piecewise linear function $g(\tau) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is defined as follows

$$g(\tau) = \begin{cases} a\tau & \tau \leq k \\ \frac{(a-1)k}{1-k} + \frac{1-ak}{1-k}\tau & \tau > k \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

Coefficient k is such that kT is approximately equal to the time instant of maximum interpenetration and zero velocity. Note that $g(0) = 0$ and $g(1) = 1$, while parameter a controls the amplitude of $g(\tau)$ at $\tau = k$ such that $g(k) = ak$; in particular, when $a = 1$, $g(\tau) = \tau$ and a linear interpolation is recovered. Coefficient k is computed in the Appendix A in terms of the normal coefficient of restitution e_N , giving the relationship

$$k = \frac{\alpha e_N}{1 + \alpha e_N} \quad \text{with} \quad \alpha = 1.7 \quad (\text{C.30})$$

Function $g(\tau)$ is plotted in Fig. C.4 for different values of the coefficient of restitution.

Parameters c and d of Eq.(C.28) are obtained by asking that the velocity at time T is equal to the final velocity, which is the sum of the initial velocity $\dot{\delta}_i$ plus the velocity jump W , see Eq. (C.16-f). Therefore, $\dot{\delta}(T) = \dot{\delta}_f = W + \dot{\delta}_i$. We also impose that the acceleration at time T is null (in other words, since the acceleration at the end of the impact is much smaller than the accelerations during impact, it can be considered zero). Taking into account these assumptions, the following

system of equations is obtained

$$\begin{cases} \dot{\delta}(T) - \dot{\delta}_i = cT^2 + dT^3 = W \\ \ddot{\delta}(T) = \frac{1 - ak}{1 - k} (2cT + 3dT^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

After solving Eq.(C.31), coefficients c and d can be calculated as

$$c = \frac{3W}{T^2} \quad d = -\frac{2W}{T^3} \quad (\text{C.32})$$

On the other hand, the interpenetration $\delta(t)$ is obtained as the time integral of $\dot{\delta}(\tau)$ as follows

$$\delta(t) = \int_0^{(t-t_i)/T} \dot{\delta}(\tau) d\tau \quad (\text{C.33})$$

The coefficient a is next determined from Eq.(C.33) by asking that the interpenetration at the end of the impact is zero, as Fig.C.2-a shows; therefore,

$$\delta(T) = T \int_0^1 \dot{\delta}(\tau) d\tau = 0 \quad (\text{C.34})$$

After computing the integral in Eq.(C.34), the following cubic algebraic equation is obtained

$$k^3 a^3 - k^2(k+1)a^2 + k(k-1)a + k - \frac{1 - e_N}{e_N + 1} = 0 \quad (\text{C.35})$$

Thus, coefficient a is computed by solving Eq.(C.35). This solution is computed only once and tabulated. Figure C.5 shows the values of a calculated from Eq.(C.35) in terms of the coefficient of restitution.

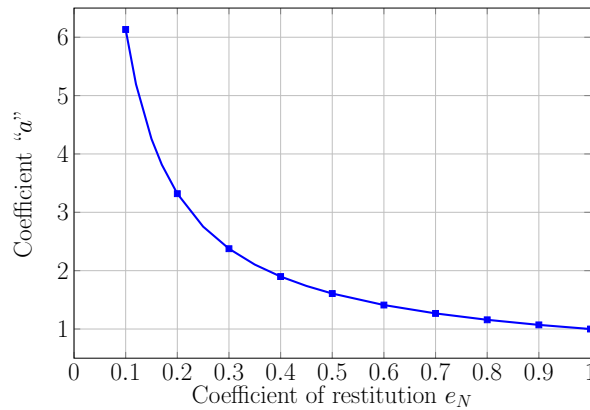


Figure C.5: Parameter a in terms of the normal restitution coefficient e_N .

The impact time duration T is determined based on the computation of the impulse given by Eq.(C.27). This integral can be rewritten in a non-dimensional way with the substitution

$\tau = (t - t_i)/T$, yielding

$$\Lambda_i = K \dot{\delta}_i^n T^{n+1} \underbrace{\int_0^1 [\bar{\delta}(\tau)]^n d\tau}_{I_\delta} + D \dot{\delta}_i^{n+1} T^{n+1} \underbrace{\int_0^1 [\bar{\delta}(\tau)]^n \dot{\bar{\delta}}(\tau) d\tau}_{I_{\dot{\delta}}} \quad (\text{C.36})$$

where the non-dimensional interpenetration velocity $\dot{\bar{\delta}}(\tau)$ and the non-dimensional interpenetration $\bar{\delta}(\tau)$ are defined as follows

$$\dot{\bar{\delta}}(\tau) = \frac{\dot{\delta}(\tau)}{\dot{\delta}_i} = 1 - 3(1 + e_N)g^2(\tau) + 2(1 + e_N)g^3(\tau) \quad (\text{C.37a})$$

$$\bar{\delta}(\tau) = \frac{\delta(\tau)}{T\dot{\delta}_i} = \int_0^\tau \dot{\bar{\delta}}(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{C.37b})$$

The value of the factor I_δ , Eq.(C.36), is evaluated using Eq.(C.37b) for different coefficients of restitution e_N . This computation is performed only once and tabulated, giving results as shown in Fig. C.6.

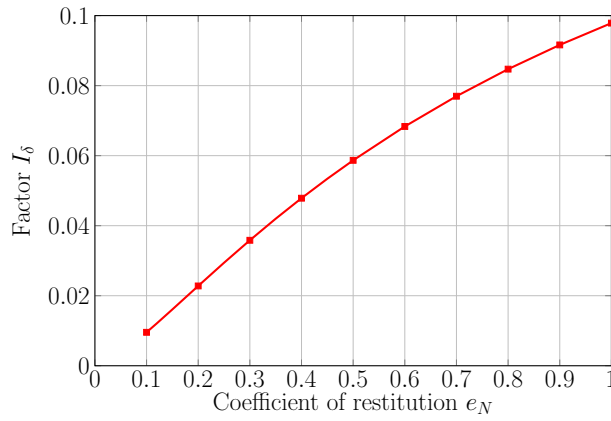


Figure C.6: Factor I_δ in terms of the normal restitution coefficient e_N .

On the other hand, factor $I_{\dot{\delta}}$ in Eq.(C.36) is equal to zero as shown next

$$\begin{aligned} I_{\dot{\delta}} &= \int_0^1 [\bar{\delta}(\tau)]^n \dot{\bar{\delta}}(\tau) d\tau = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \left[(\bar{\delta}(\tau))^{n+1} \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\bar{\delta}(1)^{n+1} - \bar{\delta}(0)^{n+1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

since $\bar{\delta}(1) = \bar{\delta}(0) = 0$ (i.e. the relative interpenetrations at the beginning and at the end of the impact process are zero, see Fig. C.2-a).

Finally, by replacing in Eq.(C.36), the impact time duration T is obtained yielding

$$T = \left[\frac{\Lambda_i}{K \dot{\delta}_i^n I_\delta} \right]^{1/(n+1)} \quad (\text{C.39})$$

The algorithm proceeds by computing I_δ , T , c and d . Then, the relative interpenetration velocity $\dot{\delta}(t)$, the relative interpenetration $\delta(t)$ and the contact force $F_N(t)$ can be evaluated by using

Eqs.(C.28, C.33, C.6) respectively. This computation is performed in very fast way. Fig. C.7 gives a block diagram of the computations required to calculate $F_N(t)$. The first block displays the necessary data: the problem parameters as well as the variables obtained from the integrator evaluated at the time instant of impact. We remark that the integral in Eq.(C.33) can be evaluated analytically.

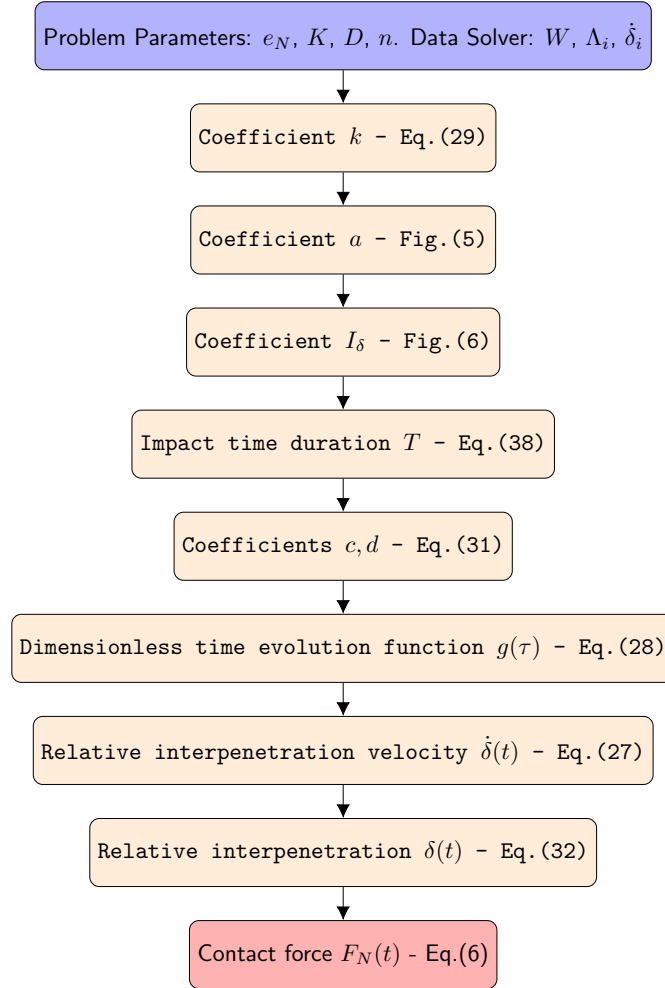


Figura C.7: Block diagram for the calculation of the contact force $F_N(t)$.

C.5. Filtering Algorithm

An algorithm to calculate the impulse component Λ_i and the continuous component Λ_χ of the discrete Lagrange multiplier Λ , which are needed to get the evolution of the contact force, is proposed in this section (see Eq. (C.24)).

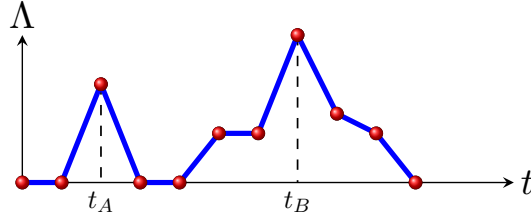


Figura C.8: Discrete impulse vs. time.

Let us consider a general discrete variation of $\Lambda_k, k = 1, N$, as shown in Fig. C.8. The time instants of impacts are defined as $\{t_{peak}\} = \{t_k \text{ s.t. } (\Lambda_k > \Lambda_{k-1}) \wedge (\Lambda_k > \Lambda_{k+1}), \forall k \in (1, N)\}$. In other words, they can be identified by the positive peaks in the time evolution of the Lagrange multiplier Λ . Then, two cases can be identified from this figure. In the first one, Λ_i corresponds to the case in which the two bodies are separated before impact. It is characterised by the fact that immediately before and after t_A , the Lagrange multiplier Λ is equal to zero. The second type of impact occurs at time t_B , in which the contact constraint Λ is active before (and after) the impact at time t_B .

We define the continuous component of the Lagrange multiplier in the following form:

$$\Lambda_\chi(t_k) = \Lambda_{\chi, k} = \begin{cases} \Lambda_k, & \text{if } t_k \neq t_{peak} \\ \frac{\Lambda_{k-1} + \Lambda_{k+1}}{2}, & \text{if } t_k = t_{peak} \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

Then, the values of the impact impulses Λ_i are obtained by simply subtracting the continuous component of the Lagrange multiplier from the time evolution of Λ :

$$\Lambda_i(t_k) = \Lambda_{i, k} = \Lambda_k - \Lambda_{\chi, k} \quad (\text{C.41})$$

The continuous component of the Lagrange multiplier Λ_χ and the impact impulse Λ_i are shown in Fig. C.9.

C.6. Numerical examples

Four numerical examples are presented to show the accuracy and robustness of the proposed methodology. The contact element developed in this work has been implemented in the finite element research code Oofelie [12]. The expression of the convergence criterion used in the

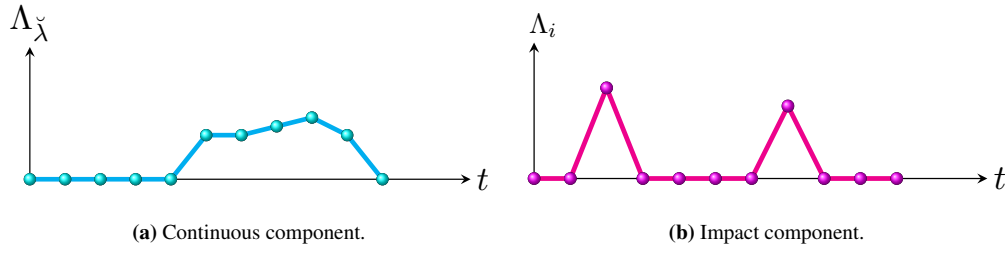


Figura C.9: Components of the Lagrange multiplier Λ obtained by filtering.

examples is given next

$$\|\mathbf{r}\| < \text{tol}_r \left(\sum_k \|\mathbf{r}_k\| + \text{tol}_f \right) \quad (\text{C.42})$$

where tol_r is a relative tolerance for the smooth, position and velocity sub-problems, $\mathbf{r}_k$ is the k th term contributing to the residual $\mathbf{r}$ for each sub-problem of the decoupled non-smooth time integration scheme described briefly in Sec. C.3, tol_f is a minimal characteristic value of residual force, and $\|\cdot\|$ is the L^2 norm of $(\cdot)$. We remark that a constant time step was used in the simulations in order to display clearly the performance of the algorithm and allow comparisons with other authors. Nevertheless, a variable step strategy could have also been used achieving a better computational efficiency.

Bouncing ball

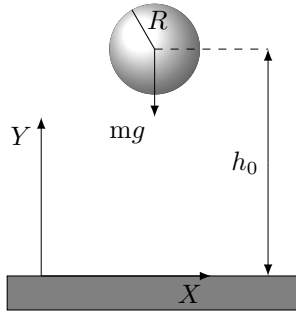


Figura C.10: Bouncing ball problem description.

The first example is the classical bouncing ball problem, see Fig C.10. The ball has a mass of $m = 1$ kg, a radius $R = 0.1$ m and, it is initially at rest and falls under the influence of gravity ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$) until colliding with the ground. Then, it rebounds to a height that depends on the value of the coefficient of restitution. Several authors previously used this example to test various hysteresis damping models in the context of smooth approaches [25, 35, 54]. They analysed the kinematics, the deformation, the velocity of deformation, and the contact force during the first impact of the ball with the ground.

Figure C.11 shows the calculated position, velocity, and impulse by using the decoupled version

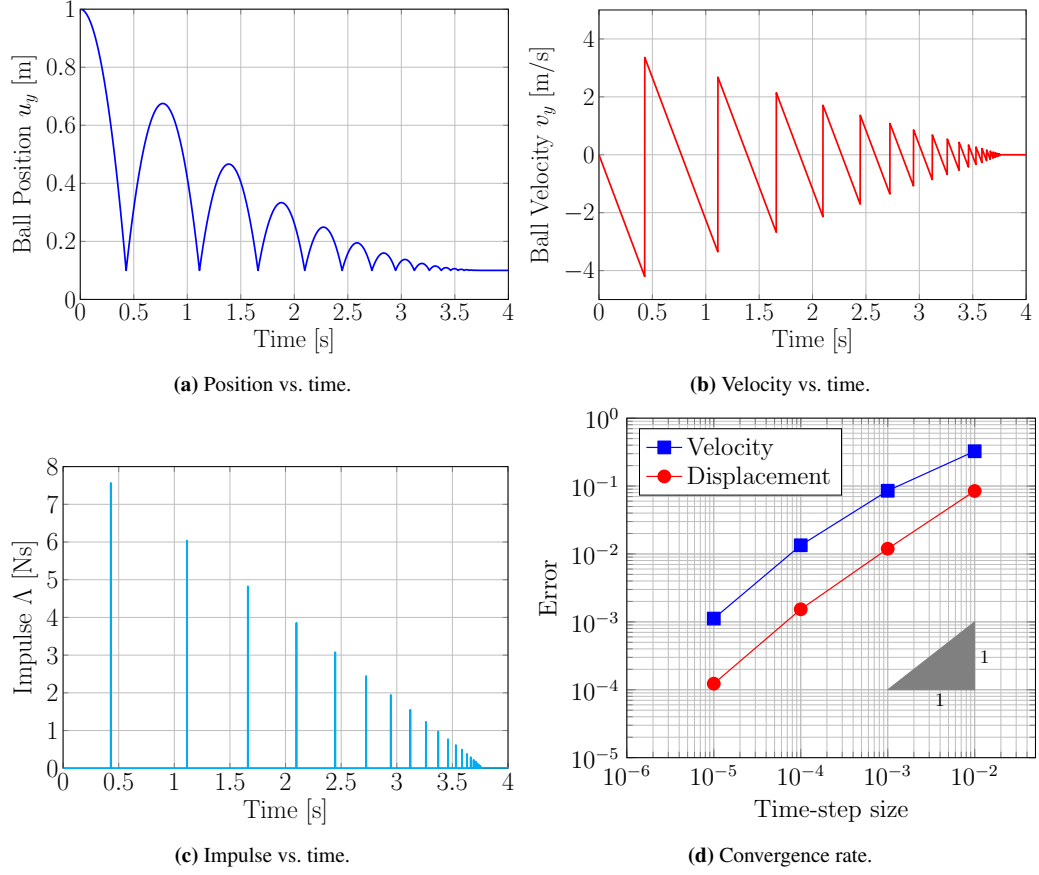
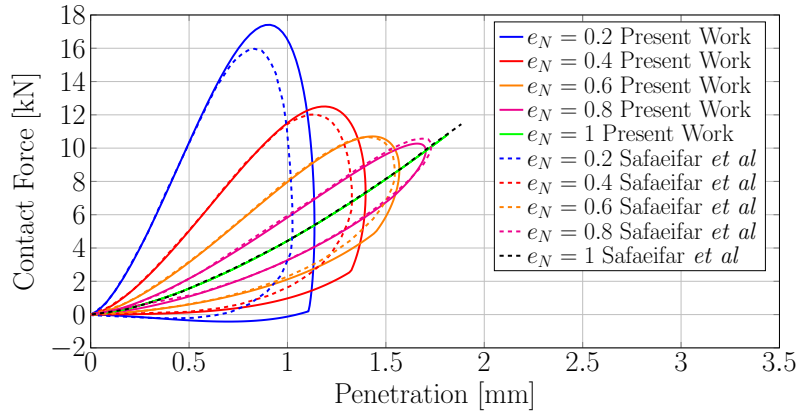


Figure C.11: Bouncing ball example. Evolution with respect to time of ball position, velocity and impulse, computed with $h = 1 \times 10^{-3}$ s and $e_N = 0.8$. Convergence rate in terms of time-step size.

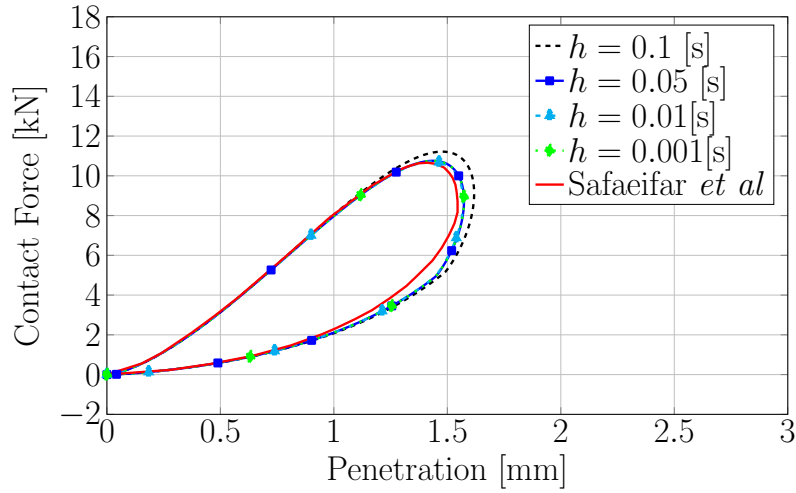
of the non-smooth generalised- α time integrator [17]. The same example was also analysed in [9] with the original implementation of the non-smooth generalised- α time integrator and similar results were obtained. Solver parameters are: a constant time step $h = 1 \times 10^{-3}$ s, spectral ratio $\rho_\infty = 0$, normalised residual tolerance $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$, and a total simulation time of 4 s.

Figure C.11-d shows the convergence rate computed by comparison with an analytical solution [13], showing a linear convergence rate as expected. The maximum number of iterations per time-step was 1 with a mean number of 1 iteration per time-step for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively.

Figure C.12-a displays the evolution of the contact force and penetration for the first impact for different values of the restitution coefficient, computed with the present methodology using the Flores hysteresis damping factor, see model 4 in Table C.1 with a contact stiffness $K = 140 \times 10^6$ N/m^{3/2} and exponent $n = 3/2$. The value of K corresponds to a material with Young modulus $E = 6.043 \times 10^8$ N/m² and Poisson coefficient $\nu = 0.3$. These results are compared with computations performed by Safaeifar and Farshidianfar [54], where these authors also used the Flores hysteresis damping factor. It can be seen that the computed curve families agree with the cited work. However, some small differences can be observed for the smaller values of the restitution



(a) Contact force vs. penetration for different coefficients of restitution.



(b) Contact force vs. penetration for $e_N = 0.6$, computed with different time steps of the integrator.

Figure C.12: Bouncing ball example.

coefficient, although these differences are in the range of variation of solutions computed with other smooth contact models.

The computations of the contact forces for five different values of the coefficient of restitution were performed, namely $e_N = [1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2]$. Figure C.12-b shows the evolution of the contact force and penetration during impact, for computations performed with different time-step sizes h . The curves converge to the reference curve as h is reduced in size. The contact duration is $T = 0.00145$ s in this case; therefore, our computations were performed with a constant time step h which is up to 69 times larger than the contact duration T without losing accuracy in the forces calculation, as it can be seen on the plots. On the contrary, in the smooth approach, the time-step should have been much smaller than the contact duration to get accurate results. Usually, a variable step size time integrator is used with an strategy for detecting the time instant of contact.

Impact of two spheres

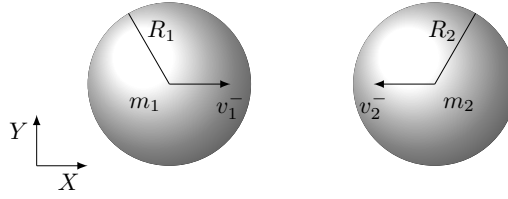


Figura C.13: Impact of two rigid spheres.

The second example concerns the impact of two spheres, see Fig.C.13. Computations were performed with two damping models to show the capability of the method to accommodate to different models.

In a recent paper by Flores *et al* [52], a detailed comparison of various contact force models is presented. Here, we used the models proposed by Hu *et al* [34] and Zhang *et al* [72], see models 3 and 5 in Table C.1, respectively.

The spheres are equal, with radius $R_1 = R_2 = 0.02$ m and mass $m_1 = m_2 = 0.092$ kg. The initial distance between centres of the spheres is 0.1 m. They both have an initial velocity of $v_1^- = v_2^- = 0.15$ m/s, in opposite directions. Friction between the spheres is not considered. The contact stiffness is $K = 5.5 \times 10^9$ N/m^{3/2} with exponent $n = 3/2$, and the chosen values of the coefficient of restitution for this study are $e_N = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]$. The value of K corresponds to a material with Young modulus $E = 7.5 \times 10^{10}$ N/m² and Poisson coefficient $\nu = 0.3$.

The solver parameters were set as follows: a constant time-step $h = 1 \times 10^{-2}$ s, spectral ratio $\rho_\infty = 0$, a normalised residual tolerance $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$ and a total simulation time of 0.5 s. The nonlinear problem at each time-step converged very fast, even for the time instant of impact, with a maximum number of iterations in the computations of 1, 2 and 2 for the smooth, position and velocity sub-problems, respectively.

Figures C.14-a-b-c-d show a comparison between the solutions obtained for the Hu *et al* model with the smooth approach [34] and with the present methodology, for different values of the coefficient of restitution. These diagrams present the evolution of the contact force versus time, the velocity of a sphere versus time, the contact force-penetration relation, and the penetration velocity versus penetration, respectively. Subsequently, Figs. C.15-a-b-c-d show the same diagrams when using the Zhang *et al* model [72]. Figures C.14 and C.15 show that the numerical solutions obtained with the present methodology are in agreement with the cited references for several values of the coefficient of restitution and for various factors of the hysteresis damping models.

The contact duration varies between $T = 0.160$ ms for $e_N = 0.8$ and $T = 0.226$ ms for $e_N = 0.2$, which is between 67 and 44 times smaller than the constant time-step used in the

integrator. Again, we remark that in the smooth approaches, the time step should be much lower than the contact duration.

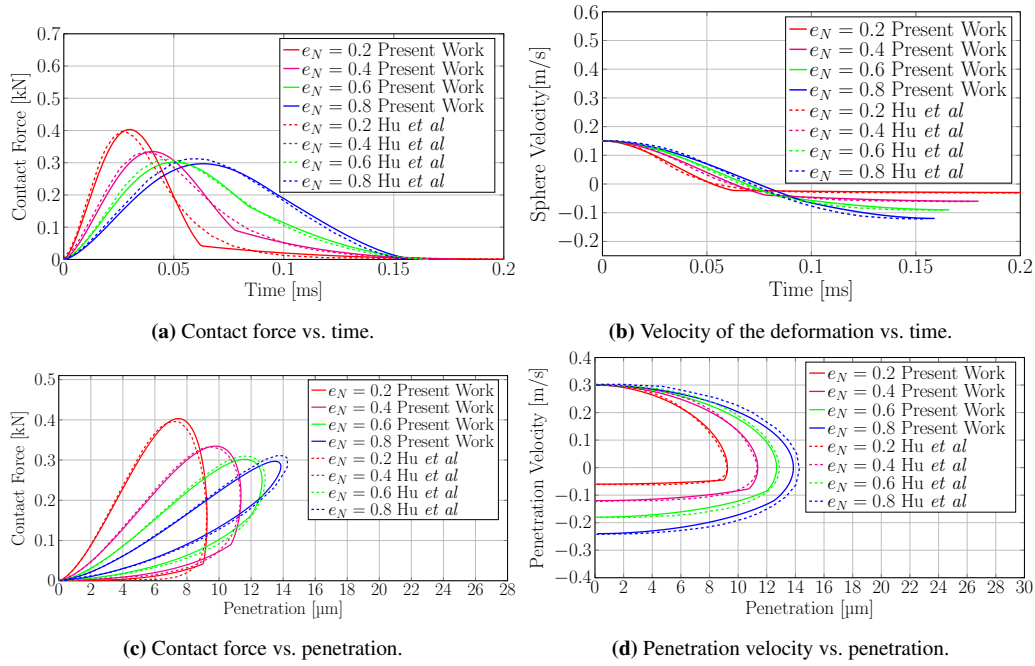


Figure C.14: Impact of two spheres for different coefficients of restitution by using the Hu *et al.* model [34].

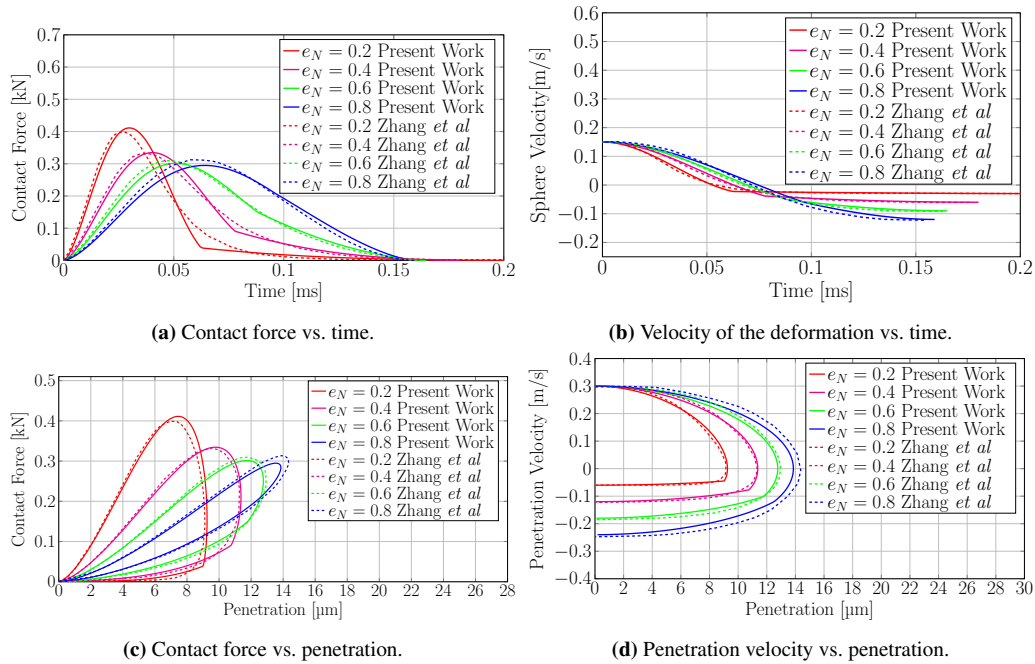


Figure C.15: Impact of two spheres for different coefficients of restitution by using the Zhang *et al.* model [72].

Crank rod mechanism with impact

The third example is a planar crank rod mechanism with a slider impacting a free block, proposed by Machado *et al.* [45]. The mechanism consists of five rigid bodies: the crank, the connecting-rod, the slider, the ground, and a free slider block. The connecting-rod is linked to the

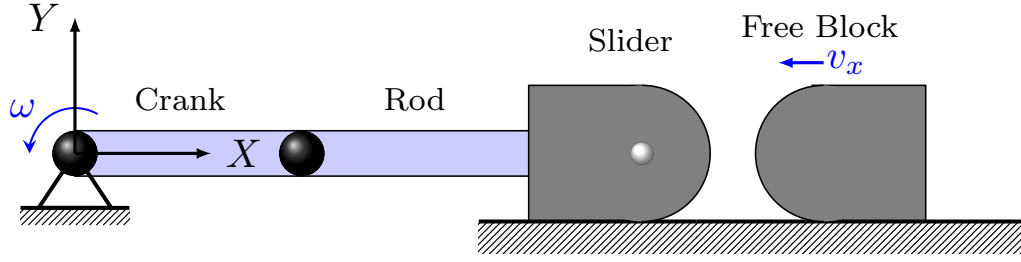


Figura C.16: Crank rod mechanism with impact at the initial configuration.

slider and to the crank by perfect revolute joints. The lengths, the masses and the inertia properties of each body are shown in Table C.2. At the beginning, the crank and the connecting-rod are aligned along the X axis as shown in Fig. C.16. The free sliding block is located at $x = 0.914$ m and has an initially imposed velocity of 15 m/s in the negative X -direction. Frictionless contact with the ground is assumed on the slider and on the free block. The bodies are subjected to a constant gravity acceleration $g = 9.8$ m/s² in the negative Y -direction. An initial angular velocity of 150 rad/s is imposed on the crank in the counter-clockwise direction. According to Machado *et al* [45], the contact surfaces of the slider and the free block are considered spherical with radius 0.0085 m. The contact stiffness is 9.5×10^9 N/m^{3/2} with exponent $n = 3/2$, and the value of the coefficient of restitution is set to 0.7. Finally, the Flores hysteresis damping factor is used (model 4 in Table C.1). The value of K corresponds to a material with Young modulus $E = 1.98 \times 10^{11}$ N/m² and Poisson coefficient $\nu = 0.3$.

The solution was computed with three different constant time steps $h = 1 \times 10^{-3}$ s, $h = 5 \times 10^{-4}$ s and $h = 1 \times 10^{-4}$ s. The rest of parameters were: spectral ratio at infinity $\rho_\infty = 0$, a normalized residual tolerance $\text{tol}_r = 1 \times 10^{-5}$ and a total simulation time of 0.1 s.

Table C.2: Dimensions, mass and inertia properties of the bodies for crank-rod mechanism.

Body	Length [m]	Mass [kg]	Moment of inertia I [kg m ²]
Crank	0.153	0.038	7.4×10^{-5}
Rod	0.306	0.076	5.9×10^{-5}
Slider	-	0.038	1.8×10^{-6}
Free block	-	0.19	2.7×10^{-5}

Figure C.18-a shows the evolution in time of the position of the free block while Fig. C.18-b displays the evolution in time of the velocity of the slider. Two impacts between the free block and the slider are produced at times 0.0438 s and 0.0672 s, respectively, evidenced by the observed jumps of velocity, Fig. C.18-b. The plots of impact force vs. indentation for the first and second impacts are shown in Figs. C.19-a and C.19-b, respectively.

The numerical solutions obtained with the present methodology are compared with those of Machado *et al* [45] showing that both solutions are in very good agreement. The maximum number

of iterations per time-step was 2, 3 and 2 with a mean number of 1, 2 and 1 iterations per time-step, for the smooth, position and velocity sub-problems respectively. The durations of contact for the first and second impacts are 6.85×10^{-5} s and 7.5×10^{-5} s, respectively. Thus, the time step used in the integrator is up to 150 times greater than the duration of contact without losing accuracy in the computation of the contact forces.

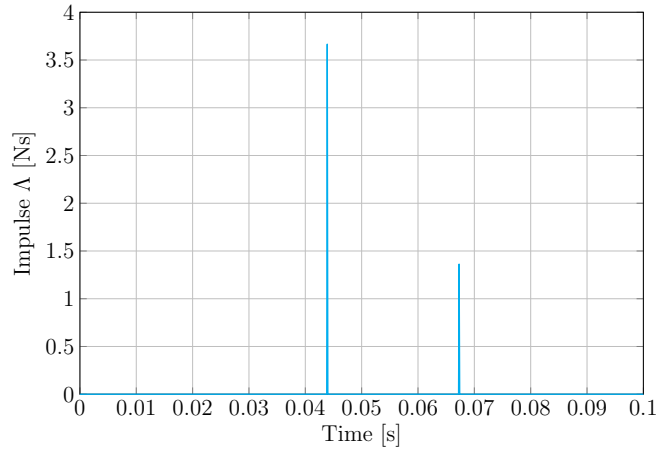


Figure C.17: Impulse evolution vs. time for a time step $h = 1 \times 10^{-4}$ s.

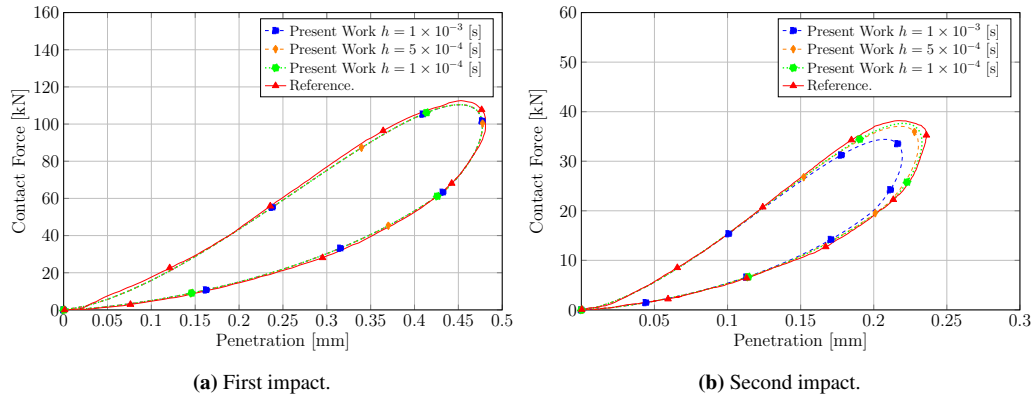
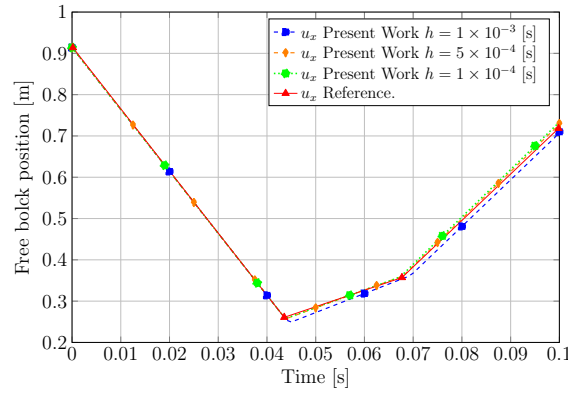


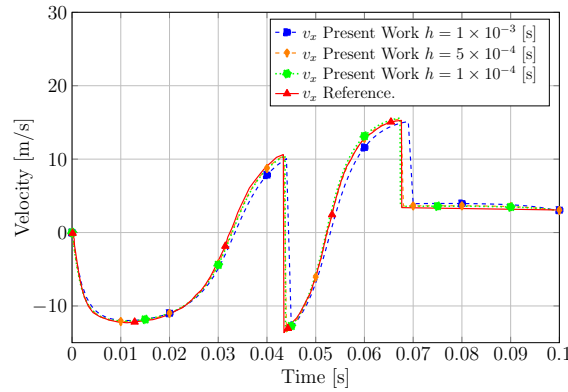
Figure C.19: Evolution of contact forces in terms of penetration for the slider-crank mechanism for time steps $h = 1 \times 10^{-3}$ s, $h = 5 \times 10^{-4}$ s, and $h = 1 \times 10^{-4}$ s.

Flexible crank rod mechanism with clearance

The fourth example is a flexible crank rod mechanism where clearance is introduced in the joint between the connecting-rod and the slider. The system is formed by a combination of rigid and flexible bodies. The goal of this example is to study the performance of the contact force calculation algorithm when repeated high frequency impacts between components of a mechanism are developed. The crank and the connecting-rod are flexibles, while the slider is considered as a rigid body. Friction between the slider and the ground is neglected. The dynamics of the mechanism is not trivial and cannot be solved analytically. Therefore, a multibody simulator is required to solve the dynamics of the mechanism, e.g. calculate displacements, velocities and/or impulses.



(a) Position vs. time of the free block.



(b) Velocity vs. time of the slider.

Figure C.18: Position and velocity evolution vs. time for the slider-crank mechanism for time steps $h = 1 \times 10^{-3}$ s, $h = 5 \times 10^{-4}$ s, and $h = 1 \times 10^{-4}$ s.

Furthermore, in this kind of systems, not only the masses of the bodies in contact determine the magnitude of the impulse, but also the inertia of the other mechanism parts which is transmitted to the impact zone by the kinematics chain.

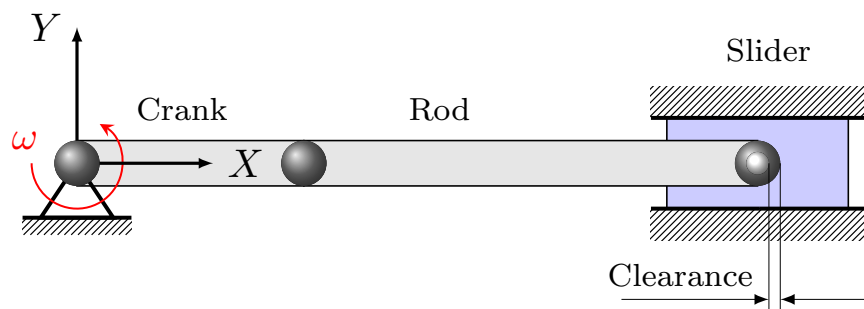


Figure C.20: Initial configuration of the flexible crank rod mechanism with clearance.

At the beginning of motion the crank and the connecting-rod are aligned and the centres of the journal and of the bearing coincide, see Fig. C.20. The crank rotates in counter-clockwise direction about the Z-axis with a constant angular velocity of 5000 rpm. The connecting-rod and the crank are linked by a perfect revolute joint whereas a radial clearance is introduced at the joint between the slider and the rod. Simulations with clearances of 0.05 mm and 0.1 mm were performed. The

material is assumed to be an elastic steel with Young's modulus 210×10^9 Pa, material density 7850 kg/m^3 and Poisson coefficient 0.3. The restitution coefficient at the joint is set to 0.9. A damping ratio of 0.04 % was introduced in the crank and in the connecting-rod. The mass of the slider is 0.14 kg. The cross sectional area and inertia of the crank are $7.6433 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ and $4.868 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, respectively, while the connecting-rod has a cross sectional area $2.2293 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ and inertia $4.1415 \times 10^{-9} \text{ m}^4$. The crank and the connecting-rod are discretized with four equally spaced beam elements each one [43]. Simulations were performed with constant time step equal to 1×10^{-5} s, 1×10^{-6} s and 1×10^{-7} s with a normalised residual tolerance of 1×10^{-5} and a spectral radius at infinity $\rho_\infty = 0$. The solutions displayed in the figures of this section were obtained after enough time had passed in the simulation to reach a steady-state motion and all initial transients were damped out.

Figure C.21-a displays the velocity of the slider vs. the crank angle, and Fig. C.21-b depicts the journal centre path relative to the bearing. Two crank turns of simulation are displayed. It is easy to observe that the journal is practically in permanent contact with the bearing and that the algorithm fulfils exactly the position contact restriction. In other words, no penetration between bodies is observed.

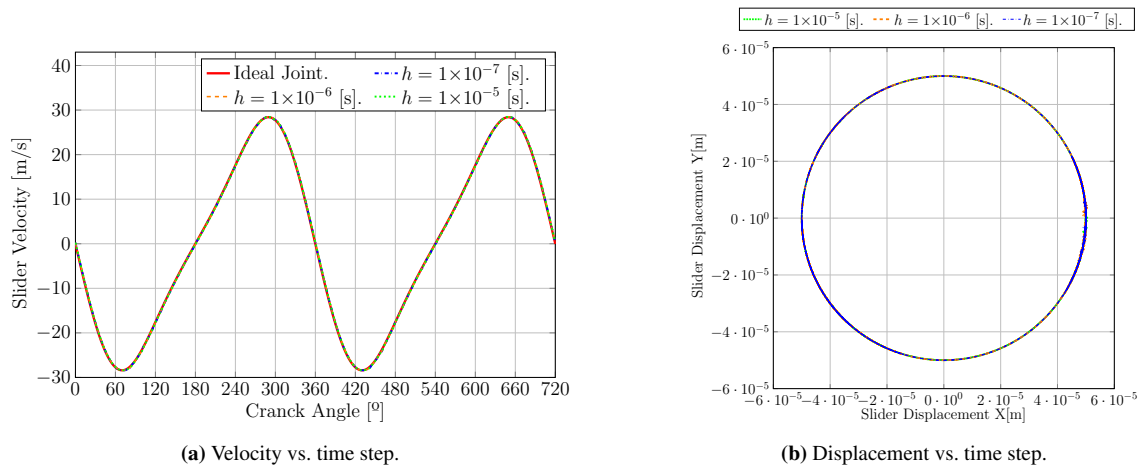


Figura C.21: Journal centre path relative to the bearing for different time steps.

Figure C.22 displays the evolution of the contact force at the joint between rod and slider for two crank turns. We compare the force evolution for the case of radial clearance equal to 0.05 mm between the journal and the bearing with that of the case of an ideal joint without clearance. In the latter a continuous and smooth variation of the contact force is observed, while in the former case, when clearance is considered, the time evolution of the contact force exhibits abrupt changes. Computations were performed for time steps equal to 1×10^{-5} s, 1×10^{-6} s and 1×10^{-7} s evidencing convergence of results.

Similar conclusions are obtained when the radial clearance is 0.1 mm, see Fig. C.23. However,

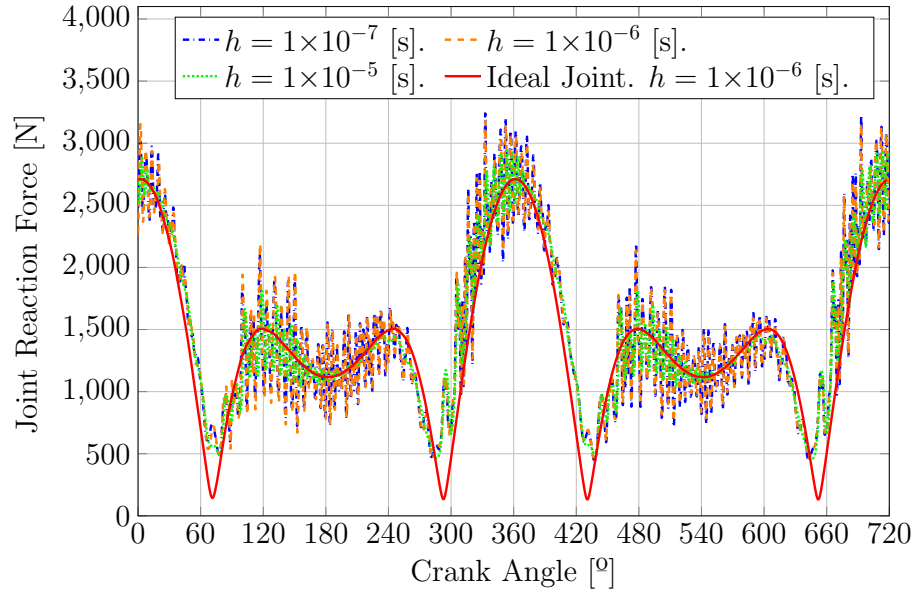


Figure C.22: Contact force vs. crank angle for a clearance of 0.05 mm.

unlike the previous case, the reaction force reaches zero at some instants indicating that there is separation between the journal and the bearing which is followed by impact. Furthermore, the contact forces are larger than in the case of 0.05 mm clearance. In both cases, convergence of the contact force is achieved when the time step is equal to 1×10^{-6} s.

The contact force evolution displayed in Figs. C.22 and C.23 is computed using the procedure of Sections C.4 and C.5. At each time instant, the continuous and the impulse components of the contact force are computed. The maximum of the evolution of the impulse component of force during the impact duration, added to the continuous component of force, is plotted in Figs. C.22 and C.23.

The contact and the impulse components of forces between the journal and the bearing can be calculated separately. The evolution of these two components is depicted in Figs. C.24-a-b as a function of the crank angle, for both cases of clearance proposed. This simulation was computed with a time step of 1×10^{-6} s. Figure C.24-a shows the continuous component of force whereas Fig. C.24-b shows the impact force produced by impulses. By analysing these figures, we can remark:

- First, the continuous component of the contact force between the journal and the bearing is higher than the impact component of force, and has strong oscillations. This behaviour is produced by the small clearance of the joint which excites flexible vibrations in the mechanism, yielding a small movement of the journal sliding over the bearing, instead of producing high impact forces.
- When clearance is 0.05 mm, the journal is almost in permanent contact with the bearing. However, Fig. C.24-b shows that the impact forces become larger as the clearance is increased.

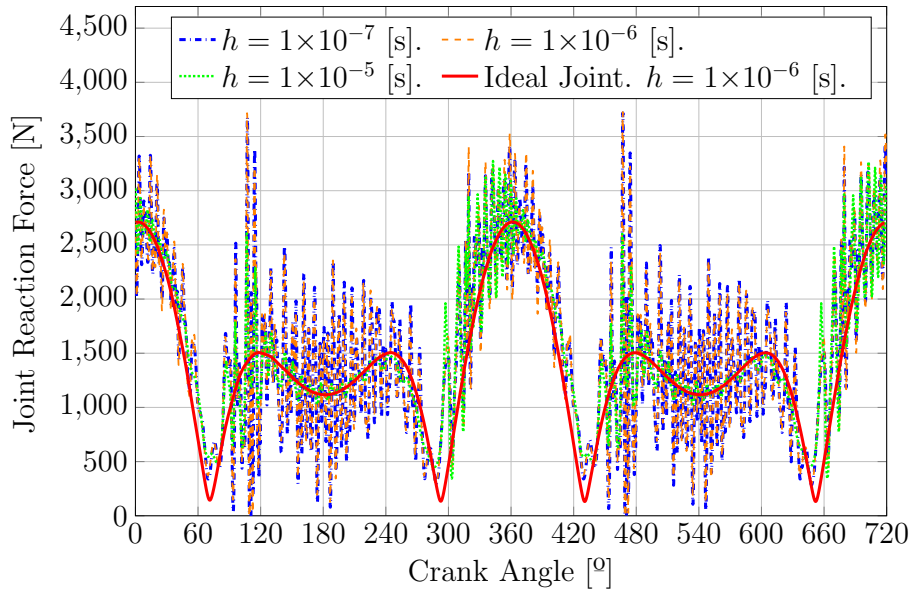
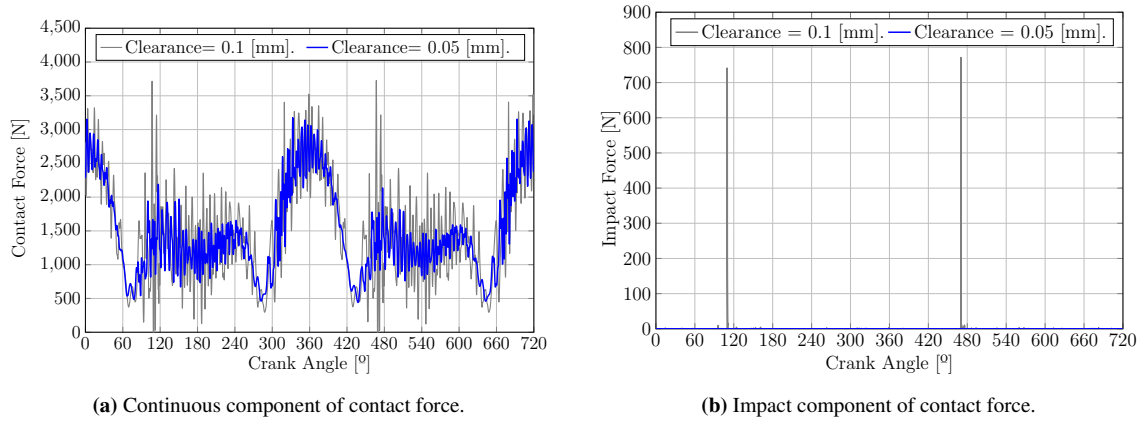


Figure C.23: Contact force vs. crank angle for a clearance of 0.1 mm.



(a) Continuous component of contact force.

(b) Impact component of contact force.

Figure C.24: Continuous and impact components of contact force vs. crank angle.

Note that the maximum value of the impulse forces is nearly 700 N when the clearance is 0.1 mm but almost null when clearance is 0.05 mm.

Figure C.25 depicts the effect of clearance on the deformation of the connecting-rod. The beam angular and axial deformations of the connecting-rod are plotted for the case of an ideal joint without clearance and for the cases of a joint with clearances of 0.05 mm and 0.1 mm. When clearance is introduced in the model, the axial and the angular deformations augment with respect to the ideal joint mechanism due to the small motion vibrations between journal and bearing. The magnitude of the deformation increases with clearance as expected. The frequency of the axial vibrations shown in Fig. C.25-b can be related to the continuous component of the contact force in the joint (Fig. C.24-a). Finally, computations were shown to converge for a time step equal to 1×10^{-6} s. In this case, the maximum number of iterations per time-step for the smooth, the position and the velocity sub-problems was 2, 3 and 1, respectively, while a mean

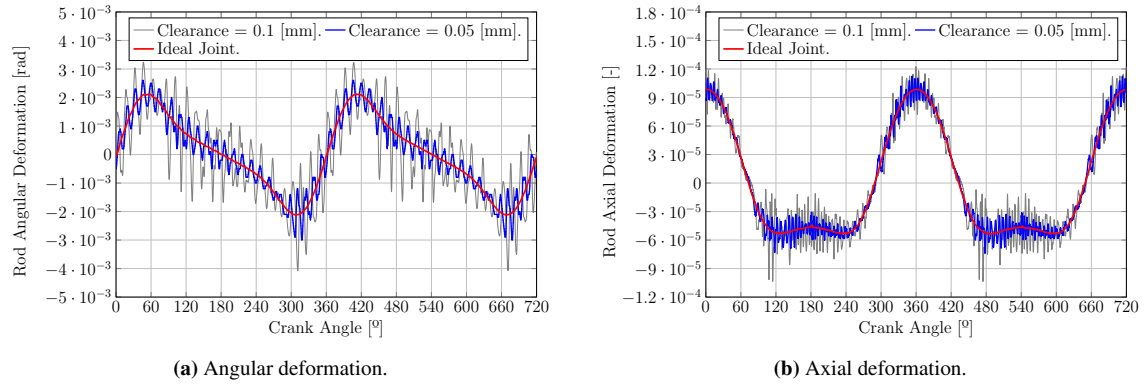


Figure C.25: Deformation of the connecting-rod vs. crank angle. Time step $h = 1 \times 10^{-6}$ s.

number of 1 iteration per time-step for the three sub-problems was computed. These computations were performed quite fast on a laptop computer.

C.7. Conclusions

This paper presents a novel methodology to calculate the impact forces between rigid bodies in the framework of the non-smooth dynamic analysis using the generalised- α time integrator. The method is based on a multiscale approach in which contact forces and penetrations are evaluated in terms of the velocities and impulses calculated by the integrator, with a constitutive law of contact mechanics derived from elasticity theory.

In scenarios involving the collision of two bodies that are part of a complex mechanism, the total mass of the entire mechanism influences the impact forces between the contacting bodies, as in the case of the mechanism discussed in Sec. C.6. In the proposed methodology, the masses and inertia information involved in the impact are taken into account by the computed impulse, which is a discrete measure that can be evaluated with a relatively large time step (with respect to impact duration) by the non-smooth integrator. On the other hand, smooth time integrators require the use of variable time step algorithms and accurate detection of the moment of impact, with a reduction of the time step during collision to values well below the duration of impact to fully account for the energy exchanges that take place during impact.

In the examples presented in this work, contact detection was not a challenge due to the simplicity of the geometries involved. Nevertheless, any well-established method for detecting contact between complex geometries can be utilized. Regarding the relationship between contact detection and the integration process, the non-smooth integrator provides a significant advantage, as it does not require precise identification of the exact moment of impact, unlike other algorithms.

This new methodology offers a significant advantage by combining the computational efficiency of the non-smooth algorithm for determining the displacements, velocities, and accelerations of both

flexible and rigid bodies by using comparatively large time steps, while also enabling the calculation of contact forces using an appropriate contact constitutive law. Moreover, the non-smooth time integration scheme used in this work ensures the complete fulfilment of contact constraints at both position and velocity levels preventing the penetration of the contacting bodies.

The method was validated by comparison of results in kinematics variables, contact forces and deformations against results obtained by other authors using the smooth integration, showing good agreement. Four examples of application were presented in the paper, showing good results in the prediction of forces with time steps which could be more than a hundred times larger than the impact duration.

To the best of our knowledge, this is the first work to provide a solution for calculating contact forces using non-smooth contact algorithms. This methodology extends the application of these algorithms to the analysis and verification of the mechanical strength of components within a multibody system involving contacts, all within the framework of non-smooth contact dynamics. As a result, this approach not only enables the calculation of key kinematic and dynamic variables, such as displacements, velocities, and accelerations, but also facilitates the study of other engineering phenomena of interest, such as fatigue and wear, or the design and verification of mechanical components using the equations of elasticity theory or material strength.

Appendix A-1

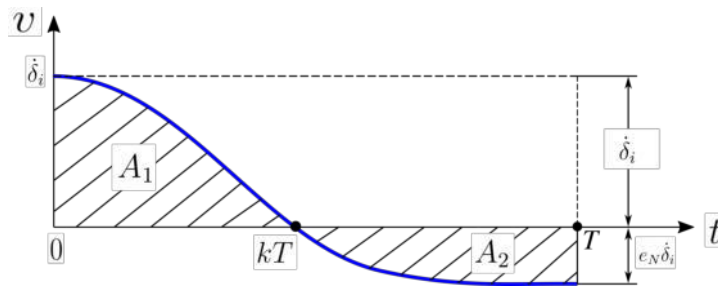


Figura C.26: Relative velocity deformation vs time.

Experimental measurements by other authors [14] have shown that the evolution of interpenetration velocity during impact follows a cubic shape, see Fig. C.3. The method requires the computation of the greyed area Fig. C.26 and the determination of the coefficient k such that this area is approximately zero.

For this purpose, the area under the curve of the relative interpenetration velocity in the period of time of $0 \leq t \leq kT$ will be assumed to be similar to a triangular shape, see Fig. C.26,

$$A_1 = \frac{\dot{\delta}_i kT}{2} \quad (\text{C.43})$$

and for $kT \leq t \leq T$ it will be considered close to a rectangle,

$$A_2 = e_N \dot{\delta}_i(T - kT) \quad (\text{C.44})$$

Therefore, by equating Eqs.(C.43,C.44) yields

$$k = \frac{\alpha e_N}{1 + \alpha e_N} \quad (\text{C.45})$$

with $\alpha = 2$. However, after performing several tests, we proposed to use instead a heuristic value $\alpha = 1.7$, which gives more accurate solutions.

Bibliografía

- [1] V. Acary y F. Bourrier. «Coulomb friction with rolling resistance as a cone complementarity problem». En: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 85 (2021), pág. 104046.
- [2] V. Acary y B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems: Applications in Mechanics and Electronics*. Vol. 35. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [3] V. Acary y B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems: Applications in Mechanics and electronics*. Springer, 2008.
- [4] E. Alizadeh, F. Bertrand y J. Chaouki. «Development of a granular normal contact force model based on a non-Newtonian liquid filled dashpot.» En: *Powder Technology* (2013).
- [5] J. Alves et al. «A comparative study of the viscoelastic constitutive models for frictionless contact interfaces in solids». En: *Mechanism and Machine Theory* 85 (2015), págs. 172-188.
- [6] Bernard B. *Nonsmooth Mechanics*. Springer International Publishing, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-28664-8. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28664-8>.
- [7] M. H. Bordbar y T. Hyppäänen. «Modeling of binary collision between multisize viscoelastic spheres». En: *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* (2007).
- [8] N.V. Brilliantov et al. «The collision of particles in granular systems.» En: *Phys. A Stat.Mech. Appl.* (1996), [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(96\)00099-4](https://doi.org/10.1016/0378-4371(96)00099-4).
- [9] O. Brüls, V. Acary y A. Cardona. «Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized-alpha scheme». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281.0 (2014), págs. 131-161.
- [10] Olivier Brüls, Vincent Acary y Alberto Cardona. «On the Constraints Formulation in the Nonsmooth Generalized-alpha Method». En: *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*. Ed. por Remco Leine, Vincent Acary y Olivier Brüls. Cham: Springer International Publishing, 2018, págs. 335-374.
- [11] S.J. Burns, P.T. Piiroinen y K. Hanley. «Critical time-step for a DEM simulations of dynamic systems using a Hertzian contact model». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 119.5 (2019), págs. 432-451.
- [12] A. Cardona, I. Klapka y M. Geradin. «Design of a New Finite Element Programming Environment». En: *Engineering Computations* 11 (1994), págs. 365-381.
- [13] Q. Chen et al. «A nonsmooth generalized-alpha scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2013), págs. 487-511.
- [14] X. Chen et al. «Experimental and Numerical Analysis on the Impact Wear Behavior of TP316H Steel». En: *Materials* 15.8 (2022).
- [15] E. Corral et al. «Dynamic Modeling and Analysis of Pool Balls Interaction». En: *Proceedings of the 9th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*. Ed. por A. Kecskeméthy y Flores Geu. Vol. 53. Berlin: Springer, 2020, págs. 201-216.

- [16] A. Cosimo et al. «A General Purpose Formulation for Nonsmooth Dynamics with Finite Rotations: Application to the Woodpecker Toy». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16 (3 2021). 031001, págs. 10-10.
- [17] A. Cosimo et al. «A robust nonsmooth generalized- α scheme for flexible systems with impacts». En: *Multibody System Dynamics* 48.2 (2020), págs. 127-149.
- [18] A. Cósimo et al. «On the adaptation of local impact laws for multiple impact problems». En: *Nonlinear Dynamics* 102.4 (2020), págs. 1997-2016.
- [19] P.A. Cundall y O.D.L. Strack. «A discrete numerical model for granular assemblies». En: *Geotechnique* 29 (1979), págs. 47-65.
- [20] S. Ding et al. «A normal contact force model for viscoelastic bodies and its finite element modeling verification». En: *Mechanism and Machine Theory* 181 (2023), pág. 105202.
- [21] S. Ding et al. «Approximate contact force model for viscoelastic materials based on generalized Maxwell model». En: *International Journal of Solids and Structures* 289 (2024), pág. 112645.
- [22] P. Flores y J. Ambrósio. «On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems.» En: *Multibody System Dynamics* 24.1 (2010), págs. 103-122.
- [23] P. Flores, J. Ambrósio y H.M. Lankarani. «Contact-impact events with friction in multibody dynamics: back to basis.» En: *Mechanism and machine Theory* 184 (2023), pág. 105305.
- [24] P. Flores y H.M. Lankarani. *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Springer, Berlin, 2016.
- [25] P. Flores et al. «On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 25.3 (2011), págs. 357-375.
- [26] J. Galvez et al. «A nonsmooth frictional contact formulation for multibody system dynamics». En: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 121.16 (2020), págs. 3584-3609.
- [27] G. Gilardi e I. Sharf. «Literature survey of contact dynamics modelling». En: *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002), págs. 1213-1239.
- [28] C. Glocker. «An Introduction to Impacts». En: *Nonsmooth Mechanics of Solids*. Ed. por J. Haslinger y G.E. Stavroulakis. Vienna: Springer Vienna, 2006, págs. 45-101.
- [29] W. Goldsmith. *Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. Edward Arnold Ltd, 1960.
- [30] R. Hartenberg y J. Denavit. *Kinematic Synthesis of Linkages*. First Edition. McGraw-Hill, 1964.
- [31] T. Hayashi, F.R.E. Crossley y D. Larionescu. «Analog simulations of repetitive impacts». En: *Proceedings 4th World Congress on TMM*. Vol. 4. Newcastle Upon Tyne: Publication Sales, Univ. Newcastle Upon Tyne, 1975, págs. 1073-1077.
- [32] H. Hertz. «On the contact of elastic solids». En: *Z Reine Angew. Math.* 92 (1881), págs. 156-171.
- [33] R. Hooke. *De Potentia Restitutiva, Or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. 1678.
- [34] G. Hu et al. «On the determination of the damping coefficient of non-linear spring-dashpot system to model Hertz contact for simulation by discrete element method». En: *Journal of Computers* 6 (5 2011), págs. 984-988.
- [35] S. Hu y X. Guo. «A dissipative contact force model for impact analysis in multibody dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 35 (2015), págs. 131-151.
- [36] K.H. Hunt y F.R.E. Crossley. «Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact». En: *J. Appl. Mech* 42.2 (1975), págs. 440-445.

- [37] R. Jankowski. «Analytical expression between the impact damping ratio and the coefficient of restitution in the non-linear viscoelastic model of structural pounding». En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* (2006), <https://doi.org/10.1002/eqe.537>.
- [38] R. Jankowski. «Non-linear viscoelastic modelling of earthquake-induced structural pounding». En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* (2005), <https://doi.org/10.1002/eqe.434>.
- [39] B. Jian et al. «A normal contact force approach for viscoelastic spheres of the same material.» En: *Powder Technol* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.03.034>.
- [40] K. Kardel et al. «Experimental and theoretical modeling of behavior of 3D-printed polymers under collision with a rigid rod». En: *Additive Manufacturing* 14 (2017), págs. 87-94.
- [41] S. Khatiwada, N. Chouw y J.W. Butterworth. «A generic structural pounding model using numerically exact displacement proportional damping». En: *Eng. Struct.* (2014). URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.016>.
- [42] H.M. Lankarani y P.E. Nikravesh. «A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems». En: *Journal of Mechanical Design* 112.3 (1990), págs. 369-376.
- [43] E.V. Lens y A. Cardona. «A nonlinear beam element formulation in the framework of an energy preserving time integration scheme for constrained multibody systems dynamics». En: *Computers and Structures* 86.1 (2008), págs. 47-63.
- [44] L. Luo y M. Nahon. «A compliant contact model including interference geometry for polyhedral objects.» En: *J. Comput. Nonlinear Dyn.* (2006), <https://doi.org/10.1115/1.2162870>.
- [45] M. Machado et al. «Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory». En: *Mechanism and Machine Theory* 53 (2012), págs. 99-121.
- [46] J.-J. Moreau. «Bounded variation in time». En: *Topics in Nonsmooth Mechanics* (1988), págs. 1-74.
- [47] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Reg. Soc. Phreases, 1686.
- [48] J.S. Pang y D. Steward. «Differential Variational Inequalities». En: *Mathematical Programming* 113.2 (2008), págs. 345-424.
- [49] F.G. Pfeiffer. «On non-smooth multibody dynamics». En: *J. Multi-Body Dyn* 226.2 (2012), págs. 147-177.
- [50] F.G. Pfeiffer y M.O. Foerg. «On the structure of multiple impact systems». En: *Nonlinear Dyn* 42.2 (2005), págs. 101-112.
- [51] S.D. Poisson. *Traité de Mécanique*. Second Edition. Bachelier, 1833.
- [52] M. Rodrigues da Silva et al. «A compendium of contact force models inspired by Hunt and Crossley's cornerstone work». En: *Mechanism and Machine Theory* 167 (2022), pág. 104501.
- [53] A. Roy y J.A. Carretero. «A damping term based on material properties for the volume-based contact dynamics model». En: *Int. J. Non Linear Mech.* (2012). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.006>.
- [54] H. Safaeifar y A. Farshidianfar. «A new model of the contact force for the collision between two solid bodies». En: *Multibody System Dynamics* 50 (2020), págs. 233-257.
- [55] E. Sánchez et al. «Non-smooth numerical solution for Coulomb friction and sliding, rolling and spinning resistance of spheres applied to flexible multibody system dynamics». En: *Multibody System Dynamics* 59.1 (2023), págs. 69-103.
- [56] R. Seifried, W. Schiehlen y P. Eberhard. «Numerical and experimental evaluation of the coefficient of restitution for repeated impacts.» En: *Int. J. Impact Eng.* 32 (2005), págs. 1-4.

- [57] L. Skrinjar, J. Slavič y M. Boltežar. «A review of continuous contact-force models in multibody dynamics». En: *International Journal of Mechanical Sciences* 145 (2018), págs. 171-187.
- [58] A. Tasora y M. Anitescu. «A complementarity-based rolling friction model for rigid contacts». En: *Procedia Engineering* 48.7 (2013), págs. 1643-1659.
- [59] A. Tasora y M. Anitescu. «A Convex Complementarity Approach for Simulating Large Granular Flows». En: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 5.3 (2010).
- [60] A. Tasora, D. Negruț y M. Anitescu. «Large-scale parallel multi-body dynamics with frictional contact on the graphical processing unit.» En: *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-body Dyn* 8 (2008), págs. 9-45.
- [61] A. Tasora et al. «A parametric study on the dynamic response of planar multibody systems with multiple clearance joints.» En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 53 (2013), págs. 2-12.
- [62] C. Thornton. «Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres». En: *Journal of Applied Mechanics* 64 (1997), págs. 383-386.
- [63] Y. Tsuji, T. Tanaka y T. Ishida. «Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe». En: *Powder Technol.* (1992), [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(92\)88030-L](https://doi.org/10.1016/0032-5910(92)88030-L).
- [64] M.A. Veluswami y F.R.E. Crossley. «Multiple impacts of a ball between two plates, part 1: some experimental observations, part 2: Mathematical modelling». En: *ASME J. Eng. Ind* 97.3 (1975), págs. 820-835.
- [65] G. Wang, L. Wang e Y. Yuan. «Investigation on dynamics performance of multibody system with rough surface». En: *Applied Mathematical Model* 104 (2022), págs. 358-372.
- [66] M.G.R. Wang G. and Faes et al. «Extension of dashpot model with elastoplastic deformation and rough surface in impact behavior, Chaos Solitons Fractals». En: *Chaos Solitons Fractals* 162 (2022), pág. 112402.
- [67] Y.R. Wua, Y.C. Chung e I.C. Wang. «Two-way coupled MBD–DEM modeling and experimental validation for the dynamic response of mechanisms containing damping particles». En: *Mechanism and Machine Theory* 159 (2021), pág. 104257.
- [68] X. Xiong, R. Kikuuwe y M. Yamamoto. «A contact force model with nonlinear compliance and residual indentation.» En: *J. Appl. Mech. Trans. ASME* (2014). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4024403>.
- [69] K. Ye, L. Li y H. Zhu. «A note on the Hertz contact model with nonlinear damping for pounding simulation.» En: *Earthq. Eng. Struct. Dyn* 38.9 (2009), págs. 1135-1142. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.883>.
- [70] J. Yu et al. «An improved compliant contact force model using a piecewise function for impact analysis in multibody dynamics». En: *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-body Dyn* (2020), <https://doi.org/10.1177/1464419319900874>.
- [71] J. Yu et al. «Validation of compliant contact force models for low coefficient of restitution impact». En: *Biosystems Engineering* 218 (2022), págs. 216-228.
- [72] J. Zhang et al. «A continuous contact force model for impact analysis in multibody dynamics». En: *Mechanism and Machine Theory* 153 (2020), pág. 103946.
- [73] J. Zhang et al. «A continuous contact force model for the impact analysis of hard and soft materials». En: *Mechanism and Machine Theory* 177 (2022), pág. 105065.
- [74] Q.J. Zheng, H.P. Zhu y A.B. Yu. «Finite element analysis of the contact forces between a viscoelastic sphere and rigid plane.» En: *Powder Technol.* (2012), <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2012.04.032>.

Doctorado en Ingeniería

Mención mecánica computacional

Título de la obra:

**Resolución Numérica de Problemas
Estructurales Dinámicos por medio
de una Aproximación Dinámica No Suave**

Autora: Eliana Selén Sánchez

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Elementos Finitos, Contacto dinámico no suave,
Fricción, Impactos, Múltiples Impactos,
Fuerza de Contacto, Tensión de contacto,
Sistemas Multicuerpo, Mecanismos, Rodamientos de Bolas.