



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

DOCTORADO EN INGENIERÍA

**MEDIDAS DE INFORMACIÓN Y
ANÁLISIS DE CONECTIVIDAD
DE SEÑALES DE EEG**

Lic. Magaly Belén Catanzariti

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

sinc(i)

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES, SISTEMAS E INTELIGENCIA
COMPUTACIONAL



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

MEDIDAS DE INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE CONECTIVIDAD DE SEÑALES DE EEG

Lic. Magaly Belén Catanzariti

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas
de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2026

Secretaría de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje "El
Pozo",

S3000, Santa Fe, Argentina



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigaciones en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

MEDIDAS DE INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE CONECTIVIDAD DE SEÑALES DE EEG

Lic. Magaly Belén Catanzariti

Lugar de Trabajo:

IMAL

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

Director:

Dr. Diego Mateos

UADER - CONICET

Co-director:

Dr. Hugo Aimar

IMAL -CONICET

Jurado Evaluador:

Dr. Luciano José Zunino

CIOp, UNLP-CONICET

Dr. Pedro Walter Lamberti

FAMAF, UNC

Dr. Jesús Poza Crespo

Universidad de Valladolid, España



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 7 de julio de 2026

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada **“Medidas de Información y Análisis de Conectividad de Señales de EEG.”**, desarrollada por la Lic. Magaly Belén CATANZARITI, en el marco de la Mención “Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas”, certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de la versión digital final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

Dr. Luciano José Zunino

Dr. Pedro Walter Lamberti

Dr. Jesús Poza Crespo

Santa Fe, 7 de julio de 2026

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención “Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas” y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....
Dr. Hugo Aimar
Codirector de Tesis

.....
Dr. Diego Mateos
Director de Tesis



[Signature]
Dr. José Luis Macor
Director de Posgrado
FICH - UNL

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 – Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

DECLARACIÓN LEGAL DEL AUTOR

Esta tesis ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería - Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disposición de sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de la mencionada Biblioteca. Citaciones breves de esta tesis son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para la citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concebidas por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

DEDICATORIA

A mi familia, sostén constante en todas las versiones de mi vida, incluso en aquellas en las que pensé en bajar los brazos.

AGRADECIMIENTOS

A mi gran pilar: mi familia. Cuando comencé este doctorado, mi mundo familiar eran sólo mamá y papá, quienes no sólo sembraron en mí los sueños que hoy se cumplen, sino que me alentaron siempre a estudiar y me sostuvieron en cada paso. Hoy ese mundo creció: tengo al amor de mi vida: mi esposo Cristian y a mi manada hermosa, que completan mi casa y mi corazón. Gracias por sostenerme siempre, por creer en mí incluso cuando yo no podía, y por ser el refugio al que vuelvo para recordar quién soy y por qué hago todo esto.

A mis directores, Hugo y Diego, por su guía constante y por haber ejercido un acompañamiento que fue mucho más que académico. Gracias por la paciencia infinita, por las charlas que ordenan la cabeza y calman las crisis, por enseñarme a pensar mejor y a confiar más. Esta tesis no existiría sin su apoyo y su manera tan humana de dirigir.

A mis amigos de siempre, que son hogar aunque estén lejos. A los amigos que me regaló esta provincia y que se volvieron parte de mi vida. A los amigos que me trajo el doctorado, que hicieron que este camino —técnico, difícil y hermoso— también estuviera lleno de risas, compañía y complicidad. Cada uno dejó una huella en este trabajo.

RESUMEN

Esta tesis aborda el desarrollo y la aplicación de herramientas matemáticas para el análisis de imágenes y señales biomédicas, integrando conceptos de análisis funcional, procesamiento de señales y neurociencia computacional. El trabajo se estructura en dos líneas de investigación complementarias.

La primera línea corresponde al desarrollo de un nuevo método para la comparación de imágenes multidimensionales denominado **Phase Divergence Index (PDI)**. A partir de un marco teórico basado en espacios funcionales, distribuciones temperadas, transformadas de Fourier, Hilbert y Riesz, se construye una representación de fase multidimensional que permite definir un índice sensible a cambios estructurales. El método fue evaluado mediante diferentes experimentos sobre imágenes sintéticas y reales, demostrando robustez frente a variaciones de intensidad, ruido y rotaciones, así como capacidad para detectar diferencias estructurales que no resultan evidentes mediante técnicas convencionales.

La segunda línea de investigación se centra en el **análisis de señales electroencefalográficas (EEG)** mediante herramientas lineales, no lineales y de conectividad funcional. Se emplearon la Densidad Espectral de Potencia (PSD), la Entropía de Permutación (PE), la Complejidad de Lempel–Ziv (LZC), la Complejidad Conjunta de Lempel–Ziv (JLZC), la coherencia espectral y el Phase Lag Index (PLI) para caracterizar la dinámica cerebral en distintos contextos experimentales.

Las metodologías propuestas fueron aplicadas a cuatro bases de datos independientes. En perros se estudiaron los efectos del envejecimiento y de la administración de trazodona sobre la dinámica cerebral durante el sueño, observándose modificaciones en la actividad espectral, la complejidad temporal y la conectividad funcional. En niños se analizaron cambios asociados a tareas creativas, evidenciando una reorganización de la actividad oscilatoria y de la comunicación entre regiones cerebrales. Finalmente, en recién nacidos prematuros se evaluó la evolución de la complejidad cerebral durante la maduración temprana, mostrando que las métricas de complejidad permiten caracterizar tanto la organización temporal como espacial de la actividad neuronal.

Índice general

Capítulo 1. Introducción general	1
Capítulo 2. Espacios de señales analógicas. Señales singulares. Señales que no son funciones. Funciones que no son señales	5
2.1. Introducción	5
2.2. Algunos espacios funcionales	6
2.3. Espacios de funciones suaves	11
2.4. Dualidad	15
Capítulo 3. Espacios de distribuciones de Schwartz, de soporte compacto y generales	19
3.1. Introducción	19
3.2. Distribuciones	20
3.3. Derivación de distribuciones	24
3.4. La distribución valor principal de $\frac{1}{x} \left(v.p. \frac{1}{x} \right)$	28
3.5. Integrales singulares en $\mathbb{R}^n$. Los núcleos de Riesz	31
3.6. Una aproximación a la distribución $v.p. \frac{1}{x}$ desde las funciones analíticas en el plano complejo	35
Capítulo 4. Análisis y síntesis de Fourier de distribuciones de Schwartz temperadas y su aplicación a los núcleos de Hilbert y de Riesz	39
4.1. Introducción	39
4.2. Dilatación, traslación y rotación de distribuciones	40
4.3. Convolución de distribuciones	43
Capítulo 5. Versión de Fourier de las transformadas de Hilbert y de Riesz	69
5.1. Introducción	69
5.2. Transformada de Fourier de la Convolución	69
5.3. Versión frecuencial de H y R_j	70

Capítulo 6. Fase instantánea y fase relativa instantánea. PLI para señales unidimensionales	73
6.1. Introducción	73
6.2. Fase instantánea	73
6.3. Cuantificación global de la diferencia de fases: PLI , IDF	75
Capítulo 7. Nociones de fase puntual, fase relativa y diferencias de fase globales de señales multidimensionales	79
7.1. Introducción	79
7.2. Fase puntual	79
7.3. Cuantificación global de las diferencias de fases n -dimensionales PLI e IDF vectoriales	83
Capítulo 8. Aplicaciones I: IDF E señales bidimensionales (imágenes)	87
8.1. Introducción	87
8.2. Rotaciones	95
Capítulo 9. Revisión de conceptos de Análisis de señales, Medidas de Información y Métodos Estadísticos	103
9.1. Introducción	103
9.2. Densidad Espectral de Potencia (PSD)	103
9.3. Coherencia (C_{xy})	111
9.4. Entropía de Permutación (PE)	112
9.5. Complejidad de Lempel-Ziv (LZC)	115
9.6. Complejidad Conjunta de Lempel-Ziv (JLZC)	119
9.7. Métodos Estadísticos	120
Capítulo 10. Aplicaciones I: Sueño en perros - efectos del envejecimiento	125
10.1. Introducción	125
10.2. Sujetos y metodología	126
10.3. Análisis de datos	130
10.4. Discusión general	137
Capítulo 11. Aplicaciones II: Sueño en perros - efectos de la trazodona	139
11.1. Introducción	139

11.2. Sujetos y metodología	140
11.3. Análisis de datos	141
11.4. Discusión general	149
Capítulo 12. Aplicaciones III: Creatividad en niños	155
12.1. Introducción	155
12.2. Sujetos y metodología	156
12.3. Análisis de datos	158
Capítulo 13. Aplicaciones VI: Estudio de los ciclos de sueño en recién nacidos prematuros	167
13.1. Introducción	167
13.2. Sujetos y metodología	168
13.3. Análisis de datos	169
Capítulo 14. Discusión general	177
Bibliografía	181

Índice de figuras

1. X_v la función característica de un conjunto de Vitali no es una señal analógica y δ_{t_0} la delta de Dirac en t_0 es una señal analógica que no es una función.	6
2. Dos señales g y f muy diferentes aunque ambas en $L^2(\mathbb{R})$.	8
3. Representación gráfica de la ecuación:	
(0.1) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1- x ^2}}, & \text{si } x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$	12
4. $\psi(x) = e^{- x ^2}$	12
1. Representación gráfica del manómetro puntual	19
2. Representación gráfica del resultado $\frac{d x }{dx} = E(x)$	26
3. Representación gráfica de los resultados de $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ y $\frac{d^3}{dx^3}$	27
4. Representación gráfica de $K \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$	28
5. Familia del núcleo de Poisson $P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$ para distintos valores de $y > 0$.	35
6. Núcleo conjugado de Poisson $Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$ para distintos valores de $y > 0$.	36
1. Aproximación al eje real desde el semiplano superior: el punto $z = x + iy$ con $y > 0$ tiende al eje real cuando $y \rightarrow 0^+$.	46
2. El vector e_1 y las rotaciones ρ que lo dejan fijo en la esfera unitaria S^{n-1} .	65
1. Esquema conceptual de la relación entre una señal real $\varphi(t)$ y su función analítica asociada en el semiplano superior. La parte imaginaria en el borde $y = 0$ corresponde a la transformada de Hilbert de $\varphi(t)$.	74

2. Partición del intervalo temporal I en tres subconjuntos I_1 , I_2 e I_3 según el signo de la diferencia $\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)$. Cada subconjunto representa los instantes en los que φ_1 es mayor, igual o menor que φ_2 , respectivamente.	76
1. Ejemplo ilustrativo 1: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.	89
2. Ejemplo ilustrativo 1: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 38,302	89
3. Ejemplo ilustrativo 2: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.	90
4. Ejemplo ilustrativo 2: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 12,566	90
5. Autorretrato de Van Gogh 1: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.	92
6. Autorretrato de Van Gogh 1: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 2,775	92
7. Autorretrato de Van Gogh 2: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.	93
8. Autorretrato de Van Gogh 2: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 2,775	93
9. Autorretrato de Van Gogh 3: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.	94
10. Autorretrato de Van Gogh 3: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 0	94
11. Esquema del procedimiento implementado para la detección de rotación mediante IDFE.	96

12. Imagen de referencia (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.	97
13. Curva del valor del IDFE normalizado en función del ángulo de rotación ρ .	97
14. Imagen de referencia (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.	99
15. Curva del valor del IDFE normalizado en función del ángulo de rotación ρ .	99
16. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.	100
17. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .	100
18. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.	101
19. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .	101
20. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.	102
21. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .	102
1. Ilustración de la familia de funciones $\lambda(\widehat{W})^2(\lambda\xi)$ para distintos valores de $\lambda > 0$.	110
2. Ejemplo ilustrativo del procedimiento de construcción de patrones ordinales para la entropía de permutación en una señal $x_t = 1,5, 2,3, 1,9, 1,6, 2,1$ con dimensión de incrustación $d = 3$ y retardo temporal $\tau = 1$. Se generan los vectores embebidos y se asignan las permutaciones correspondientes π^1, π^2, π^3 según el orden relativo de sus componentes. En la parte inferior se muestran las $d! = 3! = 6$ permutaciones posibles para $d = 3$ y las observadas en la señal se indican mediante un círculo con color coincidente con el vector embebido.	114
1. (A) Ubicación de los electrodos. Se colocaron cuatro electrodos activos de EEG sobre la línea media y las áreas frontal izquierda y derecha (Fz, F3 y F4, respectivamente), además del vértex (Cz). Estos electrodos se representan con un	

-
- punto negro. El electrodo de referencia se colocó sobre la protuberancia occipital externa (Oz; punto rojo). La señal de EOG bipolar se registró mediante dos electrodos ubicados en el arco cigomático izquierdo y derecho, junto al canto lateral de cada ojo (puntos azules). El electrodo de tierra (G) se colocó sobre los músculos temporales izquierdos (punto verde). EMG y ECG también fueron registrados, aunque no se muestran en la figura. (B) Perro durante un registro polisomnográfico utilizando su propia cama. (C) Señales representativas de ECG, EOG, EMG y EEG durante vigilia, somnolencia, sueño NREM y sueño REM. Se observa contaminación del ECG en la señal de EMG. 129
2. PSD promedio a través de los canales en cada estado. Las regiones sombreadas indican los rangos de frecuencia donde se observaron diferencias significativas entre los grupos. 131
 3. Valores de LZC promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos ($* p < 0,05$; $** p < 0,01$) 133
 4. Valores de PE promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos. 134
 5. Gráficos de coherencia (Cxy) de todos los pares de canales en cada estado de sueño. Las áreas sombreadas verticalmente indican los intervalos de frecuencia en los que se encontraron diferencias significativas entre los grupos etarios. 136
 2. PSD promedio a través de los canales en cada estado. Las regiones sombreadas indican los rangos de frecuencia donde se observaron diferencias significativas entre los grupos. 143
 1. (A) Ilustración de la colocación de electrodos para los registros polisomnográficos en perros. Se utilizaron cuatro electrodos activos de EEG ubicados en la línea media y en las regiones frontal izquierda y derecha (Fz, F3 y F4, respectivamente), y en el vértex (Cz). El electrodo de referencia se colocó sobre la protuberancia occipital externa (Oz). Las señales bipolares de EOG se registraron con electrodos ubicados en los arcos cigomáticos izquierdo y derecho, cerca del canto lateral de

cada ojo (puntos azules). Se colocó un electrodo de tierra (G) sobre el músculo temporal izquierdo. También se realizaron registros de EMG y ECG, aunque no se muestran en la figura. (B) Fotografía de un perro durante el registro polisomnográfico mientras descansa en su cama. (C) Señales representativas del estudio polisomnográfico, incluyendo electrocardiograma (ECG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG), que ilustran patrones característicos durante vigilia, somnolencia, sueño NREM y sueño REM. (D) Dos registros representativos de EEG (canales F3 y F4) correspondientes a un perro en condición control y tras la administración de trazodona, mostrados para los distintos estados conductuales.	151
3. Valores de LZC promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos (* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$)	152
4. Valores de PE promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos.	152
5. Gráficos de coherencia (Cxy) de todos los pares de canales en cada estado de sueño. Las áreas sombreadas verticalmente indican los intervalos de frecuencia en los que se encontraron diferencias significativas entre los grupos (Trazodona vs. Control).	153
6. Grafo de conectividad PLI mostrando únicamente las aristas con diferencias significativas entre grupos (Control vs. Trazodona) en cada estado de sueño y banda de frecuencia. Los resultados se clasificaron según el nivel de significancia estadística: $p < 0,05$ (*) y $p < 0,01$ (**)	154
1. Descripción general. (A) Representación del sistema Emotiv. (B) Ejemplo TTCT Figural. (C) Ejemplo TTCT Verbal. (D) Distribución topográfica de electrodos. (E) Señal EEG durante control y tareas.	157

-
2. Mapas topográficos y diagramas de violín de la rPSD por banda y condición. A la izquierda se muestran los topoplots promedio para cada banda y condición: Grupo Control, TTCT Figuras y TTCT Verbal. A la derecha, los diagramas de violín del PSD promedio a través de los canales. Los niveles de significancia obtenidos ($p < 0,001$) se indican con asteriscos (* * *) 160
 3. Análisis de coherencia intrahemisférica (columnas izquierda y derecha) e interhemisférica (columna central). Cada gráfico muestra la coherencia entre los canales indicados en el rango [0–50] Hz. Las zonas sombreadas indican diferencias significativas entre las condiciones ($p < 0,05$). 163
 1. Topoplots de LZC organizados por estado de sueño (horizontal) y por grupo etario (vertical). A la derecha de cada fila se muestran los mapas de p-value entre los estados Activo y Calmo, y en la parte inferior los p-values entre los grupos extremos de edad. 171
 2. Topoplots de LZC organizados por banda de frecuencias y por edad gestacional corregida. En la parte superior se presentan los mapas correspondientes a frecuencias bajas ([1–16] Hz) y, debajo, los de frecuencias altas ([16–60] Hz). Dentro de cada banda, las filas representan los grupos etarios (30–31, 32–33 Y 34 – 35 semanas), mientras que las columnas muestran los estados de sueño Activo, Indeterminado y Calmo. 174
 3. Distribución de los valores de JLZC por zona cortical y por estado de sueño (Activo, Indeterminado y Calmo), organizada según la edad gestacional corregida de cada grupo (30–31, 32–33 y 34–35 semanas). Cada color identifica una zona distinta. 175
 4. Distribución de los valores de JLZC según lateralidad hemisférica (izquierdo vs. derecho) y estado de sueño (Activo, Indeterminado y Calmo), organizada por grupos de edad gestacional corregida (30–31, 32–33 y 34–35 semanas). Cada color corresponde a uno de los hemisferios analizados. 175

Índice de tablas

1. Comparativa de IDFE entre subcuadros de las imagenes I_o y I_m del Ejemplo Ilustrativo 1 (8.1.1) para $N = 8 \times 8$ subcuadros. 91
2. Comparativa de IDFE entre subcuadros de las imagenes I_o y I_m del Ejemplo Ilustrativo 2 (8.1.1) para $N = 16 \times 16$ subcuadros. 91
3. Valores del Índice de Divergencia de Fase Escalar (IDFE) normalizado para cada ángulo de rotación ρ . 98

Introducción general

En áreas como la ingeniería y la neurociencia aplicada, el enfoque suele centrarse en los aspectos experimentales y computacionales, lo cual es natural dadas sus motivaciones. Sin embargo, un sustento matemático claro y riguroso puede enriquecer significativamente la interpretación de los resultados. Desde mi formación como matemática, esta tesis busca poner en valor la contribución teórica como complemento de las aplicaciones prácticas. En particular, se adoptan dos líneas de estudio complementarias: por un lado, el análisis de señales electroencefalográficas (EEG) en distintos contextos cognitivos y poblaciones; y por otro, el desarrollo de una herramienta matemática novedosa que posibilita un tratamiento riguroso de imágenes y de otros sistemas multidimensionales, lo que pone de manifiesto la flexibilidad y generalidad del marco teórico propuesto.

La **electrofisiología** es una rama de la neurociencia que estudia cómo las funciones cognitivas —como la percepción, la memoria, el lenguaje, las emociones y la creatividad— se encuentran respaldadas por la actividad eléctrica de poblaciones neuronales. Este enfoque combina la medición directa de la actividad cerebral con modelos computacionales y análisis matemáticos rigurosos, permitiendo establecer vínculos entre fenómenos observables y teorías subyacentes del funcionamiento cerebral. La investigación en este campo abarca desde estudios centrados en paradigmas cognitivos específicos hasta análisis detallados de la dinámica de redes neuronales permitiendo una comparación rigurosa entre condiciones, estados y poblaciones, siendo la matemática un lenguaje esencial.

En esta tesis se adopta una perspectiva integradora que combina fundamentos matemáticos avanzados con aplicaciones experimentales en distintas poblaciones. Se estudian espacios de señales analógicas que permiten manejar señales singulares, discontinuas o no integrables en el sentido clásico. Las operaciones sobre estas señales se formalizan mediante convoluciones generalizadas, transformadas de Hilbert y de Riesz, siguiendo desarrollos clásicos de Cauchy, Riemann y Calderón-Zygmund, garantizando propiedades de invariancia frente a traslaciones, dilataciones y rotaciones. Este enfoque riguroso asegura

una representación matemática consistente de la actividad neuronal, incluso en presencia de ruido, discontinuidades o ambigüedad temporal, y proporciona una base sólida para la definición y aplicación de métricas de complejidad y conectividad sobre señales EEG y conjuntos de datos multidimensionales.

A partir de esta base teórica, se aplicaron diversas métricas de análisis de señales para caracterizar la dinámica cerebral, incluyendo Entropía de Permutación (*PE*), Complejidad de Lempel-Ziv (*LZC*), Complejidad Conjunta de Lempel-Ziv (*JLZC*), Coherencia (C_{xy}), Phase Lag Index (*PLI*) y Densidad Espectral de Potencia (*PSD*). Estas métricas fueron implementadas sobre registros de EEG en distintas poblaciones: perros adultos bajo condiciones de sueño normales y bajo efecto de trazodona, bebés prematuros durante sueño y vigilia, y niños en edad escolar durante tareas creativas. Este enfoque permitió explorar tanto estados cerebrales fundamentales, como el sueño, que facilita la consolidación de la memoria y la regulación emocional, como funciones cognitivas complejas, como la creatividad —entendida como la generación de ideas novedosas y la flexibilidad en la resolución de problemas—. Los resultados obtenidos muestran que las métricas tradicionales de complejidad y conectividad aportan información complementaria sobre la dinámica cerebral. El abordaje con un marco matemático riguroso permitió interpretar estos resultados de manera más precisa y consistente, destacando cómo una fundamentación teórica sólida en análisis de señales facilita la comprensión de fenómenos neuronales complejos y su variabilidad entre estados y poblaciones.

Además, la contribución central de la tesis es el desarrollo del Phase Divergence Index (PDI), un nuevo método de análisis multidimensional de señales que cuantifica la divergencia de fase entre regiones dadas dos señales. El PDI se fundamenta en la extensión de la diferencia de fase al dominio multidimensional mediante la transformada de Riesz, siendo insensible a variaciones de intensidad y capaz de detectar diferencias y rotaciones en imágenes. Se presenta el desarrollo matemático del índice, su implementación computacional y su validación en contextos experimentales, demostrando su utilidad para detectar patrones que otras métricas clásicas no capturan. Por otro lado, el PDI, aunque aún no se ha aplicado a señales neuronales, demuestra su utilidad en el análisis de imágenes multidimensionales, permitiendo detectar diferencias de fase y rotaciones de manera insensible a la intensidad.

En conjunto, esta tesis demuestra que la integración de herramientas matemáticas avanzadas con registros EEG permite avanzar en la comprensión de la dinámica neuronal durante estados complejos como el sueño y procesos cognitivos como la creatividad. Además, la propuesta del PDI introduce un enfoque novedoso para el análisis multidimensional de señales, validado en imágenes complejas, que resalta la potencial aplicabilidad de métricas avanzadas para capturar diferencias de fase y patrones espaciales que otras herramientas clásicas no detectan.

Capítulo 2

Espacios de señales analógicas. Señales singulares. Señales que no son funciones. Funciones que no son señales

2.1. Introducción

Es usual, y muy importante para las aplicaciones, el punto de vista que nos permite describir las señales analógicas* como funciones de una o varias variables. En este capítulo nos concentraremos en el caso de señales unidimensionales. El modelo más sencillo nos invita a considerar a una señal unidimensional y analógica como una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable $t \in I$, que podemos interpretar como el tiempo, cuyo dominio I es un intervalo de números reales, una semirrecta, toda la recta real o un subconjunto en principio cualquiera de $\mathbb{R}$. Con esta definición tan general para una señal analógica, deberíamos aceptar que la función característica (indicatriz) de los números racionales $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es una señal analógica. Precisamente, que $f(x) = 1$ si $x \notin \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$. La densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos muestra que una tal señal no podría ser continua en ninguno de los puntos de su dominio. Si por otra parte se atendiera a propiedades de integrabilidad en vez de propiedades de suavidad, puesto que, siendo numerable $\mathbb{Q}$ tiene la longitud (medida de Lebesgue unidimensional) igual a cero, resulta que $\int_b^a f(t)dt = b - a$ y f es, a los efectos integrales, lo mismo que la función idénticamente igual a uno: $\tilde{f}(t) = 1$, para todo $t \in I$. Ejemplos como el precedente y construcciones más sofisticadas de subconjuntos no medibles en el sentido de Lebesgue, los llamados conjuntos de Vitali, muestran que al considerar que las señales analógicas son las funciones de una variable es un exceso. Hay funciones que no son señales, no sólo porque afortunadamente “natura non dat” ese tipo de señales, sino y sobre todo porque estaríamos incapacitados de todo análisis de ese tipo de señales. Tal vez lo más notable es que la clase de todas las funciones no sólo es excesiva, sino que también es insuficiente, escasa. En efecto no hay manera de ver un impulso instantáneo, la delta de Dirac en t_0 como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. El argumento

*Señales continuas en el tiempo y en amplitud, que pueden tomar infinitos valores dentro de un rango.

heurístico que es el de Dirac [1] de definir $\delta_{t_0} = 0$ si $t \neq t_0$ y $\delta_{t_0}(t_0) = +\infty$ no sirve ya que la función así definida tiene integral de Lebesgue igual a cero: $\int_{\mathbb{R}} \delta_{t_0} dt = 0$. Y este hecho está en franca contradicción con el hecho esperado del modelo δ_{t_0} es la masa (o impulso) unitario en t_0 . Así que deberíamos tener $\int_{\mathbb{R}} \delta_{t_0} dt = 1$ y como función esto no ocurre.

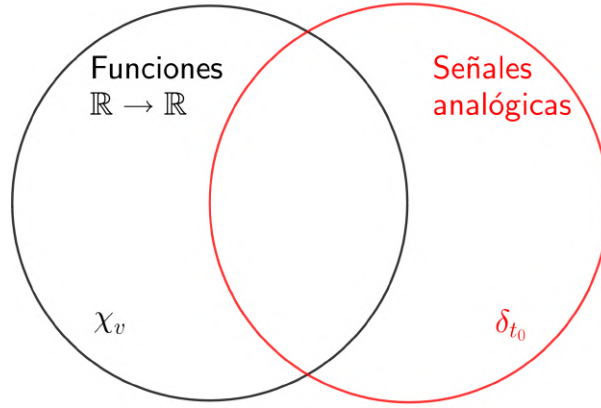


FIGURA 1. χ_v la función característica de un conjunto de Vitali no es una señal analógica y δ_{t_0} la delta de Dirac en t_0 es una señal analógica que no es una función.

En esta tesis veremos y usaremos frecuentemente varios objetos que parecen funciones, pero que no lo son. La delta de Dirac no es una aguja en un pajar. Más bien es al revés, las señales que son funciones de la variable continua t son agujas perdidas en el pajar de las distribuciones de Schwartz. En particular, la definición de fase instantánea de una señal dada, sólo puede definirse adecuadamente a través de una convolución de la señal analógica con una distribución de Schwartz que no es una función. Veremos con el mayor detalle posible que la transformada de Hilbert de una señal analógica $f(t)$ es la convolución de f con la distribución $v.p. \frac{1}{x}$ (léase valor principal de $\frac{1}{x}$) que no es una función. Cuando introduzcamos en el Capítulo 3 los conceptos necesarios para construir nuestro método llamado Índice de Divergencia de Fase (*IDF*) y los mismos problemas deberán ser resueltos en dimensiones mayores. Abordaremos en detalle conceptos.

2.2. Algunos espacios funcionales

Seguimos en el contexto de señales unidimensionales. No hay dudas sobre la importancia de los métodos del álgebra lineal en el desarrollo de casi todas las disciplinas de la ciencia moderna. El álgebra lineal clásica provee herramientas contundentes para estudiar operadores y modelos de dimensión finita. Los espacios vectoriales reales de dimensión

finita, como lo es por ejemplo el espacio de todos los polinomios reales de grado menor que n , se identifican naturalmente con $\mathbb{R}^n$ e inmediatamente todos los teoremas del álgebra y los algoritmos están a nuestra disposición para ser usados en una diversidad innumerable de situaciones. Algo muy especial ocurre en $\mathbb{R}^n$ que en general pasa inadvertido hasta que nos topamos con espacios de dimensión infinita. La “niña terrible” es la dualidad. Definiremos precisamente el dual de un espacio vectorial y de un espacio funcional. Toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita es continua. Y, para sorpresa de la ciencia y sus cultores, esta diferencia fundamental entre el caso finito dimensional y el infinito dimensional, que luce como una debilidad, L. Schwartz la convierte en una notable fortaleza cuando desarrolla la teoría de las distribuciones. Nosotros seguiremos llamándole “distribuciones de Schwartz” para distinguirlas de las distribuciones de probabilidad que también usamos en otros momentos de esta tesis. No siempre ocurre en dimensión infinita que un espacio y su dual son esencialmente distintos. Los espacios de Hilbert son esa excepción. No es posible construir una medida en $\mathbb{R}$ que sea invariante por traslaciones, que la medida de cualquier intervalo sea su longitud y que sea numerable aditiva de modo que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ se puedan medir. La familia maximal que cumple todas esas propiedades es la de los conjuntos medibles Lebesgue. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si lo son los conjuntos de nivel $\{t \in \mathbb{I} : f(t) > \lambda\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$(2.1) \quad L^2(\mathbb{I}) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } \int_{\mathbb{I}} |f(t)|^2 dt \right\}$$

el espacio de Lebesgue de las funciones de cuadrado integrable. Resulta un espacio de Hilbert con el producto escalar (o interno) $\langle f, g \rangle = \int f(t)g(t)dt$. Es decir L^2 es completo

con la norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{I}} |f(t)|^2 dt}$. Notar que, si por ejemplo, $I = \mathbb{R}$, las funciones $f_n(t) = x_{(n, n+1)}(t)$ con $n \in \mathbb{Z}$ están en $L^2(\mathbb{R})$, son linealmente independientes y son infinitas. Por lo tanto el espacio $L^2(I)$ no tiene dimensión finita. Hace 100 años cuando Heisenberg, Bohr y Schrödinger ponían las bases de la mecánica cuántica, el espacio L^2 se convirtió en el habitat natural de las funciones de onda de esa todavía asombrosa teoría física. El espacio $L^2(\mathbb{R})$ contiene funciones muy buenas, en el sentido de la regularidad y el tamaño, como lo es por ejemplo la función Gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$. Pero también

contiene singularidades como por ejemplo

$$(2.2) \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \frac{x_{[-1,1]}(t-k)}{|t-k|^{\frac{1}{4}}}$$

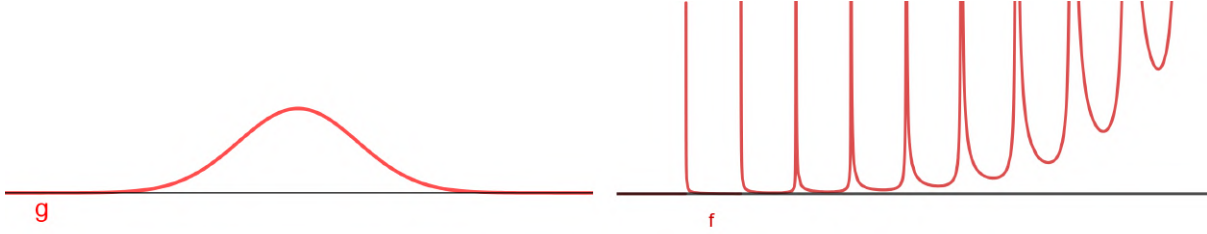


FIGURA 2. Dos señales g y f muy diferentes aunque ambas en $L^2(\mathbb{R})$.

Resulta claro que $g \in L^2(\mathbb{R})$ ya que $g^2(t) = e^{-2t^2}$ es integrable. Para ver que $f \in L^2(\mathbb{R})$ usamos la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_2$ y tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x_{[-1,1]}^2(t-k)}{|t-k|^{\frac{1}{2}}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x_{[-1,1]}^2(\tau)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \\ &= 2 \left(1 + 2 \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Notar que en la estimación prodecente de la singularidad en cada punto es del tipo $|x-k|^{-\frac{1}{4}}$. Cualquier singularidad de la forma $|x-k|^{-\alpha}$ con $\alpha < \frac{1}{4}$ produciría funciones de $L^2(\mathbb{R})$. Pero para $\alpha \geq \frac{1}{2}$ la singularidad es excesiva y la señal asociada ya no estaría en $L^2(\mathbb{R})$. Así por ejemplo, en $\mathbb{R}$, $\frac{1}{|x|}$ y $\frac{1}{x}$ no están en $L^2(\mathbb{R})$. Nisiquiera en $L^1(\mathbb{R})$. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos, generalizando $L^2(I)$,

$$(2.3) \quad L^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } \int_I |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

Los espacios $L^p(I)$ con $p \neq 2$ ya no son de Hilbert (no tienen un producto interno o escalar). Pero si son de Banach, normados y completos, con las normas

$$(2.4) \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

El espacio de las funciones f esencialmente acotadas (acotadas con excepción de algún conjunto de medida nula) es el espacio $L^\infty(I)$, normado por

$$(2.5) \quad \|f\|_\infty = \inf \{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in I\}.$$

Notar que, si entendemos f como una señal analógica, su pertenencia a L^∞ corresponde a amplitud acotada.

Si $\mathcal{C}(I)$ denota las funciones continuas en I , e I es un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, $I = [a, b]$, entonces $\mathcal{C}(I) \subset L^\infty(I)$. Además como $\|f\|_{\mathcal{C}(I)} = \max_{t \in I} |f(t)|$, resulta que $\|f\|_{\mathcal{C}(I)} = \|f\|_\infty$ si $f \in \mathcal{C}(I)$.

Desde el punto de vista de las normas y de la completitud, en el sentido de la convergencia de las sucesiones fundamentales o de Cauchy, todos los espacios $L^p(I)$ son de Banach, normados y completos. Sin embargo, $L^2(I)$ es diferente a todos. No sólo por la existencia de un producto interno que permite y habilita mucha más geometría, nociones de ángulo y de ortogonalidad, etc., sino, sobre todo por la “estabilidad” en $L^2(I)$ del análisis de Fourier y por la dualidad, temas que consideramos en próximos capítulos.

Los espacios de Lebesgue cumplen también un notable papel en la transición entre lo analógico y lo discreto. En efecto, toda la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue se puede poner en un contexto único que incluye variables continuas y variables discretas. Este punto de vista permite abordar los problemas y las técnicas de discretización de señales analógicas, e incluso aquellos de “analogización” de señales que son esencialmente discretas desde una perspectiva teórica coherente y unificada. Una subfamilia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto cualquiera X es una σ -álgebra si $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es cerrada por complementación y uniones numerables. Dados un conjunto X y una σ -álgebra $\mathcal{F}$ de partes de X una medida en $\mathcal{F}$ es una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para toda la sucesión $\{E_i : i \leq 1\}$ de elementos de $\mathcal{F}$ que son disjuntos de a pares: $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. A partir de la definición natural

de integral para funciones simples en $(X, \mathcal{F}, \mu)$ del tipo $f(x) = \sum_{j=1}^J \alpha_j x_{E_j}(x)$, E_j en $\mathcal{F}$,

como $\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \mu(E_j)$, se puede definir bien la integral de funciones positivas medibles ($\{x \in X : f(x) > \lambda\} \in \mathcal{F}, \forall \lambda$) y entonces, también los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$(2.6) \quad L^p(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

son espacios de Banach (normados y completos) con $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$. Otra vez, aún en este contexto abstracto para el dominio de las “señales” f , el caso $p = 2$ es de Hilbert con el producto escalar interno $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x) d\mu(x)$. Y, otra vez, los conceptos de bases ortonormales adquieren sentido en este contexto y también los aspectos centrales de dualidad a los que volveremos luego. Restringiremos, para que sigan valiendo teoremas centrales de Tonelli y Fubini, nuestra atención a espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ que son σ -finitos, es decir, tales que $X = \bigcup_{k \geq 1} F_k$, $F_k \in \mathcal{F}$ y $\mu(F_k) < \infty \forall k$. Tal es el caso de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ que sin ser finita es σ -finita ya que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \geq 1} B(0, k)$,

donde $B(0, k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\bar{x}|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 < k^2 \right\}$ es bola de radio k centrada en el origen que tiene volumen finito para cada k , aunque no acotado uniformemente.

Un caso particular importante de espacio abstracto de medida son los espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ que son espacios de medida con la condición adicional $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.

Una discretización natural de la recta real $\mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros de cualquier signo. Pero también lo es $h\mathbb{Z} = \{hm : m \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$ que podemos tomar tan chico como sea necesario para poder asegurar que todo número real está muy cerca de alguno de los elementos de $h\mathbb{Z}$. Tomando $X = h\mathbb{Z}$, $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos de $h\mathbb{Z}$ y $\mu_h(E) = h\#(E)$, donde $\#(E)$ denotador cardinal (número de elementos de E), tenemos que $(h\mathbb{Z}, \mathcal{F}, \mu_h)$ es un espacio de medida. La teoría de distribuciones de Schwartz que desarrollaremos después, nos permitirá, entre otras cosas, probar que como la intuición nos sugiere $\mu_h \rightarrow$ medida de Lebesgue cuando $h \rightarrow 0$. Notemos que el producto

escalar en $L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{F}, \mu_1)$ por ejemplo, entre f y $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$(2.7) \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{Z}} f(x)g(x)d\mu_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_k$$

donde $f_k = f(k)$ y $g_k = g(k)$ con la notación usual para sucesiones.

2.3. Espacios de funciones suaves

En la sección 2.2 hemos introducido los espacios funcionales (espacios de señales analógicas e incluso discretas) de Lebesgue. Hemos mostrado con un par de ejemplos elementales que aún el “mejor” de esos espacios, el espacio L^2 , contiene funciones muy buenas como la Gaussiana pero también funciones muy malas (por su pobre regularidad) como lo es $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} \frac{x_{[-1,1]}(t-k)}{|t-k|^{\frac{1}{4}}}$, u otras construcciones similares en las que las singularidades se acumulen. Digamos que este tipo de singularidades infinitas no son típicas de señales reales en las que, por ejemplo, estemos midiendo un potencial eléctrico como función del tiempo. Introduciremos ahora algunos espacios funcionales “en el otro extremo”. Es decir espacios de funciones extremadamente suaves que tampoco darán un modelo “realista” de señales físicas pero que servirán en la Sección 2.4 siguiente para establecer la dualidad que nos permitirá mejorar el modelo de representación de señales por espacios distribucionales. Como veremos las funciones suaves y localizadas, con soportes chicos o, si se quiere con pequeña varianza serán los sustitutos de los “puntos” y los “instantes” en la formulación clásica del análisis. Tanto así es que a este tipo de funciones se las llama **“test functions”**, **“funciones de testeo”** o **“funciones de prueba”**. Los correspondientes espacios funcionales, o espacios de funciones de prueba, tendrán que tener dos atributos: álgebra y topología. Es decir, tendremos que construir espacios vectoriales de funciones test que además tengan al menos una noción de convergencia que nos permita definir funciones lineales y continuas sobre ellos. Nos ocuparemos de dos de esos espacios de funciones de prueba: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}$ con $\mathcal{D}$ contenido continuamente en $\mathcal{S}$. Una función típica de (D) será

$$(2.8) \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

con $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,

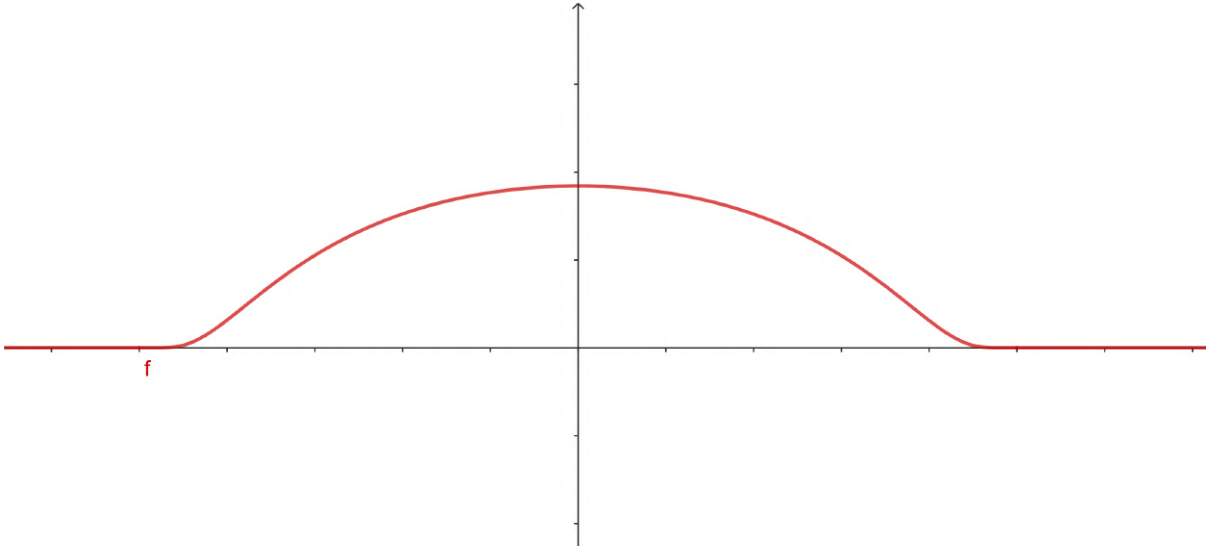


FIGURA 3. Representación gráfica de la ecuación:

$$(2.9) \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Claro que φ también estará en $\mathcal{S}$ ya que $\mathcal{D}$ será un subespacio de $\mathcal{S}$, pero una función de $\mathcal{S}$ que no está en $\mathcal{D}$ es la gaussiana $\psi(x) = e^{-|x|^2}$, Denotaremos con $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty$

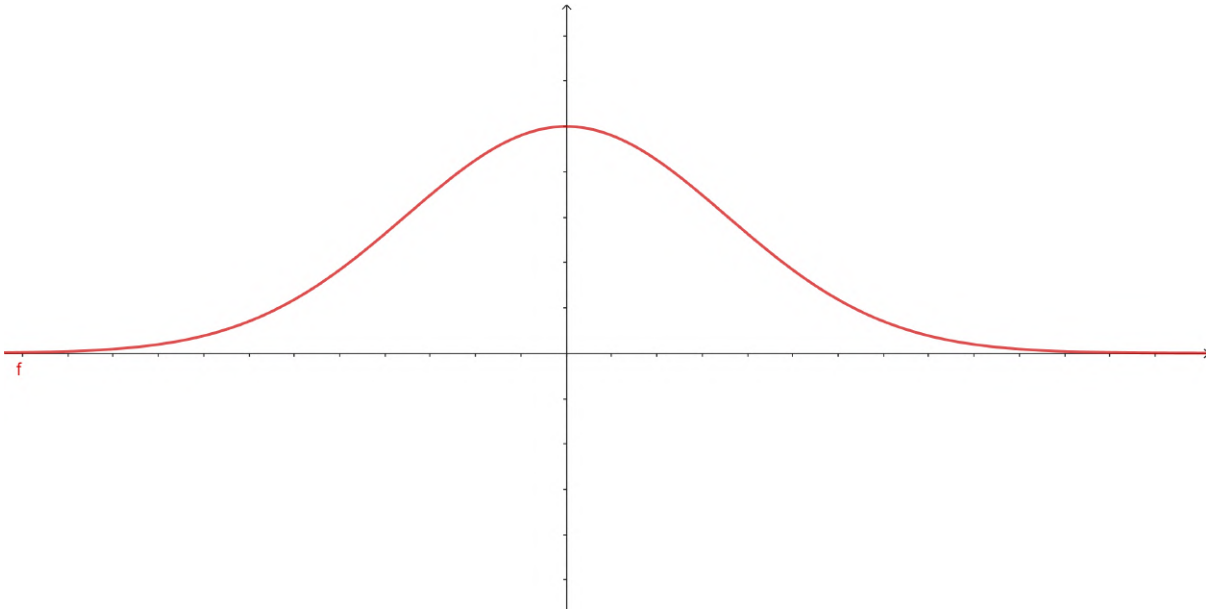


FIGURA 4. $\psi(x) = e^{-|x|^2}$

al conjunto de todas las funciones $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables donde

$\mathbb{C}$ denota, en general, los números complejos. Precisemos, $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{E}$ es el espacio de todas las funciones, campos escalares en $\mathbb{R}^n$, que tienen derivadas continuas de todos los órdenes. Como estamos en $\mathbb{R}^n$, una derivada parcial cualquiera de ϕ debe contar cuántas veces se la deriva con respecto a x_1 , cuántas con respecto a x_2 , etcétera. Puesto que tendremos la continuidad de las derivadas de cada nivel, el orden preciso del cálculo de las derivadas no es relevante. Esto permite una notación simple. Sea $\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con α_i entero no negativo

$$(2.10) \quad \partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ y si $\alpha_i = 0$ para algún $i \rightarrow \{1, \dots, n\}$ significa que no hay ninguna derivada con respecto a x_i . Usando esta misma notación para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ es el monomio de grado $|\alpha|$ determinado por α . Así un polinomio de grado $\leq M$ en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir de manera sencilla como

$$(2.11) \quad P(x) = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha x^\alpha,$$

donde $M \in \mathbb{N}$ denota el grado máximo y α es un multiíndice con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Y, el gradiente de una $\varphi \in \mathcal{E}$ será el vector cuya i -ésima componente es ∂^{e_i} , $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ el i -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Es claro que $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar usuales entre funciones. En vez de definir una topología en $\mathcal{E}$, daremos una definición de convergencia de sucesiones. Una sucesión $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ en $\mathcal{E}$ si y sólo si para todo multiíndice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ se tiene que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$

$$(2.12) \quad \partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{K} \partial^\alpha \varphi,$$

en otras palabras, $\partial^\alpha \varphi_k$ converge a $\partial^\alpha \varphi$ uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{R}^n$. El espacio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (por Schwartz) es el conjunto de todas las funciones de $\mathcal{E}$ tales que todas sus derivadas son “chicas en el infinito”. Precisamos $\varphi \in \mathcal{S}$ si y sólo si $\varphi \in \mathcal{E}$ y además

$$(2.13) \quad \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty < \infty$$

para todos α y $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. No es difícil ver que $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$. La noción de convergencia en $\mathcal{S}$ también está dada por los operadores de multiplicación por monomios x^α de derivación $\partial^\beta : \{\varphi_k : k \geq 1\} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si

$$(2.14) \quad x^\beta \partial^\beta \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial^\beta \varphi,$$

uniformemente en todo el espacio. Así tenemos tres espacios vectoriales topológicos completos, ninguno es de Banach, ni normado, y menos aún de Hilbert, claro, que son $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ y que satisfacen $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ donde las inclusiones son continuas. Es decir, $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$ y si una sucesión $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ y si una sucesión $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. Por consiguiente, también, $\mathcal{D}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ y si $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. Los tres $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ son de dimensión infinita ya que $\mathcal{D}$ lo es, como puede verse trasladando la función de $\mathcal{D}$ de nuestro ejemplo introductorio, $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema infinito linealmente independiente. Pero en realidad las funciones de $\mathcal{D}$ son tantas que alcanzan a aproximar con cualquier orden de aproximación a cualquier función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$. Es decir, $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$ y si una sucesión $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ y si una sucesión $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. Por consiguiente, también, $\mathcal{D}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ y si $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, entonces $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. Los tres $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ son de dimensión infinita ya que $\mathcal{D}$ lo es, como puede verse trasladando la función de $\mathcal{D}$ de nuestro ejemplo introductorio, $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema infinito linealmente independiente. Pero en realidad las funciones de $\mathcal{D}$ son tantas que alcanzan a aproximar con cualquier orden de aproximación a cualquier función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

TEOREMA 2.3.1. *$\mathcal{D}$ es denso en L^p ($1 \leq p < \infty$). Precisamente para toda $f \in L^p$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$*

No probaremos este teorema aunque su demostración no es difícil y se basa en argumentos de truncación y regularización por convolución que veremos en el capítulo siguiente. El resultado precedente muestra que en las normas de Lebesgue las funciones de prueba están tan cerca como se quiera de cualquier función de los espacios de Lebesgue. También es simple ver que $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$, $1 \leq p < \infty$. Por consiguiente $\mathcal{D} \hookrightarrow L^p$.

Aunque no ocurre lo mismo con $\mathcal{E}$ ya que, por ejemplo, los polinomios son infinitamente diferenciables pero en general no integrables ni acotados.

2.4. Dualidad

Los espacios de funciones que vimos en las dos secciones precedentes, o si se quiere espacios de señales analógicas, reúnen a las funciones por dos características bien diferenciadas. Los espacios de Lebesgue se basan en propiedades de integrabilidad de las funciones, los espacios de Schwartz $\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$ contemplan la suavidad y el decaimiento en el infinito (la duración) de las señales. Si bien sólo los de Lebesgue son de Banach, normados y completos, y sólo uno de ellos L^2 es de Hilbert, los espacios de Schwartz son espacios vectoriales topológicos completos. Es decir que en todos los espacios considerados podemos definir dual algebraico y dual topológico. Sea, en general, E un espacio vectorial topológico y sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. El dual algebraico de E es el espacio E^* de todos los funcionales lineales $\Lambda : E \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(2.15) \quad E^* = \{\Lambda : E \rightarrow \mathbb{C} / \Lambda \text{ es lineal}\}$$

Cuando E es de dimensión finita, que no es el caso de los espacios de Lebesgue ni de Schwartz, todo funcional lineal es continuo. Pero en general esto no es cierto y un subespacio vectorial E' de E^* será el dual que necesitaremos usar. El dual topológico de E es el espacio E' de todos los funcionales lineales y continuos $T : E \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(2.16) \quad E' = \{T : E \rightarrow \mathbb{C} / T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Cuando E es de dimensión finita, como todo funcional lineal es continuo, tenemos $E' = E^*$ y ambos son de la misma dimensión que E , por consiguiente pueden identificarse los tres $E \sim E' = E^*$. Pero, notable y afortunadamente, no ocurre lo mismo en el caso en que E tenga dimensión infinita. Algunos ejemplos simples muestran ya la situación general. Nos limitaremos a espacios de Lebesgue y de Schwartz, aunque las familias de espacios de Triebel-Lizorkin y de Besov que incluyen a los de Sobolev, entre otros, muestran una profusa variedad de funciones de interés. Sólo tenemos que notar que la continuidad de funcionales T sobre espacios de Lebesgue viene dada por la norma en estos espacios, mientras que para los espacios de Schwartz la continuidad debe verificarse secuencialmente

con las tres nociones de convergencia consideradas en los espacios $\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$. Cuando consideramos los espacios L^p , las desigualdades de Cauchy-Schwartz y de Hölder ayudarán a hacer simple la prueba de continuidad. Por ejemplo, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es una señal analógica en $\mathbb{R}$ dada y de cuadrado integrable, resulta que

$$T_f : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$(2.17) \quad T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$$

está en $(L^2(\mathbb{R}))'$ ya que resulta lineal,

$$\begin{aligned} T_f(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)) dt \\ &= \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} f(t)g_1(t) dt + \alpha_2 \int_{\mathbb{R}} f(t)g_2(t) dt \\ &= \alpha_1 T_f(g_1) + \alpha_2 T_f(g_2) \end{aligned}$$

y también es continua, ya que por la desigualdad de Schwartz

$$|T_f(g)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \right| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

por consiguiente, si $g_k \xrightarrow{L^2} g$, tendremos que, por la linealidad,

$$|T_f(g_k) - T_f(g)| = |T_f(g_k - g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g_k - g\|_2,$$

que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Por consiguiente $T_f \in (L^2(\mathbb{R}))'$ el dual topológico de $L^2(\mathbb{R})$. Los elementos de $(L^2(\mathbb{R}))'$ también son un espacio normado por

$$(2.18) \quad \|T\|_{O_p} = \sup_{\|g\|_2=1} |T(g)|$$

La desigualdad precedente para $|T_f|$ prueba que $\|T_f\|_{O_p} \leq \|f\|_2$. El resultado más relevante para la teoría de $L^2(\mathbb{R})$ (o de $L^2(\mathbb{R}^n)$) y su dualidad es el Teorema de Representación de Riesz que enunciamos formalmente.

TEOREMA 2.4.1. *Sea $T \in (L^2)'$, entonces existe una única $f \in L^2$ tal que*

$$(2.19) \quad T(g) = \langle g, f \rangle_{L^2}$$

Además $\|f\|_2 = \|T\|_{Op}$.

En otras palabras $(L^2)' = L^2$. Es decir, L^2 se comporta, desde el punto de vista de la dualidad, como si fuera, aunque no lo es, de dimensión finita. Cuando $p \neq 2$, $1 \leq p < \infty$, la situación ya se manifiesta diferente aunque todavía preserva la clase de Lebesgue. La clave está en la desigualdad de Hölder. Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notar que si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y si $p = 2$, entonces $q = 2$. La desigualdad de Hölder asegura la integrabilidad del producto de una función de L^p por otra de L^q y provee una estimación crucial en términos de las normas. Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces

$$(2.20) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^n} f g dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Notar que si $p = 2$, q también es 2 y la desigualdad de Hölder es la de Schwartz. Por otra parte, si $g \in L^q$ tenemos que

$$(2.21) \quad T_g : L^p \rightarrow \mathbb{C}, T_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f g dx,$$

resulta un funcional en $(L^p)'$. Esto dice que $L^q \subset (L^p)'$. Una extensión del Teorema de Representación de Riesz prueba que $L^q = (L^p)'$. En efecto, si $T \in (L^p)'$, entonces existe una única $g \in L^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tal que $T(f) = \int_{\mathbb{R}} f g dx$ para toda $f \in L^p$ y además $\|T\|_{Op} = \|g\|_q$. Cuando el dominio de integración es de medida finita, supongamos por ejemplo que tenemos el dominio en el intervalo $[0, 1] \in \mathbb{R}$, notemos que la función $g(x) = x^{-\alpha}$ pertenece a $L^q([0, 1])$ si y sólo si $\alpha < \frac{1}{q}$. Por lo tanto, cuando q se aproxima a uno, cualquier $x^{-\alpha}$ con $\alpha < 1$ está en algún L^q . Pero en la dualidad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cuando q se aproxima a uno, p crece a infinito. Y las funciones potenciales $x^{-\alpha}$ sólo estarán en $L^p[0, 1]$ si α está muy cerca de cero. En otras palabras, la dualidad $L^p \rightarrow L^q$ en la escala de Lebesgue sugiere que mientras “mejor” sea g , “peor” puede ser f en lo relativo a las singularidades. Este comportamiento sugiere que los espacios duales de espacios de funciones buenas $(L^p, p \text{ grande})$ pueden contener funciones bastante malas $(L^q, q \text{ chico})$. Pero incluso pueden contener objetos que no son funciones en el sentido clásico cuando el espacio al que estamos tomando el dual sólo contiene funciones muy buenas. Un ejemplo paradigmático es la formalización de Schwartz de la delta de Dirac. Recordemos que tenemos tres espacios de funciones $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ que son espacios vectoriales topológicos, cada uno con su noción de convergencia, con la notación precedente, $\mathcal{E}^*$ es el espacio vectorial de todos

los funcionales lineales con valores escalares definidos en $\mathcal{E}$. Y $\mathcal{E}'$ es el subespacio de $\mathcal{E}^*$ de aquellos funcionales que además son continuos. Recordemos que para ser continuo, un funcional $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$, debe cumplir que para toda sucesión $\{\varphi_k : k \leq 1\}$ en $\mathcal{E}$ y $\varphi \in \mathcal{E}$ tales que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$ $\left(\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{K} \partial^\alpha \varphi \text{ para todo compacto } K \text{ en } \mathbb{R}^n \text{ y para todo multiíndice } \alpha \right)$ ocurra que $T(\varphi_k) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$. Sea $\delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ el funcional $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. Probemos que $\delta \in \mathcal{E}'$. La linealidad es clara

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) &= (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)(0) \\ &= \alpha_1 \varphi_1(0) + \alpha_2 \varphi_2(0) \\ &= \alpha_1 \delta(\varphi_1) + \alpha_2 \delta(\varphi_2). \end{aligned}$$

Para probar la continuidad tomemos una sucesión $\{\varphi_k : k \leq 1\} \subset \mathcal{E}$ y $\varphi \in \mathcal{E}$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$. el conjunto $K = \{0\}$ es compacto entonces $\varphi_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbb{C}} \varphi(0)$. En otras palabras, $\delta(\varphi_k) = \varphi_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbb{C}} \varphi(0) = \delta(\varphi)$. Así $\delta \in \mathcal{E}'$ pero no existe ninguna función f tal que

$$(2.22) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Por consiguiente $\mathcal{E}'$ no es un espacio funcional. Volveremos a este punto básico al estudiar algunos aspectos de la Teoría de Distribuciones de Schwartz en el capítulo siguiente.

Espacios de distribuciones de Schwartz, de soporte compacto y generales

3.1. Introducción

Si bien la construcción de los números reales como cortaduras de los números racionales dada por Dedekind ha significado, sin duda, una consolidación de los fundamentos del modelo del continuo sobre que se monta toda, o casi toda, la física, resulta claro que, al momento del empirismo, el continuo se atenúa ante las limitaciones de los elementos de medición. La física cuántica ha llegado mucho más lejos, no son las limitaciones del laboratorio lo que hace imposible la descripción clásica de una partícula en términos de posición y velocidad, sino que esta imposibilidad es inherente a la descripción cuántica del mundo subatómico. Pero volviendo a lo clásico, pensemos en una cañería de agua en la que se pretende medir la presión en el punto x del caño

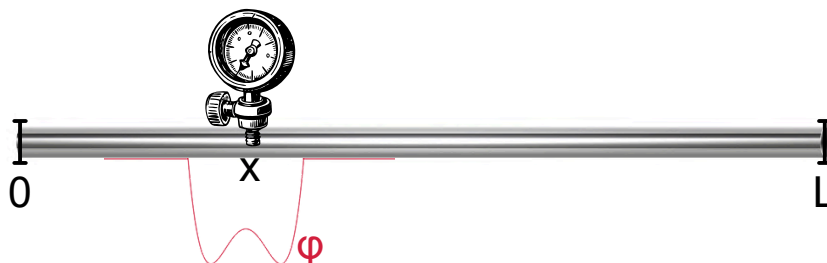


FIGURA 1. Representación gráfica del manómetro puntual

Si hubiera un manómetro “puntual” podríamos intentar medir la presión en x , pero eso no ocurre, los manómetros son funciones de testeo porque lo que medimos es en realidad un promedio de la presión en una región cerca de x . Más precisamente, medimos

$$(3.1) \quad \langle p, \varphi_x \rangle = \int_0^L p(y) \varphi_x(y) dy,$$

donde $\int \varphi_x(y) dy = 1$ y φ_x tiene soporte en los alrededores de x , por ejemplo en $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

Esta manera de considerar las mediciones como medias muestra que, atendiendo a los resultados y definiciones de dualidad en el Capítulo 2, las magnitudes físicas (al menos en el laboratorio) no son funciones del punto x que vive en el modelo continuo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, sino que son funcionales lineales y continuos que actúan sobre funciones de prueba buenas o muy buenas. Es decir, en el caso de nuestro ejemplo elemental precedente, la presión no es a priori una función $p(y)$ sino un funcional $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y continuo, donde $\mathcal{D}$ es el espacio de “test functions” introducido en el Capítulo 2. En este capítulo consideramos los espacios duales de $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ que introdujimos en el Capítulo 2 y que, puesto que

$$(3.2) \quad \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

tendremos

$$(3.3) \quad \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

para sus duales. Los elementos de $\mathcal{E}'$ son las distribuciones de soporte compacto, los de $\mathcal{S}'$ son las distribuciones de Schwartz y los de $\mathcal{D}'$ son las distribuciones. Consideraremos, en particular, las distribuciones que serán relevantes en las aplicaciones a PLI y a sus extensiones multidimensionales.

3.2. Distribuciones

Habiendo entendido la doble estructura del espacio vectorial y de espacio topológico (definida esta última a través de las correspondientes nociones de convergencia) en cada una de las tres clases de funciones de prueba (test functions) resultan claras las inclusiones

$$(3.4) \quad \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

y la continuidad de las dos flechas, y por lo tanto también de la tercera

$$(3.5) \quad \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

Es un poco menos evidente aunque sencillo demostrar que cada espacio es denso en el siguiente. Precisemos, la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{S}$ significa que toda función de $\mathcal{S}$, pensemos en la gaussiana por ejemplo, puede aproximarse en la convergencia de $\mathcal{S}$ tanto como se quiera por funciones de $\mathcal{D}$, es decir, muy suaves pero de soporte compacto. Recordemos

que, si φ es una función en $\mathbb{R}^n$, su soporte es la clausura del conjunto de no anulación, $\text{sup } \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$. Lo mismo ocurre entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$. El espacio $\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{E}$ y, por consiguiente, $\mathcal{D}$ también es denso en $\mathcal{E}$.

Notemos ahora que si un funcional $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y continuo, es decir $T \in \mathcal{E}'$, entonces T también está bien definido, es lineal y continuo cuando lo restringimos a $\mathcal{S}$ y a $\mathcal{D}$. Esto se resume en la reversión de las inclusiones para los espacios duales $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$. Los elementos de $\mathcal{D}'$, los más generales se llaman distribuciones, los de $\mathcal{S}'$ se llaman distribuciones temperadas o atemperadas y los elementos de $\mathcal{E}'$ son las distribuciones de soporte compacto.

Necesitamos que las “viejas” funciones no se caigan de esta nueva teoría aunque será bueno poderlas distinguir de los objetos nuevos que Schwartz incluye en la familia del análisis matemático. Para hacer esto, definamos un espacio que incluye a todos los $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. El espacio L^1 local denotado por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio vectorial de todas las funciones medibles en $\mathbb{R}^n$ que son integrables sobre cada compacto de $\mathbb{R}^n$;

$$(3.6) \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_K |f| dx < \infty, \forall K \text{ compacto} \right\}.$$

En $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ también hay una noción de convergencia natural, $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^1_{loc}} f$ si y sólo si $\int_K |f_k - f| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ para todo compacto K en $\mathbb{R}^n$. Notemos que, a diferencia de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, L^1_{loc} contiene funciones que pueden ser grandes en el infinito, como lo son los polinomios en general, o aún funciones como $e^{|x|^4}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 3.2.1. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, está bien definida $T_f \in \mathcal{D}'$ por $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx$.

Demostración. La linealidad de T_f sigue de la linealidad de la integral notando que para φ en $\mathcal{D}$ las integrales sólo se hacen sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) dx \\ &= \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_1 dx + \alpha_2 \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_2 dx \\ &= \alpha_1 \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T_f, \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

Para probar la continuidad de T_f en $\mathcal{D}$ tomemos una sucesión $\{\varphi_k : k \geq 1\} \subset \mathcal{D}$ y una función $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. Entonces existe un compacto K en $\mathbb{R}^n$ tal que los soportes de todas las φ_k y de las φ están contenidos en K y $\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{K} \partial^\alpha \varphi$, para todo multiíndice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. En particular, para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ tenemos que $\varphi_k \xrightarrow{K} \varphi$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces

$$(3.7) \quad |\langle T_f, \varphi_k \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| = |\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle|$$

$$(3.8) \quad = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi_k - \varphi) dx \right|$$

$$(3.9) \quad \leq \int_K |f| |\varphi_k - \varphi| dx,$$

que tomando k suficientemente grande resulta menor que $\varepsilon \int_K |f| dx$, para cualquier $\varepsilon > 0$. Como K está fijo, sigue que $\langle T_f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle$, $k \rightarrow \infty$ y, entonces $T_f \in \mathcal{D}'$. $\square$

De esta manera, nuestro diagrama distribucional se complementa con las funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ así

$$(3.10) \quad \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}' \hookleftarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

Notemos que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no induce en general distribuciones atemperadas (de $\mathcal{S}'$) y menos aún de $\mathcal{E}'$. En efecto, $f(x) = e^{|x|^4}$ es continua, por consiguiente está en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pero $\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx$ no es convergente en general para $\varphi \in \mathcal{S}$. Basta tomar la gaussiana $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, ya que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^4 - |x|^2} dx = +\infty$. Las funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que se anulan fuera de un compacto están en $\mathcal{E}'$ y las funciones de crecimiento lento (tipo polinomial) están en $\mathcal{S}'$. Diremos que una distribución T “es una función” cuando exista $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T = T_f$.

La delta de Dirac $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$ en el origen, como vimos en el Capítulo 2 es una distribución. Pero **NO** es ninguna función. En efecto, si existiera f tal que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $T_f = \delta_0$, tendríamos, para toda φ , la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx = \varphi(0).$$

En particular si $\psi \in \mathcal{D}$ y $\psi(0) = 1$, tomando como $\varphi_k(x) = \psi(kx)$, necesariamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_k dx = \varphi_k(0) = \psi(k \cdot 0) = \psi(0) = 1,$$

para todo $k \geq 1$. Pero

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_k(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(kx) dx \\ &= \frac{1}{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{y}{k}\right) \psi(y) dy \\ &= \frac{1}{k^n} \int_{\text{supp } \psi = K} f\left(\frac{y}{k}\right) \psi(y) dy, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_k(x) dx \right| &\leq \frac{1}{k^n} \|\psi\|_\infty \int_{y \in K} \left| f\left(\frac{y}{k}\right) \right| dy \\ &= \|\psi\|_\infty \int_{z \in \frac{K}{k}} |f(z)| dz, \end{aligned}$$

que tiende a cero si $k \rightarrow \infty$ ya que la medida de $\frac{K}{k}$ tiende a cero. Luego $\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_k dx$ no podrá permanecer constantemente igual a uno para todo k . Por consiguiente, δ_0 no es función.

Así como hemos definido la delta de Dirac en el origen 0 de $\mathbb{R}^n$, podemos definirla en cualquier punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ por

$$(3.11) \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \varphi \in \mathcal{E}.$$

En particular, si estamos en dimensión uno, podemos poner una delta de Dirac en cada entero y considerar

$$(3.12) \quad T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k.$$

Explicitamente

$$(3.13) \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_k, \varphi \rangle$$

$$(3.14) \quad = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k).$$

Resulta claro, tomando por ejemplo $\varphi \equiv 1$ que T no es una distribución en $\mathcal{E}'$, pero si está en $\mathcal{S}'$. En efecto, para φ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos que

$$(3.15) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} (1+k^2) |\varphi(k)|.$$

Si recordamos que $(1 + x^2)\varphi(x)$ está en $L^\infty(\mathbb{R})$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(k)| \leq \|(1 + x^2)\varphi(x)\|_\infty \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2} \right)$$

y por consiguiente T está bien definida en $\mathcal{S}$. Argumentos similares permiten probar la continuidad de T en $\mathcal{S}$, es decir $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Por cierto, T no es una función.

3.3. Derivación de distribuciones

Además de agrandar la clase de objetos susceptibles de análisis, las distribuciones extienden el ámbito del cálculo diferencial. Esta extensión de la teoría hecha por Schwartz no sólo permite derivar objetos nuevos de la familia, como lo son las deltas de Dirac, sino también objetos clásicos, funciones, que no podíamos derivar con el cálculo de Newton-Leibniz.

La idea es simple y se basa en la fórmula de integración por partes o, si se quiere, en la regla de derivación del producto y el teorema fundamental del Cálculo. Supongamos que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\frac{d}{dx}(\varphi f) = \frac{df}{dx}\varphi + f\frac{d\varphi}{dx}.$$

Integrando sobre $\mathbb{R}$ ambos miembros de esta ecuación, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}(\varphi f) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx}\varphi dx + \int_{\mathbb{R}} f\frac{d\varphi}{dx} dx.$$

Por el teorema fundamental del cálculo aplicado en cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ que contenga al soporte de φ , el miembro izquierdo es $\varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a)$ que vale cero ya que $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$. Por consiguiente, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tenemos que

$$(3.16) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx}\varphi dx = - \int_{\mathbb{R}} f\frac{d\varphi}{dx} dx.$$

Ahora observamos que el operador de derivación $\frac{d}{dx}$ aplica $\mathcal{D}$ en sí mismo continuamente. Así, $\frac{d\varphi}{dx} \in \mathcal{D}$ y, la integral del miembro derecho de la última igualdad está bien definida aunque f esté en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y no tenga (nunca) una derivada clásica. Además

$$(3.17) \quad - \int_{\mathbb{R}} f\frac{d\varphi}{dx} dx$$

para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ fija y φ define un funcional lineal y continuo en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Entonces es una distribución. Pero esto ocurre no sólo para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, sino para cualquier $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Así podemos definir, en una dimensión, $\frac{dT}{dx} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ por

$$(3.18) \quad \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle.$$

En general, cuando estamos en dimensión n y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(3.19) \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Por iteración podemos calcular derivadas de cualquier orden de una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(3.20) \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. En particular, los operadores clásicos del análisis como el Laplaciano, se pueden calcular a cualquier distribución $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Es importante notar que en general no podremos ver en objetos conocidos del análisis los resultados de estas derivaciones. Pero muchas veces sí podemos. Por ejemplo, si f es diferenciable, con derivada en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces, si T_f denota la distribución inducida por f , tendremos que $\frac{dT_f}{dx} = T_{\frac{df}{dx}}$. En otras palabras, cuando f es “buena” recuperamos la derivada clásica de Newton y Leibniz. Pero, como se nos enseñaba en primeros cursos de cálculo que no toda función continua resulta derivable, ejemplificando con la función $f(x) = |x|$, vemos que ahora T_f está bien definida ya que $|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces tiene una derivada como distribución. Calculémosla. Por definición, e integrando por partes

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dT_f}{dx}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle T_f, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \frac{d\varphi}{dx}(x) dx - \int_0^{\infty} x \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \\ &= x\varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{dx} \varphi(x) dx - x\varphi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{dx} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} E(x) \varphi(x) dx,
\end{aligned}$$

donde $E(x)$ es el escalón $E(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ Notar que $E(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y que, puesto

que la modificación de funciones en espacios de Lebesgue en conjuntos de medida nula no altera su caracter, nisiquiera es necesario decir cual es su valor en 0.

El resultado es razonablemente el esperado, en el sentido de Schwartz

$$(3.21) \quad \frac{d|x|}{dx} = E(x).$$

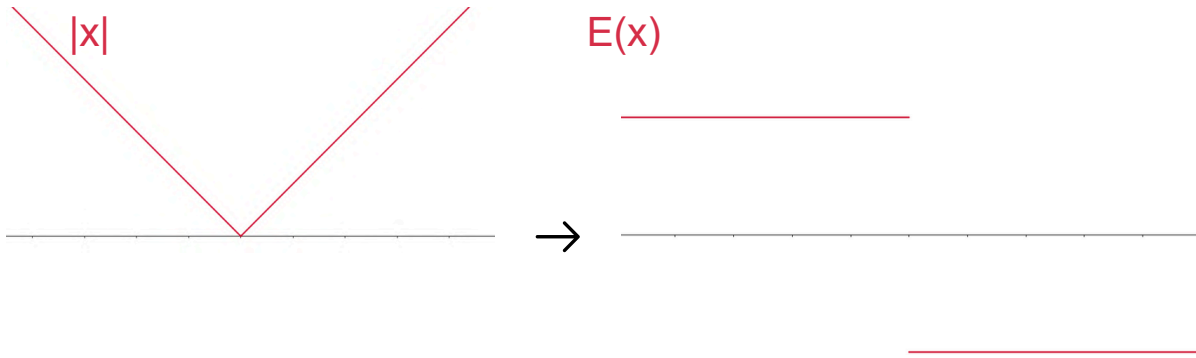


FIGURA 2. Representación gráfica del resultado $\frac{d|x|}{dx} = E(x)$

Pero $E(x)$ también es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, más todavía $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Podemos derivarla también a ella como distribución. Es decir, podemos derivar a T_E . Recordemos que $\langle T_E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} E(x) \varphi(x) dx$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo y la anulación de φ en el infinito,

$$(3.22) \quad \left\langle \frac{dT_E}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_E, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle$$

$$(3.23) \quad = - \int_{\mathbb{R}} E(x) \frac{d\varphi}{dx} dx$$

$$(3.24) \quad = \int_{-\infty}^0 \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx$$

$$(3.25) \quad =(\varphi(0) - \varphi(-\infty)) - (\varphi(\infty) - \varphi(0))$$

$$(3.26) \quad =2\varphi(0)$$

$$(3.27) \quad =2\langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Es decir, $\frac{dT_E}{dx} = 2\delta_0$ que ya no es función, por consiguiente, $\frac{d^2}{dx^2} \frac{|x|}{2} = \delta_0$. Esto se puede leer en ecuaciones diferenciales como “la función $\frac{|x|}{2}$ es una solución fundamental del Laplaciano unidimensional $\frac{d^2}{dx^2}$ ”.

Por supuesto el proceso no tiene límite en la cantidad de derivadas que podemos tomar a una distribución. Lo que suele no ser simple, y a veces imposible, es identificar las nuevas derivadas con objetos conocidos.

Por ejemplo, $\frac{d\delta_0}{dx}$ es reconocible como dipolo puntual en el origen (un átomo con cargas opuestas e iguales en magnitud instalado en el origen “O” de las x). Así La delta de

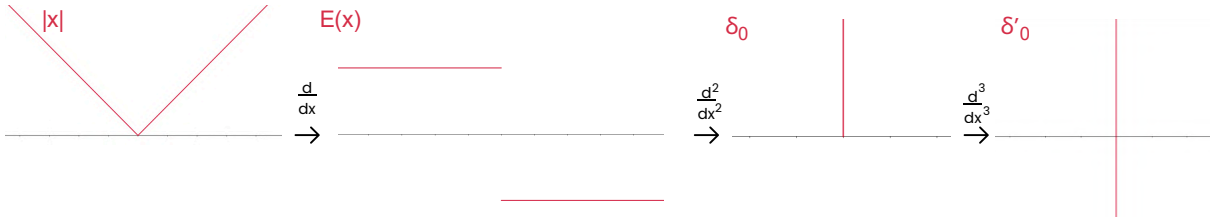


FIGURA 3. Representación gráfica de los resultados de $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ y $\frac{d^3}{dx^3}$

Dirac es sólo un caso particular de una familia de “distribuciones de orden cero” que son esencialmente medidas. Si μ es una medida finita en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo una distribución de probabilidad con o sin densidad, entonces

$$(3.28) \quad \langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x)$$

es una distribución de Schwartz. La medida no necesita ser finita, por ejemplo $\mu(E) = \#(E \cap \mathbb{Z})$ donde $\#$ es el cardinal de conjunto, es una medida en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que

$$(3.29) \quad T_\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

donde δ_k denota la delta de Dirac en el entero k . si bien $\delta_{x_0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, la T_μ anterior está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Hay muchas distribuciones de interés que no son medidas. Tal es el caso de los núcleos

singulares que consideramos en las secciones siguientes y que son cruciales en la definición del **Phase Lag Index (PLI)** que será inspirador en las aplicaciones de esta tesis.

3.4. La distribución valor principal de $\frac{1}{x} \left(v.p. \frac{1}{x} \right)$

En esta sección estaremos siempre en dimensión $n = 1$. Recordemos que una función es integrable Lebesgue en un conjunto medible sí y sólo sí su valor absoluto es integrable sobre el mismo conjunto. Nosotros vimos ya que cualquier función $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ define una distribución que, al menos, está en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; $f \rightarrow \mathcal{T}_f$, $\langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ahora bien, la función $\frac{1}{x}$ no está en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, aunque sí está en $L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Precisemos, $\frac{1}{x}$ **no** es integrable en todo compacto de $\mathbb{R}$, pero sí lo es en todo compacto dentro del abierto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En efecto, $[0, 1]$ es un compacto en $\mathbb{R}$, aunque no en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero $\int_{[0,1]} \frac{1}{|x|} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = +\infty$. Por consiguiente, $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pero si K es un compacto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $K \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, $\frac{1}{x}$ es acotada en

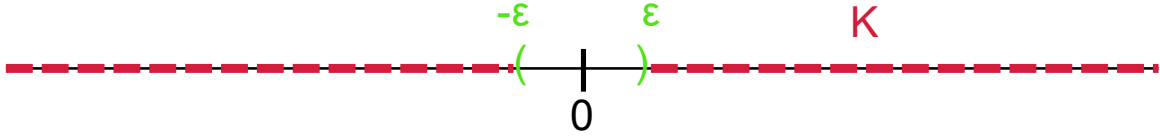


FIGURA 4. Representación gráfica de $K \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$

K y por lo tanto localmente integrable. Estas observaciones parecen poner a $\frac{1}{x}$ entre las excluidas del reino de Schwartz, sin embargo, la salva su imparidad.

LEMA 3.4.1. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces existe

$$(3.30) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Demostración. Como φ tiene soporte compacto, resulta que todo el soporte φ quedará contenido en el intervalo $(-R, R)$. Por consiguiente,

$$(3.31) \quad \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Ahora bien, como $\frac{1}{x}$ es impar y el dominio de integración $\varepsilon < |x| < R$ es simétrico con respecto al origen y entonces

$$(3.32) \quad \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{dx}{x} = 0.$$

Por lo tanto

$$(3.33) \quad \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx$$

$$(3.34) \quad = \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Para probar la convergencia a algún límite de la expresión anterior, usaremos el criterio de Cauchy. Es decir, veamos que si $0 < \delta < \varepsilon$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces

$$\left| \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_{R > |x| > \delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \rightarrow 0.$$

Usando la fórmula precedente tenemos que

$$(3.35) \quad \left| \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_{R > |x| > \delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx - \int_{R > |x| > \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right|$$

$$(3.36) \quad = \left| \int_{\varepsilon \geq |x| > \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right|$$

$$(3.37) \quad \leq \int_{\varepsilon \geq |x| > \delta} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x|} dx.$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces tiene derivada acotada. Por el Teorema del valor medio, tenemos que la última integral está acotada por

$$(3.38) \quad \int_{\varepsilon \geq |x| > \delta} \frac{|x| \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty}}{|x|} dx = 2(\varepsilon - \delta) \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty}$$

que tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $0 < \delta < \varepsilon$. $\square$

Resulta claro que la aplicación $v.p. \frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como en el Lema 3.4.1 por

$$(3.39) \quad \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

resulta lineal. Los argumentos y estimaciones en el lema anterior sirven también para probar que $v.p. \frac{1}{x}$ es continua. Es decir, $v.p. \frac{1}{x}$ es una distribución.

PROPOSICIÓN 3.4.1. La aplicación $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ denotada por $v.p.\frac{1}{x}$ y definida por

$$(3.40) \quad \langle T, \varphi \rangle = \left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

define una distribución. En otras palabras, $v.p.\frac{1}{x}$ es lineal y continua.

Demostración. La demostración de la linealidad es simple y es sólo una consecuencia de la linealidad de la integral y del proceso de límite involucrado en la definición. Probemos la continuidad. Sea $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que converge cero en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Recordemos que la linealidad nos permite probar simplemente la continuidad en $\varphi_0 \equiv 0$ de $v.p.\frac{1}{x}$. Como $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0, k \rightarrow \infty$, entonces existe un compacto K que contiene a todos los soportes de las funciones φ_k y

$$\frac{d^m \varphi_k}{dx^m} \xrightarrow{K} 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

para todo $m \geq 0$. Tenemos que probar que $\left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, en $\mathbb{R}$. Tomando $m = 1$, tenemos que $\frac{d\varphi_k}{dx}$ converge uniformemente a cero sobre K . Entonces $\left\| \frac{d\varphi_k}{dx} \right\|_{\infty} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Sea R tal que $K \subset (-R, R)$, entonces, usando la estimación en el lema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi_k \right\rangle \right| &= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi_k(x) - \varphi_k(0)}{x} dx \right| \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{|\varphi_k(x) - \varphi_k(0)|}{|x|} dx \\ &\leq 2R \left\| \frac{d\varphi_k}{dx} \right\|_{\infty}, \end{aligned}$$

que tiende a cero si $k \rightarrow \infty$. □

Resulta claro que el resultado anterior de existencia de la distribución $v.p.\frac{1}{x}$ es teórico y, como se basa en el criterio de convergencia de Cauchy, no identifica de manera algorítmica sencilla el límite que la misma definición de $v.p.\frac{1}{x}$ requiere cuando se aplica a una señal φ cualquiera dada. Dos caminos diferentes, pero muy íntimamente relacionados, proveen formatos más adecuados para la interpretación heurística de esta distribución y para su cálculo efectivo. Uno de esos caminos lo provee la teoría de funciones analíticas en el semiplano superior $\{Z \in \mathbb{C} : \text{Im} Z > 0\}$ del plano complejo $\mathbb{C}$. El otro camino es el uso de

la transformada de Fourier. Ambos serán explorados más adelante. Para el segundo de ellos necesitaremos la siguiente extensión simple del último resultado.

PROPOSICIÓN 3.4.2. *La distribución v.p. $\frac{1}{x}$ puede extenderse a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Es decir,*

$$(3.41) \quad v.p. \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Este resultado nos permitirá, en el próximo capítulo, calcular la transformada de Fourier de $v.p. \frac{1}{x}$.

3.5. Integrales singulares en $\mathbb{R}^n$. Los núcleos de Riesz

Esta sección contiene las bases de la extensión de la sección precedente a dimensiones mayores que uno. Aunque el análisis tiene un insuperable valor científico, es preciso que digamos que las razones para exponerlo brevemente en esta tesis están vinculadas con el papel central que cumplirán las integrales singulares de Riesz en nuestro método para detecciones de divergencias en señales de dimensiones mayores que uno.

Sea n un entero mayor o igual que uno y S^{n-1} la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$; $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. La notación nos recuerda que S^{n-1} tiene dimensión $n-1$. Así $S^0 = \{-1, 1\}$ tiene dimensión cero, $S^1 = S^{2-1}$ es la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ y S^2 es la esfera unitaria en el espacio $\mathbb{R}^3$. Con el objeto de introducir las integrales singulares de Calderon y Zigmund en $\mathbb{R}^n$ reescribimos la función $\frac{1}{x}$ de manera conveniente,

$$\frac{1}{x} = \frac{\Omega(x)}{|x|} = \frac{\Omega(x)}{|x|^1},$$

donde

$$\Omega(x) = \text{signo } x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Notemos que Ω es homogénea de grado cero, para $\lambda > 0$

$$\Omega(\lambda x) = \lambda^0 \Omega(x) = \Omega(x).$$

Diremos que una función $K(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ y con valores reales es un núcleo integral singular si

$$(3.42) \quad K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

donde $\Omega(x) = \Omega(x_1, \dots, x_n)$ es una función homogénea de grado cero ($\lambda > 0, \Omega(\lambda x) = \Omega(x)$) que es de clase $\mathcal{C}^1$ fuera del origen de $\mathbb{R}^n$ y tal que

$$(3.43) \quad \int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma(x) = 0,$$

donde σ denota la medida de “área” en S^{n-1} .

En $\mathbb{R}^n$ tenemos un resultado enteramente análogo al que obtuvimos en $\mathbb{R}$ en la sección anterior.

PROPOSICIÓN 3.5.1. *Sea $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ un núcleo de integral singular en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx$$

existe para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y define una distribución v.p. K , en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que se extiende naturalmente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Otra vez, como en el caso unidimensional, probamos el caracter de Cauchy de la función de $\varepsilon > 0$ dada por

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx.$$

Notemos primero que, para $\varepsilon > 0$ fijo, la integral existe ya que, como φ tiene soporte compacto y Ω es suave fuera del origen de $\mathbb{R}^n$, la función $X_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x)$ resulta acotada y soportada en un conjunto de medida finita. Tomemos ahora $0 < \delta < \varepsilon$ y estimemos el valor absoluto de la diferencia de las truncaciones en ε y en δ . Notemos antes que, usando las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$ y la homogeneidad de Ω , tenemos

$$(3.44) \quad \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} dx = \int_{S^{n-1}} \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\Omega(\rho x^1)}{\rho^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(x^1)$$

$$(3.45) \quad = \left(\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{d\rho}{\rho} \right) \left(\int_{S^{n-1}} \Omega(x^1) d\sigma(x^1) \right)$$

$$(3.46) \quad = 0$$

Entonces podemos, como en el caso $n = 1$, restar $\varphi(0)$ para luego usar Taylor,

$$\left| \int_{|x| > \delta} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx - \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} \frac{\Omega(x)(\varphi(x) - \varphi(0))}{|x|^n} dx \right| \\
&\leq \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} \frac{|\Omega(x)| |\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x|^n} dx \\
&\leq \|\Omega\|_{S^{n-1}} \|\nabla \varphi\|_{\infty} \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} \frac{|x|}{|x|^n} dx \\
&= C \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-1}} d\rho \\
&= C(\varepsilon - \delta),
\end{aligned}$$

donde $\|\Omega\|_{S^{n-1}}$ es el máximo de Ω en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. Resulta claro de las estimaciones anteriores que el último término $C(\varepsilon - \delta) \rightarrow 0$ con $0 < \delta < \varepsilon$ y $\varepsilon \rightarrow 0$. Por consiguiente, otra vez, el criterio de Cauchy asegura la existencia, sin identificarlo, del límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ de las truncaciones. Una vez establecida la existencia del límite, resulta clara la linealidad de la operación

$$(3.47) \quad v.p. \frac{\Omega(x)}{|x|^n} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$(3.48) \quad \left\langle v.p. \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \varphi(x) dx.$$

El argumento para la prueba de la continuidad de $v.p. \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ es similar al caso unidimensional. Sea φ_k una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que converge a cero, en particular $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \xrightarrow{k} 0$, $k \rightarrow \infty, i = 1, \dots, n$ y K un compacto fijo que contiene los soportes de todas las φ_k . Entonces

$$(3.49) \quad \text{sop } \varphi_k \subseteq K \subseteq B(0, R)$$

y

$$(3.50) \quad \left| \left\langle v.p. \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \varphi \right\rangle \right| \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R > |x| > \varepsilon} \frac{|\Omega(x)|}{|x|^n} |\varphi_k(x) - \varphi_k(0)| dx$$

$$(3.51) \quad \leq \|\Omega\|_{S^{n-1}} \|\nabla \varphi_k\|_{\infty} \int_{|x| < R} \frac{|x|}{|x|^n} dx$$

$$(3.52) \quad = \|\Omega\|_{S^{n-1}} \|\nabla \varphi_k\|_{\infty} C_n \int_0^R d\rho$$

$$(3.53) \quad = C_n \|\Omega\|_{S^{n-1}} R \|\nabla \varphi_k\|_\infty$$

que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. $\square$

Nosotros estamos especialmente interesados en n de estos núcleos integrales singulares que definen las n -Transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n$, que serán usadas en nuestra extensión multidimensional del Phase Lag Index (PLI).

LEMA 3.5.1. *Para $i = 1, 2, \dots, n$, la función $\Omega_i(x) = \frac{x_i}{|x|}$, donde x_i es la i -ésima componente de $x \in \mathbb{R}^n$, es una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y homogénea de grado cero. Además la restricción de Ω_i a la esfera unitaria tiene integral nula.*

Demostración. La regularidad es clara ya que el denominador es de clase $\mathcal{C}^\infty$ fuera del origen y no se anula fuera del origen. La homogeneidad también es clara, si $\lambda > 0$,

$$(3.54) \quad \Omega_i(\lambda x) = \frac{(\lambda x)_i}{|\lambda x|} = \frac{x_i}{|x|} = \Omega_i(x)$$

Notemos ahora que, como en S^{n-1} se tiene $|x| = 1$

$$(3.55) \quad \int_{S^{n-1}} \Omega_i(x) d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} \frac{x_i}{|x|} d\sigma(x)$$

$$(3.56) \quad = \int_{S^{n-1}} x_i \sigma(x)$$

que se anula porque el integrando es antisimétrico ($\Omega_i(-x) = -\Omega_i(x)$) y el dominio S^{n-1} es simétrico. $\square$

COROLARIO 3.5.1. *Para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene que*

$$(3.57) \quad v.p. \frac{x_i}{|x|^{n+1}} = v.p. \frac{\Omega_i(x)}{|x|^n}$$

define una distribución, que se puede extender a una distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Cada $v.p. \frac{x_i}{|x|^{n+1}}$ se llama un núcleo de Riesz.

Observemos que, cuando $n = 1$, tenemos un sólo núcleo de Riesz $\frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{|x|} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ que es el núcleo de Hilbert.

3.6. Una aproximación a la distribución $v.p.\frac{1}{x}$ desde las funciones analíticas en el plano complejo

Hemos probado que la aplicación $v.p.\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ define una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a través de un valor principal de integrales. Precisamente, $\left\langle v.p.\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$. Resultará de interés acceder a la misma distribución desde la variable compleja. La función de la variable compleja $z = x + iy$ dada por $F(z) = \frac{1}{\pi z}$ donde i es la unidad imaginaria en $\mathbb{C}$, es holomorfa en el semiplano superior $\{z : \text{Im } z > 0\}$. Pensemos en la restricción de $F(z)$ a la recta horizontal que mantiene fija la coordenada $y > 0$ y escribamos $F(x + iy)$ como función a valores complejos de la variable $x \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$(3.58) \quad F(z) = \frac{i}{\pi} \frac{i}{z} = \frac{i}{\pi} \frac{i \bar{z}}{|z|^2} = \frac{i}{\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$(3.59) \quad = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$(3.60) \quad = P_y(x) + iQ_y(x)$$

La parte real $P_y(x)$ se llama núcleo de Poisson y la parte imaginaria $Q_y(x)$ se llama núcleo de Poisson conjugado. Notemos que $P_y(x)$ es positivo y al menos heurísticamente, cuando $y \rightarrow 0$, se tiene que $P_y(x)$ tiende a la delta de Dirac en 0,

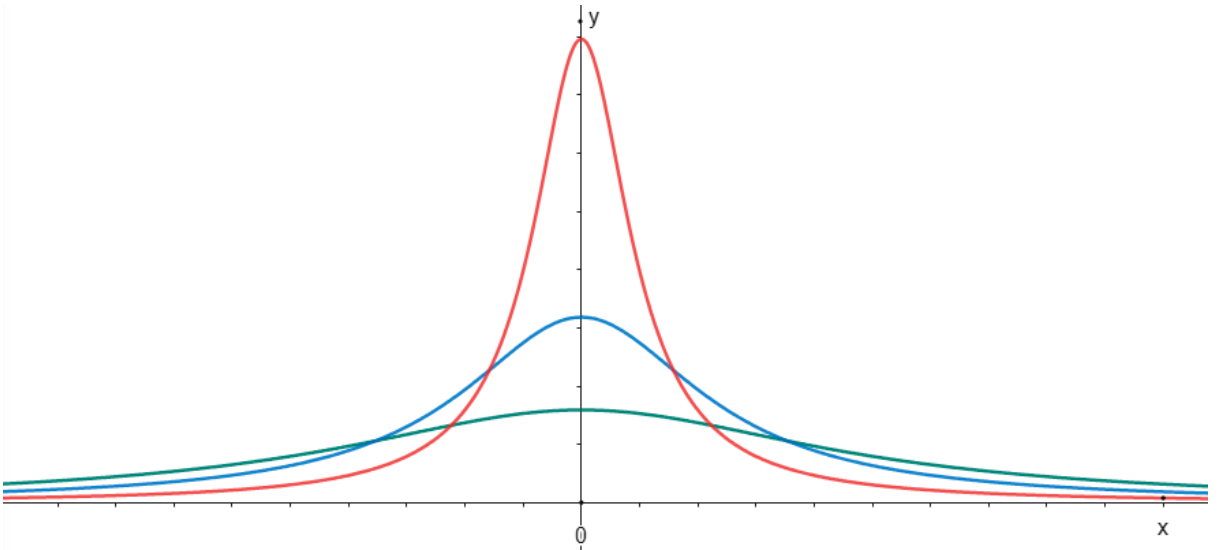


FIGURA 5. Familia del núcleo de Poisson $P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$ para distintos valores de $y > 0$.

Por otra parte, $Q_y(x)$ para y fijo es impar y luce como una aproximante de la función $\frac{1}{x}$ cuando $y \rightarrow 0$.

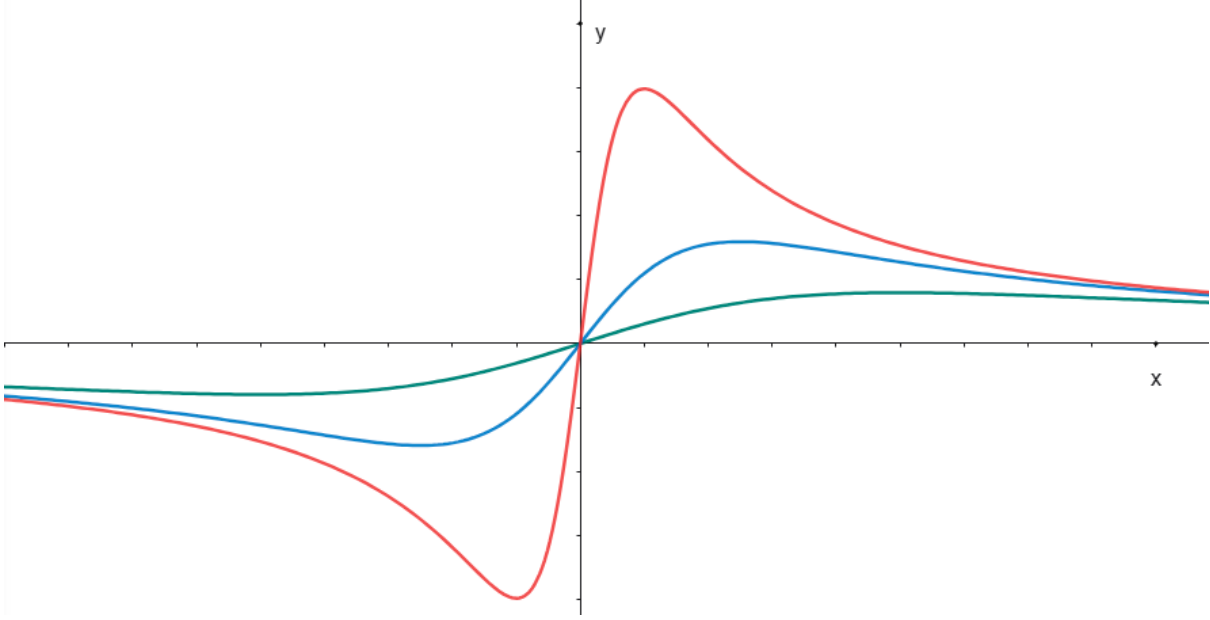


FIGURA 6. Núcleo conjugado de Poisson $Q_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$ para distintos valores de $y > 0$.

TEOREMA 3.6.1. $P_y(x)$ y $Q_y(x)$ para $y > 0$ son funciones tales que

$$(3.61) \quad P_y \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$$

y

$$(3.62) \quad Q_y \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} v.p. \frac{1}{x}$$

cuando $y \rightarrow 0^+$. Precisamente,

$$\int_{x \in \mathbb{R}} P_y(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0), y \rightarrow 0$$

$$\int_{x \in \mathbb{R}} Q_y(x) \varphi(x) dx \rightarrow v.p. \varphi, y \rightarrow 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En otros términos, la distribución compleja $\delta_0 + i v.p. \frac{1}{x}$ es el límite distribucional de $F(x + iy)$ cuando $y \rightarrow 0^+$.

Demostración. Para probar que $P_y \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$ cuando $y \rightarrow 0$, tenemos que ver que para todo $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se tiene que $\langle P_y, \varphi \rangle \xrightarrow{y \rightarrow 0} \langle \delta_0, \varphi \rangle$ en $\mathbb{R}$. Pero, como P_y es función de x y

está en L^1 para cada $y > 0$ y $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$ por definición, nos bastará probar que

$$\int_{\mathbb{R}} P_y(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0), \quad y \rightarrow 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P_y(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{x^2 + y^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \frac{dx}{y} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + z^2} dz \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} P_y(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} P_y(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} P_y(x) \varphi(0) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} P_y(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \\ &= \int_{|x| < \sqrt{y}} P_y(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx + \int_{|x| > \sqrt{y}} P_y(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \\ &\leq \sqrt{y} \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty} \int_{|x| < \sqrt{y}} P_y dx + \left(\int_{|x| > \frac{1}{\sqrt{y}}} P_y(x) dx \right) 2\|\varphi\|_{\infty} \\ &\leq \sqrt{y} \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty} + 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{|x| > \frac{1}{\sqrt{y}}} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{dx}{y} \\ &\leq \sqrt{y} \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty} + 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{|z| > \frac{1}{\sqrt{y}}} \frac{1}{1 + z^2} dz, \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $y \rightarrow 0$. Veamos ahora que $\mathbb{Q}_y \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} v.p. \frac{1}{x}$, $y \rightarrow 0$. Como antes, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tenemos que ver que

$$\langle \mathbb{Q}_y, \varphi \rangle \xrightarrow[y \rightarrow 0]{\mathbb{R}} \pi \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle.$$

Puesto que ya sabemos que, aunque no hayamos identificado el límite,

$$\left\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

basta que probemos que

$$(3.63) \quad \left| \int_R \frac{x}{x^2 + y^2} \varphi(x) dx - \int_{|x| > \sqrt{y}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right|$$

tiende a cero cuando $y \rightarrow 0$. Pero esta expresión está acotada por

$$(3.64) \quad \left| \int_{|x| \leq \sqrt{y}} \frac{x}{x^2 + y^2} \varphi(x) dx \right| + \left| \int_{|x| > \sqrt{y}} \varphi(x) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \right) dx \right| = I(y) + \mathbb{I}(y).$$

Para acotar $I(y)$, notemos que la función $\frac{x}{x^2 + y^2}$ es impar e integrable en el intervalo $|x| \leq \sqrt{y}$, por consiguiente, tiene integral nula y entonces

$$(3.65) \quad I(y) = \left| \int_{|x| \leq \sqrt{y}} \frac{x}{x^2 + y^2} (\varphi(x) + \varphi(0)) dx \right|$$

$$(3.66) \quad \leq \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty} \int_{|x| \leq \sqrt{y}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx$$

$$(3.67) \quad \leq \sqrt{y} \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{\infty},$$

que tiende a cero cuando $y \rightarrow 0$. Estimemos ahora $\mathbb{I}(y)$. Tenemos

$$(3.68) \quad \mathbb{I}(y) \leq \int_{|x| > \sqrt{y}} |\varphi(x)| \left| \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} \right| dx$$

$$(3.69) \quad \leq y^2 \|\varphi\|_{\infty} 2 \int_{x > \sqrt{y}} \frac{1}{x^3} dx$$

$$(3.70) \quad = y^2 \|\varphi\|_{\infty} (\sqrt{y})^{-2}$$

$$(3.71) \quad = \|\varphi\|_{\infty} y,$$

que también tiende a cero si $y \rightarrow 0$. □

Capítulo 4

Análisis y síntesis de Fourier de distribuciones de Schwartz temperadas y su aplicación a los núcleos de Hilbert y de Riesz

4.1. Introducción

En el Capítulo 3 hemos introducido dos de los “objetos” que, sin ser funciones ni señales en el sentido clásico del análisis de Newton-Leibniz, son distribuciones atemperadas o temperadas de Schwartz y serán centrales en el desarrollo de técnicas de tipo Phase Lag Index (*PLI*) que expondremos y extenderemos en el Capítulo 3 a dimensiones superiores a uno para abordar un análisis de tipo PLI en imágenes. Estas distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son respectivamente $v.p.\frac{1}{x}$ y $v.p.\frac{x_i}{|x|^{n+1}}, i = 1, \dots, n$, que por convolución definirán operadores invariantes por traslaciones. Estos operadores son la Transformada de Hilbert y las n transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n$. Las propias definiciones de $v.p.\frac{1}{x}$ y $v.p.\frac{x_i}{|x|^{n+1}}$ como valores principales presentan dificultades tanto teóricas como computacionales. Como estos valores principales no son funciones, todo intento de obtener versiones frecuenciales de ellos debe fundamentarse en alguna adecuada extensión del análisis de Fourier que alcance a estos objetos no funcionales. Los propósitos centrales de este capítulo son introducir la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y sus propiedades básicas, extender hasta donde resulte necesario la noción de convolución de una distribución con una función o señal analógica y calcular explícitamente las transformadas de Fourier de las transformadas de Riesz y de Hilbert. A partir de estos resultados podremos obtener propiedades de los operadores de Hilbert y de Riesz que son invisibles desde su definición como valores principales de ciertas integrales. El mismo resultado provee un algoritmo de cálculo simple para su implementación computacional en el lenguaje Python que será una gran herramienta en nuestras aplicaciones concretas de PLI para medir conectividad cerebral a partir de EEG y para el análisis de imágenes.

4.2. Dilatación, traslación y rotación de distribuciones

Las definiciones de estos tres conceptos parten de observaciones elementales sobre funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, sean $\eta > 0$, $h \in \mathbb{R}^n$ y ρ una rotación de $\mathbb{R}^n$, tenemos actuando sobre f tres operadores

■ **Dilatación η :**

$$(4.1) \quad (D_\eta f)(x) = f(\eta x)$$

■ **Traslación h :**

$$(4.2) \quad (\tau_h f)(x) = f(x - h)$$

■ **Rotación ρ :**

$$(4.3) \quad \rho(f)(x) = f(\rho x)$$

Miremos ahora a cada una de las tres nuevas funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dadas por $D_\eta f$, $\tau_h f$ y $\rho(f)$ como distribuciones en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, entonces, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle D_\eta f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (D_\eta f)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(\eta x) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\eta^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \varphi\left(\frac{y}{\eta}\right) dy \\ &= \frac{1}{\eta^n} \left\langle f, \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle f, \frac{1}{\eta^n} D_{\frac{1}{\eta}} \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

para las traslaciones,

$$\begin{aligned} \langle \tau_h f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h f)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(y + h) dy \\ &= \langle f, \tau_{-h} \varphi \rangle, \end{aligned}$$

y para las rotaciones, recordando que el Jacobiano de las rotaciones es igual a uno, tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \rho f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(f)(x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\rho x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\rho^{-1} y) dy \\
&= \langle f, \rho^{-1}(\varphi) \rangle.
\end{aligned}$$

Resulta claro que, para sostener en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ las fórmulas clásicas para dilataciones, traslaciones y rotaciones, será preciso definir, para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ general

$$(4.4) \quad \langle D_\eta T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{\eta^n} D_{\frac{1}{\eta}} \varphi \right\rangle,$$

$$(4.5) \quad \langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h} \varphi \rangle$$

$$(4.6) \quad \langle \rho(T), \varphi \rangle = \langle T, \rho^{-1}(\varphi) \rangle$$

Es simple probar que $D_\eta T$, $\tau_h T$ y $\rho(T)$ son distribuciones, ya que las mismas operaciones son continuas en los espacios de funciones test, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Estos operadores son útiles para una notación simplificada en la teoría, pero en algún caso devuelven conceptos y formato clásico a la teoría de distribuciones de Schwartz. En principio se podría esperar, razonablemente, que el concepto de derivación de una distribución basada en las dualidades $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ y $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ esté ya muy lejano de las nociones del cálculo diferencial que ve a la derivada como el límite de secantes o el límite de cocientes incrementales. Si estamos dispuestos a admitir la convergencia débil en nuestra familia ampliada de objetos del análisis, es decir

$$(4.7) \quad T_j \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} T \text{ sí y sólo si } \langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{\mathbb{C}} \langle T, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces tenemos el siguiente resultado que devuelve la idea original de Newton-Leibniz en otro nivel de abstracción.

PROPOSICIÓN 4.2.1. Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, para $j = 1, 2, \dots, n$ fijo sea $\vec{h}_j = h\vec{e}_j$, con $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ el j -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces

$$(4.8) \quad \frac{\tau_{-\vec{h}_j} T - T}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Demostración. Recordemos que, dada T , su derivada distribucional está dada por la distribución

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\tau_{\vec{h}_j} T - T}{h}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{h} \langle \tau_{\vec{h}_j} T, \varphi \rangle - \frac{1}{h} \langle T, \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{h} \langle T, \tau_{\vec{h}_j} \varphi \rangle - \frac{1}{h} \langle T, \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{h} \langle T, \tau_{\vec{h}_j} \varphi - \varphi \rangle \\ &= \left\langle T, \frac{\tau_{\vec{h}_j} \varphi - \varphi}{h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que

$$\frac{\tau_{\vec{h}_j} \varphi - \varphi}{h}(x) = \frac{\varphi(x - \vec{h}_j) - \varphi(x)}{h}$$

que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ converge a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$ cuando $h \rightarrow 0$. Pero esa convergencia no es sólo puntual, sino también ocurre en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En efecto si $|h| \leq 1$, entonces todos los cocientes incrementales tienen su soporte dentro de un compacto fijo de $\mathbb{R}^n$ que también contiene al soporte de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$. Y no es difícil chequear que dentro del soporte común los cocientes incrementales $\frac{\tau_{\vec{h}_j} \varphi - \varphi}{h}$ y todas sus derivadas convergen a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ y a sus correspondientes derivadas, cuando h tiende a cero. $\square$

Más adelante usaremos los operadores D_η , τ_h y $\rho(T)$ como los hemos presentado en esta sección.

4.3. Convolución de distribuciones

Si f y g en $L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ es absolutamente convergente para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Más aún la función $f * g$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ ya que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dydx \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx \right) dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Esto significa que el espacio $L^1(\mathbb{R}^1)$ además de su estructura de espacio de Banach tiene una estructura de Álgebra con el producto de convolución que es compatible con la norma. Sin embargo, esta operación no tiene identidad en $L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir, ninguna función f de $L^1(\mathbb{R}^n)$ puede satisfacer la identidad

$$(4.9) \quad f * g = g$$

para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sabemos, al menos heurísticamente, que la delta de Dirac es la unidad para la operación de convolución, pero no pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos ahora que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} (f * \varphi)(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(z)\varphi(x-z)dz \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(z)\tilde{\varphi}(z-x)dx \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} f(z)(\tau_x \tilde{\varphi})(z)dz \\ &= \langle T_f, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y)$. Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la función $\tau_x \tilde{\varphi}$ está en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Esto sugiere una definición de convolución en dualidad.

DEFINICIÓN 4.3.1. Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (resp. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, resp. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, resp. $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) se define $T * \varphi$ como la función dada por $(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle$, que resulta de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que con esta definición tenemos que, si δ_0 es la delta de Dirac en el origen, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 (\delta_0 * \varphi)(x) &= \langle \delta_0, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle \\
 &= (\tau_x \tilde{\varphi})(0) \\
 &= \tilde{\varphi}(0 - x) \\
 &= \varphi(x),
 \end{aligned}$$

es decir δ_0 es la identidad de convolución. La convolución con distribuciones dadas constituye el procedimiento básico para obtener operadores invariantes por traslaciones. Si, por ejemplo, T es una distribución temperada, en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, fija, define en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un operador

$$(4.10) \quad O_T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

por

$$(4.11) \quad O_T(\varphi)(x) = (T * \varphi)(x)$$

PROPOSICIÓN 4.3.1. *El operador O_T conmuta con traslaciones en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
 O_T(\tau_h \varphi)(x) &= (T * (\tau_h \varphi))(x) \\
 &= \langle T, \tau_x (\widetilde{\tau_h \varphi}) \rangle
 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \tau_x (\widetilde{\tau_h \varphi})(y) &= \widetilde{\tau_h \varphi}(y - x) \\
 &= \tau_h \varphi(x - y) \\
 &= \varphi((x - y) - h) \\
 &= \varphi((x - h) - y) \\
 &= \tilde{\varphi}(y - x + h) \\
 &= \tau_{x-h} \tilde{\varphi}(y)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
O_T(\tau_h \varphi)(x) &= \langle T, \tau_{x-h} \tilde{\varphi} \rangle \\
&= (T * \varphi)(x - h) \\
&= O_T(\varphi)(x - h) \\
&= \tau_h O_T(\varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Los operadores que serán de interés en el desarrollo de esta tesis y que son invariantes por traslaciones son el operador de Hilbert en dimensión uno y los operadores de Riesz en dimensión $n > 1$. Estos operadores se conocen como la **Transformada de Hilbert** y las **Transformadas de Riesz**.

La Transformada de Hilbert es el operador de convolución con la distribución valor principal de $\frac{1}{x}$, Precisamente, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definimos

$$(4.12) \quad H\varphi(x) = \left(v.p. \frac{1}{x} * \varphi \right) (x).$$

Por definición de convolución de una distribución con una función suave, tenemos que

$$\begin{aligned}
H\varphi(x) &= \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \tau_x \tilde{\varphi} \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\tau_x \tilde{\varphi}(y)}{y} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\tilde{\varphi}(y - x)}{y} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\varphi(x - y)}{y} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x - z| > \varepsilon} \frac{\varphi(z)}{x - z} dz.
\end{aligned}$$

De manera análoga, cuando estamos en el espacio $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$, tenemos las n distribuciones $v.p. \frac{x_i}{|x|^{n+1}}, i = 1, \dots, n$. Con cada una de ellas definimos el operador i -ésima Transformada de Riesz para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(4.13) \quad R_i \varphi(x) = \left(v.p. \frac{x_i}{|x|^{n+1}} * \varphi \right) (x).$$

Volviendo por un momento al caso unidimensional, $n = 1$, recordemos que en el Teorema ?????? probamos que la distribución con valores complejos dada por

$$(4.14) \quad \delta_0 + i\pi \text{ v.p. } \frac{1}{x}$$

es el límite distribucional en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

$$(4.15) \quad F(z) = F(x + iy) = \frac{1}{\pi} \frac{i}{z} = P_y(x) + iQ_y(x)$$

cuando $y \rightarrow 0^+$.

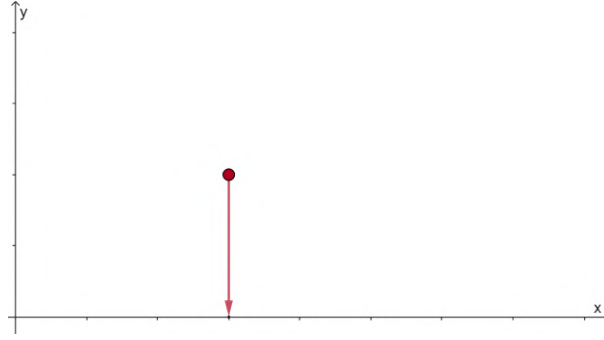


FIGURA 1. Aproximación al eje real desde el semiplano superior: el punto $z = x + iy$ con $y > 0$ tiende al eje real cuando $y \rightarrow 0^+$.

Entonces, en base a los ejemplos anteriores de convolución de distribuciones con funciones test, podemos escribir, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$(4.16) \quad \varphi(x) + i\pi H\varphi(x) = \left(\left(\delta_0 + i\pi \text{ v.p. } \frac{1}{x} \right) * \varphi \right) (x)$$

como el valor de borde, para $y = 0$, de la función analítica en el semiplano complejo superior $\{y > 0\}$, dada por

$$(4.17) \quad \Phi(z) = \Phi(x + iy) = (P_y * \varphi)(x) + i(Q_y * \varphi)(x)$$

$$(4.18) \quad = \text{Re}\Phi(z) + i\text{Im}\Phi(z).$$

La familia $\{P_y : y > 0\}$ se llama el núcleo de Poisson en dimensión uno y $\{Q_y : y > 0\}$ el núcleo conjugado de Poisson. Este hecho simple pero fundamental provee un algoritmo analítico para obtener la transformada de Hilbert de una función (señal analógica φ) que puede resumirse así: dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la extendemos como una función armónica μ al semiplano superior convolucionando con P_y , luego buscamos con las ecuaciones de

Cauchy-Riemann una función armónica ν tal que

$$(4.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Finalmente “evaluamos” $v(x, 0)$ y este valor contendrá a $H\varphi$. Es decir, $H\varphi$ es el valor de borde de la parte imaginaria de la función analítica Φ cuya parte real tiene valor de borde φ .

Un enfoque similar con las transformadas de Riesz puede darse (ver [Stein]) pero no lo usaremos en el desarrollo ulterior de la tesis.

Hasta aquí hemos definido y ejemplificado, con los operadores que serán nuestros insumos básicos, la convolución de las distribuciones con funciones. Pero en realidad dos distribuciones se pueden convolucionar siempre que menos una de ellas tenga soporte compacto.

Antes introducimos el producto tensorial de dos distribuciones en $\mathbb{R}^n$. Sean T y $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, vamos a definir una nueva distribución $T \otimes S$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Para que la definición que daremos se intuya desde situaciones clásicas, recordemos qué es el producto tensorial de funciones en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sean f y g en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces su producto tensorial es la función $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Resulta claro que $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Si consideramos la distribución $T_{f \otimes g} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ inducida por $f \otimes g$ actuando sobre una función $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tendremos que, usando dobles ángulos para enfatizar la duplicación de la dimensión,

$$\begin{aligned} \langle\langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x, y) \varphi(x, y) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x) g(y) \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= \langle T_{f, x}, \langle T_{g, y}, \varphi(x, y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, dadas T y S , dos distribuciones en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, su producto tensorial $T \otimes S$ será una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que sobre una función de prueba $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

actúa así

$$(4.20) \quad \langle\langle T \otimes S, \varphi \rangle\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

Por ejemplo si $T = \delta_{\bar{a}}$ y $S = \delta_{\bar{b}}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle\langle \delta_{\bar{a}} \otimes \delta_{\bar{b}}, \varphi \rangle\rangle &= \langle \delta_{\bar{a}, x}, \langle \delta_{\bar{b}, y}, \varphi(x, y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_{\bar{a}, x}, \varphi(x, \bar{b}) \rangle \\ &= \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \\ &= \langle\langle \delta_{(\bar{a}, \bar{b})}, \varphi \rangle\rangle \end{aligned}$$

Es decir, $\delta_{\bar{a}} \otimes \delta_{\bar{b}} = \delta_{(\bar{a}, \bar{b})}$.

El producto tensorial nos interesa porque si f y g son funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x-y) \varphi(x) dx \right) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{z \in \mathbb{R}^n} f(z) \varphi(y+z) dz \right) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{z \in \mathbb{R}^n} g(y) f(z) \varphi(y+z) dz dy \\ &= \langle\langle T_g \otimes T_f, \varphi(\cdot + \cdot) \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Entonces, estaremos generalizando la definición de convolución de dos funciones si, dadas T y S , dos distribuciones, una de ellas con soporte compacto, definimos, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$,

$$(4.21) \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle\langle T \otimes S, \psi \rangle\rangle$$

Sea por ejemplo T una distribución cualquiera, y $S = \delta_0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T * \delta_0, \varphi \rangle &= \langle\langle T \otimes \delta_0, \psi \rangle\rangle \\ &= \langle T_x, \langle \delta_{0y}, \psi(x, y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T_x, \langle \delta_{0y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x, \varphi(x) \rangle \\
&= \langle T, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

para toda φ , entonces $T * \delta_0 = T$. En otras palabras, entre las distribuciones, la delta de Dirac en el origen de $\mathbb{R}^n$ es la identidad para la operación de convolución. Sea ahora $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo y consideremos la delta de Dirac δ_{x_0} . Recordemos que $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ para $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Veamos si podemos identificar la convolución de una distribución cualquiera $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con δ_{x_0} . Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces, por la definición de convolución de distribuciones generales, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle &= \langle \langle T \otimes \delta_{x_0}, \psi \rangle \rangle \\
&= \langle \langle T \otimes \delta_{x_0}, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x, \langle (\delta_{x_0})_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x, \varphi(x+x_0) \rangle \\
&= \langle T_x, \tau_{-x_0} \varphi \rangle \\
&= \langle \tau_{x_0} T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $T * \delta_{x_0} = \tau_{x_0} T$. Es decir, convolucionar una distribución T con una δ en un punto es, simplemente, trasladar la distribución T a ese punto del espacio o a ese instante del tiempo.

En particular, cuando $n = 1$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ está fijo, tenemos que

$$(4.22) \quad v.p. \frac{1}{t} * \delta_{t_0} = \tau_{t_0} \left(v.p. \frac{1}{t} \right)$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left\langle \tau_{t_0} \left(v.p. \frac{1}{t} \right), \varphi \right\rangle &= \left\langle v.p. \frac{1}{t}, \tau_{-t_0} \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{(\tau_{-t_0} \varphi)(t)}{t} dt \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t+t_0)}{t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|S-t_0| > \varepsilon} \frac{\varphi(s)}{S-t_0} ds \\
&= \left\langle v.p. \frac{1}{t-t_0}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

En otras palabras, $v.p. \frac{1}{t} * \delta_{t_0} = v.p. \frac{1}{t-t_0}$. Algo similar ocurre en dimensión $n > 1$ con las transformadas de Riesz. En efecto, dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $j = 1, \dots, n$, tenemos que

$$(4.23) \quad v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} * \delta_{x_0} = v.p. \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|^{n+1}}$$

4.3.1. Transformada de Fourier. En esta sección resumiremos con la brevedad necesaria, pero intentando no dejar de lado lo esencial, las características centrales del análisis de Fourier de distribuciones de la clase $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La necesidad de “llegar tan lejos” está dada porque en nuestro desarrollo ulterior del *IDF* estaremos usando de manera central en análisis de Fourier de las distribuciones $v.p. \frac{1}{t}$ y $v.p. \frac{x_i}{|x|^{n+1}}$ que nos darán un punto de vista esclarecedor heurístico y computable para las aplicaciones a la Transformada de Hilbert y a las transformadas de Riesz.

El análisis de Fourier fue uno de los grandes logros de la matemática del siglo XIX que no ha cesado, a través de las décadas, y casi de los siglos, de mostrar su ductilidad en aplicaciones y sus desafíos en la matemática como ciencia en permanente expansión.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Fourier de f como la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la variable (frecuencial) ξ dada por

$$(4.24) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx,$$

donde $\xi \cdot x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ es el producto escalar o interno en $\mathbb{R}^n$.

La buena definición del operador $\wedge$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es clara ya que $|f(x)| |e^{-2\pi i \xi \cdot x}| = |f(x)|$ y por lo tanto la integral que lo define es convergente. No obstante, en general, $\hat{f}$ no está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, $\wedge : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, $\hat{f}$ resulta continua y tiende a cero cuando $|\xi| > \infty$. Pero no está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ en general. Un ejemplo clásico consiste en tomar $f = X_{(-1,1)}(t)$ en $\mathbb{R}$ ($n = 1$). Es importante la búsqueda de espacios funcionales y distribucionales F tales que $\wedge F \rightarrow F$ sea biyectiva y tenga una inversa calculable. Tres casos son importantes y paradigmáticos, $F = L^2(\mathbb{R}^n)$, $F = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $F = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Para nuestros propósitos, que incluyen en análisis de Fourier de distribuciones que no son funciones, como $v.p.\frac{1}{x}$ y $v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, $j = 1, \dots, n$, el análisis de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ no será suficiente. Necesitaremos considerar, al menos brevemente, la transformada de Fourier de distribuciones de Schwartz. Es decir, tendremos que definir y tener estrategias de cálculo del operador $\wedge; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ que extienda naturalmente la definición en $L^1(\mathbb{R}^n)$, que es la clásica, y que hemos introducido arriba. Como la definición que daremos para $\wedge$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ será por dualidad, y como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones test, está contenido en $L^1(\mathbb{R}^n)$, tenemos bien definida $\wedge$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$(4.25) \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

y sabemos, por el Lema de Riemann-Lebesgue, que esa nueva función $\widehat{\varphi}(\xi)$ es continua, acotada y tiende a cero si $|\xi| \rightarrow \infty$. Pero no sabemos si está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. El principal objetivo inmediato es probar el siguiente resultado que muestra cómo la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de funciones de prueba y la Transformada de Fourier se adaptan muy adecuadamente y este hecho se debe esencialmente a la dualidad de Fourier entre multiplicadores polinomiales y derivaciones.

TEOREMA 4.3.1. *Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos $\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$. Entonces*

- (1) $\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
- (2) $\wedge$ es lineal y continuo,
- (3) $\wedge$ es una biyección y su inversa es $\vee : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dada por $\check{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} \psi(\xi) d\xi$.

Con el objeto de simplificar la prueba del Teorema 4.3.1, probaremos antes un par de lemas que nos permitirán dar cuenta de las transformaciones de Fourier de derivaciones y de las derivaciones de las transformaciones de Fourier.

LEMA 4.3.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ un multi-índice cualquiera, entonces*

$$(4.26) \quad \widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi),$$

donde $(2\pi i \xi)^\alpha = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Demostración. Por inducción en $|\alpha|$: si $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha = e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ para algún $j = 1, \dots, n$, y por lo tanto, $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por definición de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es claro que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Calculemos su transformada de Fourier recordando que $\varphi(x) \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$ e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{x_j \in \mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) e^{-2\pi i \xi_j \cdot x_j} dx_j \right) e^{-2\pi i \sum_{e \in F_j} \xi_e x_e} dx_1 \cdots dx_{j-1} \cdots dx_{j+1} \cdots dx_n \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{x_j \in \mathbb{R}} (-2\pi i \xi_j) \varphi(x) e^{-2\pi i \xi_j x_j} dx_j \right) e^{-2\pi i \xi_e x_e} dx_1 \cdots dx_{j-1} \cdots dx_{j+1} \cdots dx_n \\
&= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
&= 2\pi i \xi_j \widehat{\varphi}(\xi) \\
&= (2\pi i \xi)^{e_j} \widehat{\varphi}(\xi),
\end{aligned}$$

que es la fórmula del enunciado cuando $\alpha = e_j$. La prueba por inducción, suponiendo la fórmula válida para $|\alpha| = m$, resulta simple ya que si $|\alpha| = m+1$, entonces $\alpha = p + e_j$ para $|\beta| = m$ y para algún $j = 1, \dots, n$. y por lo tanto podemos usar el argumento precedente ya que por estar $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, también $\partial^\beta \varphi(x) \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$. $\square$

LEMA 4.3.2. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, entonces $\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)]^\wedge(\xi)$.

Demostración. Otra vez hagamos inducción sobre $|\alpha|$ y tomemos $|\alpha| = 1$, es decir, $\alpha = e_j$ para algún $j = 1, \dots, n$. Entonces, como φ tiene decaimiento rápido,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{\varphi}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (-2\pi i x_j) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
&= [(-2\pi i x_j \varphi(x))]^\wedge(\xi) \\
&= [(-2\pi i x)^{e_j} \varphi(x)]^\wedge(\xi),
\end{aligned}$$

que es la fórmula del enunciado para $\alpha = e_j$. El resto del argumento inductivo es simple.

□

A continuación, se procederá a demostrar el teorema 4.3.1.

Demostración. Probemos primero para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Notemos primero que $\hat{\varphi}(\xi)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ya que $X^\gamma \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cualquier multi-índice γ , y entonces $\partial^\gamma \hat{\varphi}$ está bien definido. Pero tenemos que probar que, para cualquier par de multi-índices enteros α y β , tenemos que

$$(4.27) \quad \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi) \text{ es acotada en } \mathbb{R}^n.$$

Los dos lemas precedentes, conjuntamente, prueban que

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi) &= \xi^\alpha \left[(-2\pi i x)^\beta \varphi(x) \right]^\wedge (\xi) \\ &= \frac{(-2\pi i)^{|\beta|}}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} (2\pi i \xi)^\alpha \left[x^\beta \varphi(x) \right]^\wedge (\xi) \\ &= (-1)^{|\beta|} (2\pi i)^{|\beta| - |\alpha|} \left[\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x)) \right]^\wedge (\xi). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x))$ también está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x))$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, su transformada de Fourier $\left[\partial^\alpha (x^\beta \varphi(x)) \right]^\wedge (\xi)$ está uniformemente acotada. Entonces $\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi)$ está acotada en $\mathbb{R}^n$ cualesquiera sean α y β multi-índices en $(\mathbb{N}_0)^n$.

Es claro que lo mismo ocurre con el operador $\vee$. También es claro que $\wedge$ y $\vee$ son lineales de la definición de ambos como operadores integrales. Para probar la continuidad de $\wedge$ (la de $\vee$ sale análogamente) usemos el cálculo precedente. Sea $\{\dot{\varphi}_k : k \geq 1\}$ una sucesión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que tiende a cero, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}_k(\xi)| &\leq c \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \widehat{\partial^\alpha (x^\beta \varphi_k)}(\xi) \right| \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (x^\beta \varphi_k(x))| dx \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(1 + |x|^2)^{n+1} \partial^\alpha (x^\beta \varphi_k(x))|}{(1 + |x|^2)^{n+1}} dx \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{n+1}} \right) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{n+1} \partial^\alpha (x^\beta \varphi_k(x))| \end{aligned}$$

$$= \tilde{c} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{n+1} |\partial^\alpha (x^\beta \varphi_k(x))|.$$

que tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$ ya que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$, $k \rightarrow \infty$. Resta ver que $\check{\check{\varphi}} = \varphi$. Es decir, la fórmula de inversión.

Para demostrar que $\check{\check{\varphi}} = \varphi$, usaremos un hecho central de la teoría que pone en evidencia, casi empírica, el hecho que la transformada de Fourier deja invariante $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. No sólo deja invariante $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sino que deja invariante a nuestro caso paradigmático de función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: la Gaussiana.

LEMA 4.3.3. Sea $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, entonces $\hat{g}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} = g(\xi)$.

Demostración. Sea $G(\xi) = e^{\pi|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$, notemos que

$$\begin{aligned} G(0) &= e^{\pi \cdot 0} \hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_i^2} dx_i \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es decir $G(0) = 1$. Hay que probar que $G(\xi) = 1$. Si probamos que el gradiente de G se anula en cada punto, tendremos que G será constante, pero esa constante tiene que ser el valor de G en $\xi_0 = 0$, que es uno. Calculemos las derivadas parciales de G , usando los lema 4.3.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} &= 2\pi \xi_j e^{\pi|\xi|^2} \hat{g}(\xi) + e^{\pi|\xi|^2} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{g}(\xi) \\ &= e^{\pi|\xi|^2} \left(-i \widehat{\frac{\partial g}{\partial x_j}}(\xi) - (2\pi i x_j g(x))^\wedge(\xi) \right) \\ &= -i e^{\pi|\xi|^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + 2\pi x_j g(x) \right)^\wedge(\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\pi|x|^2} = -2\pi x_j e^{-\pi|x|^2} = -2\pi x_j g(x)$. □

Probemos la fórmula de inversión. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces ya sabemos que $\hat{\varphi}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En lo que sigue, usaremos g para denotar la función del Lema 4.3.3.

Por consiguiente, $\check{\varphi}$ está bien definida para x fijo por

$$(4.28) \quad \check{\varphi}(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

$$(4.29) \quad = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} \varphi(y) dy \right) d\xi$$

$$(4.30) \quad = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} \varphi(y) dy \right) d\xi$$

$$(4.31) \quad = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} g\left(\frac{\xi}{k}\right) \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} \varphi(y) dy \right) d\xi$$

$$(4.32) \quad = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y-x) \cdot \xi} g\left(\frac{\xi}{k}\right) \xi d\xi \right) dy$$

$$(4.33) \quad = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(e^{-2\pi i (y-x) \cdot k\eta} g(\eta) k^n d\eta \right) dy$$

$$(4.34) \quad = \lim_{k \rightarrow \infty} k^n \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(y) \hat{g}(k(y-x)) dy$$

$$(4.35) \quad = \lim_{k \rightarrow \infty} \int k^n e^{-\pi k^2 |x-y|^2} \varphi(y) dy$$

$$(4.36) \quad = \varphi(x)$$

ya que $k^n e^{-\pi k^2 |x-y|^2} \rightarrow \delta_x$, $k \rightarrow \infty$ □

El teorema 4.3.1 que acabamos de probar muestra la adecuación y la estabilidad de $\wedge$ y $\vee$ en la clase de funciones test $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como la transformada de Fourier y su inversa se definen por dualidad en el espacio vectorial topológico de las distribuciones temperadas, resulta que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ también es invariante por $\wedge$ y $\vee$ y que ambos son isomorfismos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y resultan también, en este contexto muy general, inversas una de la otra.

TEOREMA 4.3.2. *Para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, su transformada de Fourier es la distribución $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$. Entonces*

$$(4.37) \quad \wedge : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

es lineal, continua, biyectiva y su inversa es $\vee$ dada por $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ que también es lineal, continua y biyectiva.

Demostración.

(1) Linealidad de $\wedge$.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T + \beta S)^\wedge, \varphi \rangle &= \langle \alpha T + \beta S, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \alpha \langle T, \hat{\varphi} \rangle + \beta \langle S, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \alpha \langle \hat{T}, \varphi \rangle + \beta \langle \hat{S}, \varphi \rangle \\ &= \langle \alpha \hat{T} + \beta \hat{S}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

para toda φ , entonces $(\alpha T + \beta S)^\wedge = \alpha \hat{T} + \beta \hat{S}$.

(2) Continuidad en $\wedge$.

Sea $T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} 0$, entonces $\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente

$$\langle \hat{T}_k, \varphi \rangle = \langle T_k, \hat{\varphi} \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

ya que $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Biyección e inversa.

$$\langle \check{\hat{T}}, \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \check{\check{\varphi}} \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Es claro que $\vee$ también es lineal y continua y que

$$(4.38) \quad \check{\check{T}} = T.$$

□

En particular, como $v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $j = 1, \dots, n$, resulta que todas ellas tienen una transformada de Fourier bien definida. En los próximos resultados, identificaremos en términos de funciones sencillas esas transformadas de Fourier.

PROPOSICIÓN 4.3.2. *La distribución $v.p.\frac{1}{x}$ tiene por transformada de Fourier una función. Precisamente, en términos de las notaciones precedentes, $\left(v.p.\frac{1}{x}\right)^\wedge = T_\sigma$, donde T_σ es la distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ inducida por la función*

$$(4.39) \quad \sigma(\xi) = -\frac{i}{\pi} \text{signo } \xi$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(v.p. \frac{1}{x} \right)^\wedge, \varphi \right\rangle &= \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi| > \varepsilon} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\xi} d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\xi| > \varepsilon} \frac{1}{\xi} \left(\int_{x \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \varphi(x) dx \right) d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \frac{1}{\xi} \left(\int_{x \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \varphi(x) dx \right) d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \right) dx \\
&= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\frac{1}{\varepsilon} > |x| > \varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi \right) dx \\
&= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) \left(\int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \frac{\sin(2\pi x \xi)}{2\pi x \xi} \cdot 2\pi x d\xi \right) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^-} \varphi(x) \left(\int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi| > \varepsilon} \frac{\sin(2\pi |x| \xi)}{2\pi |x| \xi} \cdot 2\pi |x| d\xi \right) dx \right] \\
&= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\frac{2\pi|x|}{\varepsilon} > |\xi'| > 2\pi|x|\varepsilon} \frac{\sin \xi'}{\xi'} d\xi' \right) \text{signo } x dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{x \in \mathbb{R}} \text{signo } x \varphi(x) dx,
\end{aligned}$$

ya que la integral impropia puede evaluarse

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\delta} > |\xi'| > \delta} \frac{\sin \xi'}{\xi'} d\xi' = \frac{1}{\pi}.$$

En otros términos,

$$\left(v.p. \frac{1}{x} \right)^\wedge (\xi) = \frac{1}{\pi} \text{signo } \xi.$$

□

Es notable la simplicidad de la transformada de Fourier de $v.p. \frac{1}{x}$ mientras que su cálculo directo sobre una φ requiere el análisis de una integral singular. Notemos que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle &= \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i 0 x} \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi(x) dx,$$

es decir, $\widehat{\delta}_0(\xi) \equiv 1$. El caracter imaginario de $\left(v.p. \frac{1}{x}\right)^\wedge$ se debe a la imparidad de $v.p. \frac{1}{x}$.

El problema de encontrar la estructura de las transformadas de Fourier de las transformadas de Riesz es más complejo. Dado que la versión de Fourier de la transformada de Riesz jugará un papel central en nuestro método de *IDF* que abordaremos en el Capítulo 7, desarrollaremos a continuación un enfoque posible. Recordemos que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ si y sólo si la identidad $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda > 0$. Notemos que una función homogénea de grado m queda caracterizada por sus valores en la esfera unitaria S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. En efecto

$$f(x) = f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x|^m f\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \neq 0,$$

notemos que $\frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$. Sea $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ homogénea de grado m . En la sección 4.2 de este capítulo definimos el operador dilatación $D_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Con esta notación, como f es homogénea de grado m , tenemos que $D_\lambda f = \lambda^m f$. Como hemos extendido el operador D_λ a distribuciones de Schwartz por la fórmula $\langle D_\lambda T, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{1}{\lambda^m} D_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \right\rangle$, podemos considerar y definir homogeneidad de grado m de una distribución de Schwartz por la fórmula

$$D_\lambda T = \lambda^m T, \quad \forall \lambda > 0.$$

Sea $T = \delta_0$, entonces para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle D_\lambda T, \varphi \rangle &= \left\langle \delta_0, \frac{1}{\lambda^n} \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \varphi(0) \\ &= \lambda^{-n} \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_\lambda T = \lambda^{-n} T$ y así resulta que δ_0 es homogénea de grado $-n$.

Tomemos ahora $T = v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$. Calculemos, para $\lambda > 0$, $D_\lambda v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$. Para ello tomemos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\langle D_\lambda v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \varphi \right\rangle = \left\langle v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \frac{1}{\lambda^n} \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \frac{1}{\lambda^m} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \lambda\varepsilon} \frac{\lambda y_j}{|\lambda y|^{n+1}} \varphi(y) dy \\
&= \lambda^{-n} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|y| > \delta} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy \\
&= \lambda^{-n} v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Así tenemos probado el siguiente resultado.

LEMA 4.3.4. *Para cada $j = 1, \dots, n$ la distribución $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ es homogénea de grado $-n$.*

En lo que sigue exploramos la transformada de Fourier de distribuciones homogéneas. El resultado que será útil en el análisis de la estructura de la transformada de Fourier de las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ está contenido en el próximo enunciado.

PROPOSICIÓN 4.3.3. *Si T es una distribución homogénea de grado m , entonces $\hat{T}$ es una distribución homogénea de grado $-n - m$.*

Demostración. Sabemos que $D_\lambda T = \lambda^m T$ y tenemos que ver $D_\lambda \hat{T} = \lambda^{-n-m} \hat{T}$. Sea φ una función de prueba, entonces usando las definiciones de D_λ y de la transformada de Fourier tenemos que

$$(4.40) \quad \langle D_\lambda \hat{T}, \varphi \rangle = \left\langle \hat{T}, \frac{1}{\lambda^n} \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\rangle$$

$$(4.41) \quad = \left\langle T, \frac{1}{\lambda^n} \widehat{\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \right\rangle$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^n} \widehat{\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda^n} \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i \xi \cdot (\lambda z)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i (\lambda \xi) \cdot z} dz \\
&= \hat{\varphi}(\lambda \xi).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle D_\lambda \hat{T}, \varphi \rangle &= \langle T, \hat{\varphi}(\lambda \xi) \rangle \\
&= \lambda^{-n} \langle T, \lambda^n \hat{\varphi}(\lambda \xi) \rangle \\
&= \lambda^{-n} \left\langle D_{\frac{1}{\lambda}} T, \hat{\varphi} \right\rangle \\
&= \lambda^{-n} \left\langle \left(\frac{1}{\lambda} \right)^m T, \hat{\varphi} \right\rangle \\
&= \lambda^{-n-m} \langle T, \hat{\varphi} \rangle \\
&= \lambda^{-n-m} \langle \hat{T}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, como la igualdad anterior vale para toda la función test φ , tenemos que

$$(4.42) \quad D_\lambda \hat{T} = \lambda^{-n-m} \hat{T}.$$

□

COROLARIO 4.3.1. *La transformada de Fourier de $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ es una distribución homogénea de grado cero. Es decir*

$$(4.43) \quad D_\lambda \left(\widehat{v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}} \right) = \widehat{v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}}$$

Demostración. Recordemos que $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ es homogénea de grado $-n$. □

Así tenemos que la acción de dilataciones en nuestros núcleos singulares $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ nos muestran que aquellos son homogéneos de grado $-n$, si n es la dimensión del espacio Euclideo, mientras que sus corespondientes transformadas de Fourier son homogéneas de grado cero. Este último resultado, contenido en el Corolario 4.3.1 nos da ua información muy relevante sobre la estructura de $\left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)^\wedge$. Más información puede obtenerse de las relaciones entre las transformadas de Fourier y las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ con rotaciones del espacio $\mathbb{R}^n$. Para evitar o disminuir confusiones denotaremos con ρ el operador lineal que representa una rotación en el espacio. Recordemos que $\rho(x) \cdot y = x \cdot \rho^T(y) = x \cdot \rho^{-1}(y)$ ya que $\rho^T = \rho^{-1}$ para las rotaciones. Y usaremos R para denotar la matriz de ρ con ρ_{jk} las entradas de R .

Recordemos también que habíamos definido la acción de una rotación ρ sobre una distribución T por la fórmula

$$\begin{aligned}\langle \rho(T), \varphi \rangle &= \langle T, \rho^{-1}(\varphi) \rangle \\ &= \langle T, \rho^\tau(\varphi) \rangle \\ &= \langle T, \varphi \circ \rho^\tau \rangle\end{aligned}$$

LEMA 4.3.5. *La transformada de Fourier conmuta con rotaciones. Precisamente, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y ρ es una rotación de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$(4.44) \quad (\rho(T))^\wedge = \rho(\hat{T})$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\langle (\rho(T))^\wedge, \varphi \rangle = \langle \rho(T), \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \rho^T(\hat{\varphi}) \rangle$$

Calculemos $\rho^T(\hat{\varphi})$, cambiando la variable x por $y = \rho(x)$

$$\begin{aligned}\rho^T(\hat{\varphi})(\xi) &= \hat{\varphi}(\rho^\tau \xi) \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i (\rho^\tau \xi) \cdot x} dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot (\rho x)} dx \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(\rho^\tau y) e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \\ &= (\rho^\tau(\varphi))^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle (\rho(T))^\wedge, \varphi \rangle &= \langle T, (\rho^\tau(\varphi))^\wedge \rangle \\ &= \langle \hat{T}, \rho^\tau(\varphi) \rangle \\ &= \langle \rho(\hat{T}), \varphi \rangle\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Con el objeto de estudiar la acción de las rotaciones en las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, j = 1, \dots, n$, vamos a considerar el vector distribucional que ellas definen.

Conviene considerar, al menos brevemente, la idea de las distribuciones a valores vectoriales. si $T_1, \dots, T_n$ son n -distribuciones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, podemos definir

$$\vec{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

por

$$(4.45) \quad \langle \langle \vec{T}, \varphi \rangle \rangle = (\langle T_1, \varphi \rangle, \dots, \langle T_n, \varphi \rangle).$$

Escribimos $\vec{T} = (T_1, \dots, T_n)$. Si ρ es una rotación de $\mathbb{R}^n$, podemos también considerar las distribuciones $\rho(T_j)$ dadas por

$$(4.46) \quad \langle \rho(T_j), \varphi \rangle = \langle T_j, \rho^\tau(\varphi) \rangle = \langle T_j, \varphi \circ \rho^\tau \rangle$$

y construir el correspondiente vector

$$(4.47) \quad \vec{T}_\rho = (\rho(T_1), \dots, \rho(T_n)).$$

Vale preguntarse si la distribución $\vec{T}_\rho$ tiene algo que ver con la distribución $R\vec{T} = \left(\sum_{k=1}^n \rho_{1k} T_k, \dots, \sum_{k=1}^n \rho_{nk} T_k \right)$.

PROPOSICIÓN 4.3.4. Sea $v.p. \frac{x}{|x|^{n+1}} = \left(v.p. \frac{x_1}{|x|^{n+1}}, \dots, v.p. \frac{x_n}{|x|^{n+1}} \right)$ el vector distribucional cuyas componentes son los valores principales de $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, $j = 1, \dots, n$. Entonces para toda rotación ρ cuya matriz es R se tiene que

$$(4.48) \quad R \ v.p. \frac{x}{|x|^{n+1}} = \left(\rho \left(v.p. \frac{x_1}{|x|^{n+1}} \right), \dots, \rho \left(v.p. \frac{x_n}{|x|^{n+1}} \right) \right)$$

Más explícitamente, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$(4.49) \quad \sum_{k=1}^n \rho_{jk} v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} = \rho \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $j = 1, \dots, n$, entonces, cambiando variable $y = \rho^\tau x$,

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right), \varphi \right\rangle &= \left\langle v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \varphi \circ \rho^\tau \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} (\varphi \circ \rho^\tau)(x) \frac{x_j}{|x|^{n+1}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(y) \frac{\sum_{k=1}^n \rho_{jk} y_k}{|y|^{n+1}} dy \\
&= \sum_{k=1}^n \rho_{jk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \varepsilon} \varphi(y) \frac{y_k}{|y|^{n+1}} dy \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^n \rho_{jk} v.p. \frac{y_k}{|y|^{n+1}}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$(4.50) \quad \left(R \quad v.p. \frac{x}{|x|^{n+1}} \right)_j = \rho \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)$$

para todo j y la Proposición está probada. $\square$

Por otra parte también podemos considerar la transformada de Fourier de una distribución $\vec{T} = (T_1, \dots, T_n)$ simplemente como la distribución vectorial $\hat{\vec{T}} = (\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_n)$ que sigue estando bien definida cuando $T_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$.

La conmutación de la transformada de Fourier con las rotaciones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la homogeneidad de grado cero de las transformadas de Fourier de las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ y la última proposición permiten probar el siguiente resultado.

TEOREMA 4.3.3. *Sea $M_j = v.p. \widehat{\frac{x_j}{|x|^{n+1}}}$, $j = 1, \dots, n$ y sea $\vec{M} = (M_1, \dots, M_n)$ la distribución a valores vectoriales definida por la lista de los M_j . Entonces*

- a. $\vec{M}$ es homogénea de grado cero, es decir $D_\lambda \vec{M} = \vec{M}$, $\lambda > 0$,*
- b. $R \vec{M} = \vec{M}_\rho = (\rho(M_1), \dots, \rho(M_n))$ para toda rotación ρ en $\mathbb{R}^n$.*

Precisemos los ítems a. y b.,

- a'. $(D_\lambda M_1, \dots, D_\lambda M_n) = (M_1, \dots, M_n)$ para todo $\lambda > 0$,*
- b'. para todo $j = 1, \dots, n$ y para toda rotación ρ de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz R está dada por $R = (\rho_{jk})_{j,k=1, \dots, n}$, se tiene que*

$$(4.51) \quad \sum_{k=1}^n \rho_{jk} M_k = \rho(M_j)$$

o bien

$$\sum_{k=1}^n \rho_{jk} \langle M_k, \varphi \rangle = \langle M_j, \varphi \circ \rho^\tau \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración.

a'. sigue de la homogeneidad de grado cero de $M_j = \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)$ puesto que $D_\lambda M_j = M_j$ para todo $j = 1, \dots, n$.

b'. Puesto que por la proposición 4.3.4 tenemos que, para $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n \rho_{jk} v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} = \rho \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right),$$

tomando la transformada de Fourier en ambos miembros, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \rho_{jk} M_k &= \left[\rho \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) \right]^\wedge \\ &= \rho \left[\left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)^\wedge \right] \\ &= \rho(M_j) \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición contiene un resultado clave para obtener la forma precisa de las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, $j = 1, \dots, n$ a partir del Teorema precedente.

PROPOSICIÓN 4.3.5. *Supongamos que $\vec{M}(x) = (M_1(x), \dots, M_n(x))$ es una función a valores vectoriales (un campo vectorial de dimensión n en $\mathbb{R}^n$) tal que*

a. $\vec{M}$ es homogénea de grado cero, i.e.

$$(4.52) \quad \vec{M}(\lambda x) = \vec{M}, \lambda > 0,$$

b.

$$(4.53) \quad R\vec{M}(x) = \vec{M}(\rho^\tau x) = (M_1(\rho^\tau x), \dots, M_n(\rho^\tau x))$$

para toda rotación ρ de $\mathbb{R}^n$, donde R es, como antes, la matriz de rotación asociada a ρ , y para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$(4.54) \quad \vec{M}(x) = c \frac{x}{|x|},$$

o, en coordenadas,

$$(4.55) \quad M_j(x) = c \frac{x_j}{|x|},$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Demostración. Como $\vec{M}$ es homogénea de grado cero, tenemos que, para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

$$(4.56) \quad \vec{M}(x) = \vec{M}\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = \vec{M}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Como $\frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$, la esfera $n-1$ dimensional en $\mathbb{R}^n$, tenemos que $\vec{M}$ está completamente definida por los valores que toma en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. Por consiguiente es suficiente probar que si $y \in S^{n-1}$, ($|y| = 1$), entonces

$$(4.57) \quad \vec{M}(y) = c \frac{y}{|y|} = cy.$$

O, si se quiere, que

$$(4.58) \quad M_j(y) = cy_j$$

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, notemos que todos los e_j son elementos de S^{n-1} .

Sea ρ una cualquiera de las rotaciones que dejan fijo e_1

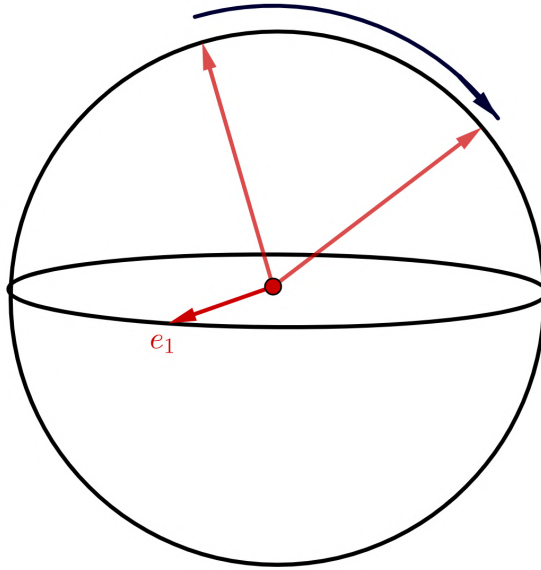


FIGURA 2. El vector e_1 y las rotaciones ρ que lo dejan fijo en la esfera unitaria S^{n-1} .

Entonces, por b . $R\vec{M}(e_1) = \vec{M}(\rho^\tau e_1)$. En coordenadas,

$$(4.59) \quad M_j(\rho^\tau e_1) = \sum_{k=1}^n \rho_{jk} M_k(e_1).$$

En particular, para $j = 1$,

$$(4.60) \quad M_1(e_1) = M_1(\rho^\tau e_1)$$

$$(4.61) \quad = \sum_{k=1}^n \rho_{1k} M_k(e_1)$$

$$(4.62) \quad = M_1(e_1) + \sum_{k=2}^n \rho_{1k} M_k(e_1).$$

De aquí que $\sum_{k=2}^n \rho_{1k} M_k(e_1) = 0$ para toda rotación del hiperplano perpendicular a e_1 . Pero esto sólo es posible si $M_2(e_1) = M_3(e_1) = \dots = M_n(e_1) = 0$. Por consiguiente, para cualquier rotación ρ , tenemos que

$$(4.63) \quad M_j(\rho^\tau e_1) = \sum_{k=1}^n \rho_{jk} M_k(e_1)$$

$$(4.64) \quad = \rho_{j1} M_1(e_1).$$

Dado $y \in S^{n-1}$ tenemos ρ tal que $\rho^\tau e_1 = y$. Entonces tendremos que $M_j(y) = \rho_{j1} M_1(e_1)$. Por otra parte, como $\rho^\tau e_1 = y$, tenemos que $y_j = \sum_{k=1}^n \rho_{jk}(e_1)_k = \rho_{j1}$. Por consiguiente, $M_j(y) = M_1(e_1) y_j$ para todo $j = 1, \dots, n$ que es la tesis con $c = M_1(e_1)$ $\square$

Ya hemos visto que el caso unidimensional $n = 1$, aunque $v.p. \frac{1}{x}$ no es una función, su transformada de Fourier sí lo es. Bajo la hipótesis (innecesaria) de que $\left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^\wedge(\xi)$ es función, podemos aplicar la proposición precedente ya que sabemos que $M_j(\xi) = \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^\wedge(\xi)$ satisfacen las hipótesis $a.$ y $b.$ de la proposición 4.3.5 para obtener que

$$(4.65) \quad \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^\wedge(\xi) = c \frac{\xi_j}{|\xi|}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Por otra parte, como las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ son “impares” resulta que su transformada de Fourier anulará la parte real (cosenos) y por lo tanto

$$(4.66) \quad \left(v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^\wedge(\xi) = ci \frac{\xi_j}{|\xi|}.$$

En esta forma funcional para la transformada de Fourier de las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ se basará el método de *IDF* que desarrollaremos en el Capítulo 7.

Tanto los resultados precedentes sobre la estructura de la transformada de Fourier de las distribuciones $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, como el cálculo directo que hicimos para la distribución unidimensional $v.p. \frac{1}{x}$, son casos particulares de una familia más grande, los núcleos de Calderón-Zygmund que pueden escribirse de la forma $v.p. \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ con Ω homogénea de grado cero y de integral nula en la esfera unitaria S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Para el caso de $v.p. \frac{1}{x}$, $\Omega(x) = \text{signo } x$ y para $v.p. \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, $\Omega(x) = \frac{x_j}{|x|}$.

Capítulo 5

Versión de Fourier de las transformadas de Hilbert y de Riesz

5.1. Introducción

En este breve capítulo damos las versiones frecuenciales a través de la Transformada de Fourier de las Transformadas de Hilbert y Riesz. El resultado principal se basa en los del Capítulo 4 y en el Teorema de Convolución.

5.2. Transformada de Fourier de la Convolución

El resultado principal de este capítulo es una consecuencia del teorema que relaciona la Transformada de Fourier con el producto de Convolución. En el caso de funciones test de la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que resulta un álgebra con los dos productos: el producto puntual de funciones y el producto de convolución. El Teorema de Convolución muestra que la Transformada de Fourier es un isomorfismo entre estas dos álgebras

$$(5.1) \quad \wedge : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), *) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \bullet)$$

PROPOSICIÓN 5.2.1. *Sea φ y ψ dos funciones de prueba en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\varphi * \psi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \hat{\psi}(\xi)$ y $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Usando el Teorema de Fubini y un simple cambio de variables, tenemos

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)^\wedge(\xi) &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (\varphi * \psi)(x) dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \psi(y) dy \right) dx \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \psi(y) \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \psi(y) \left(\int_{z \in \mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i (y+z) \cdot \xi} dz \right) dy \\ &= \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) \left(\int_{z \in \mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i z \cdot \xi} dz \right) \end{aligned}$$

$$=\hat{\psi}(\xi) \hat{\varphi}(\xi).$$

Por otra parte, como $\wedge$ es un isomorfismo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, resulta que $\hat{\varphi}$ y $\hat{\psi}$ están en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y también $\hat{\varphi} \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, $(\varphi * \psi)^\wedge \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y también $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Los operadores de Hilbert y de Riesz son convoluciones, pero uno de los factores, $v.p.\frac{1}{x}$ o $v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, no está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en la sección anterior hemos definido la transformada de Hilbert de φ como la convolución de la distribución $v.p.\frac{1}{x}$ con la función test φ ,

$$(5.2) \quad H\varphi(t) = \left(v.p.\frac{1}{x} * \varphi \right) (t).$$

Análogamente, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, las n transformadas de Riesz de φ están dadas por

$$(5.3) \quad R_j\varphi(x) = \left(v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}} * \varphi \right) (x), \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

El resultado que probaremos, habiendo calculado ya las transformadas de Fourier de $v.p.\frac{1}{x}$ y de $v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ será una consecuencia directa del teorema de multiplicación que muestra que la transformada de Fourier de la convolución es el producto de las transformadas de Fourier.

En este contexto, todavía hay un Teorema de Multiplicación, que no demostraremos, ya que requiere de un profundo resultado de representación de distribuciones, que nos permite obtener las transformadas de Fourier de H y de R_j , $j = 1, \dots, n$.

TEOREMA 5.2.1. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$(5.4) \quad (T * S)^\wedge = \hat{T} \hat{S},$$

donde el producto de la derecha está bien definido ya que, siendo S de soporte compacto, $\hat{S}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La demostración rigurosa de este resultado figura en [2].

5.3. Versión frecuencial de H y R_j

Con el Teorema 5.2.1 podemos probar el siguiente resultado que sea la base para el algoritmo de Cálculo que usaremos en los capítulos siguientes.

PROPOSICIÓN 5.3.1. *Dada una función test φ ,*

(1) si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces

$$(5.5) \quad \widehat{H\varphi}(\xi) = -i \operatorname{signo} \xi \widehat{\varphi}(\xi),$$

(2) si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $j = 1, \dots, n$, entonces

$$(5.6) \quad \widehat{R_j\varphi}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi}(\xi).$$

Demostración. Puesto que $H\varphi$ y $R_j\varphi$ son operadores de convolución de φ con las distribuciones valor principal de cada contexto, y siendo que $\varphi \in \mathcal{D}$ tiene soporte compacto ($\varphi \in \mathcal{E}'$), podemos aplicar el Teorema de Multiplicación precedente y los resultados de las secciones anteriores en los que habíamos calculado $\left(v.p.\frac{1}{x}\right)^\wedge$ y $\left(v.p.\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)^\wedge$. $\square$

Notemos que, en (1),

$$(5.7) \quad \widehat{H\varphi}(\xi) = -i \operatorname{signo} \xi \widehat{\varphi}(\xi) = -i \frac{\xi}{|\xi|} \widehat{\varphi}(\xi)$$

y por lo tanto los formatos de Fourier de H y R_j son los mismos y Hilbert es Riesz en dimensión uno. Desde las caracterizaciones (5.4) y (5.5) de H y de R_j y de la identidad de Parseval, se deduce directamente que tanto H como R_j presentan el espacio L^2 de las señales de cuadrado integrable. La Teoría General de Integrales Singulares muestra que tanto H como cualquier R_j también preservan todos los espacios de Lebesgue L^p , $1 < p < \infty$.

Capítulo 6

Fase instantánea y fase relativa instantánea. PLI para señales unidimensionales

6.1. Introducción

En este capítulo aplicaremos el cocepto principal unidimenisonal del Capítulo 5, la transformada de Hilbert, para dar una definición rigurosa de la fase instantánea de una señal que nos servirá de insumo para estudiar fases relativas entre dos señales y diferentes maneras de definir desfasajes globales entre señales temporales.

6.2. Fase instantánea

Sea $F(z)$ una función analítica (entera) en el plano complejo $\mathbb{C}$, $F(z)$ se escribe usualmente en sus partes real e imaginaria, $F(z) = \Re F(z) + \Im F(z)$. Cuando F se restringe al eje $\Im z = 0$, $\Re F(t + i0) = \Re F(t)$, usamos t en vez de x porque la variable real será para nosotros el tiempo, podemos pensar que $\Re F(t) = \varphi(t)$ es una señal analógica dada. Por ejemplo, supongamos que $F(z) = e^{iz}$, que es analítica en todo el plano complejo. En este caso,

$$\begin{aligned} F(t + iy) &= e^{i(t+iy)} \\ &= e^{-y} e^{it} \\ &= e^{-y} (\cos t + i \sin t). \end{aligned}$$

Cuando $y = 0$ tenemos que

$$(6.1) \quad F(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

En la representación polar de F restringida al eje real $y = 0$, encontramos la fase de la señal $\cos t$,

$$(6.2) \quad t = \arctan \frac{\Im F(t)}{\Re F(t)}.$$

El problema que hace necesaria la introducción de la transformada de Hilbert es que las señales analógicas generales no son partes reales de restricciones de funciones analíticas en todo el plano complejo. Sin embargo, “toda” señal $\varphi(t)$ puede verse como el valor de borde para $y = 0$ de una función armónica en $\mathbb{I}m z > 0$ y, por lo tanto, tomando una armónica conjugada a través del sistema de Cauchy Riemann, $\varphi(t)$ es el valor de borde de la parte real de una función analítica en $\mathbb{I}m z > 0$. ¿Cuál es el valor de borde para $y = 0$ de la parte imaginaria de esta función analítica? Es precisamente la transformada de Hilbert de la señal φ con la que empezamos.

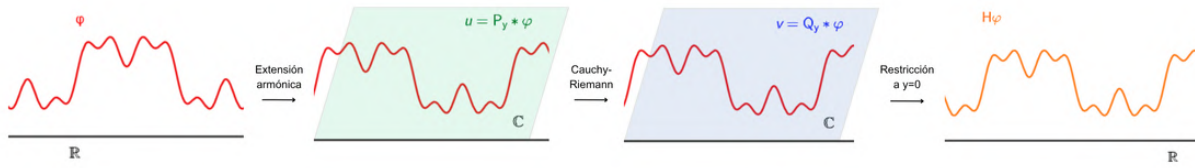


FIGURA 1. Esquema conceptual de la relación entre una señal real $\varphi(t)$ y su función analítica asociada en el semiplano superior. La parte imaginaria en el borde $y = 0$ corresponde a la transformada de Hilbert de $\varphi(t)$.

Esquemáticamente con este algoritmo, al menos como límite para $y = 0$, recuperamos el “verdadero valor” de $F(t) = F(t + i0) = \varphi(t) + iH\varphi(t)$. Por consiguiente, escribiendo el número complejo $F(t)$ en su forma polar, resulta

$$(6.3) \quad \varphi(t) + iH\varphi(t) = A(t)e^{i\phi(t)}$$

donde $A(t) = \sqrt{\varphi^2(t) + H^2\varphi(t)}$ y $\phi(t) = \arctan \frac{H\varphi(t)}{\varphi(t)}$

DEFINICIÓN 6.2.1. La fase instantánea asociada a una señal analógica $\varphi(t)$ está dada por

$$(6.4) \quad \phi(t) = \arctan \frac{H\varphi(t)}{\varphi(t)}.$$

La fase absoluta de una señal es menor relevante que el análisis de las fases relativas de dos señales o aún de cualquier par de un grupo más grande de señales ya que la comparación puede poner en evidencia sincronización entre partes de un sistema bajo estudio.

Esto induce diversas comparaciones de fases instantáneas correspondientes a señales diferentes, aún con amplitudes muy diferentes. Supongamos que $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son dos

señales conocidas, por ejemplo, los potenciales correspondientes a dos electrodos diferentes en EEG medidos en el mismo intervalo temporal. Denotemos con $\Phi_j(t) = \arctan \frac{H\varphi_j(t)}{\varphi_j(t)}$, $j = 1, 2$ a las correspondientes fases instantáneas. Hay muchas maneras de comparar $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ en cada instante, por ejemplo, podemos ordenarlas y registrar en cada instante t , cuál de las dos fases es menor; también podemos restarlas $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ o su opuesta $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$; o podríamos también mirar el desfase instantáneo absoluto $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|$.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, lo que ocurra en un instante particular es poco relevante y no significativo, más importante es generar dispositivos que permitan medir si una señal tiene globalmente una fase diferente de la de otra señal o si ellas son globalmente similares en todo el intervalo común de duración de las señales.

Anticipando una definición que daremos en el próximo capítulo para “señales multiparamétricas” (imágenes, por ejemplo) daremos dos definiciones de desfase instantáneo o fase relativa instantánea. El primero, el usual, generará el PLI definido en $[x]$, el segundo registra el valor absoluto de la diferencia de fases.

DEFINICIÓN 6.2.2. Sean $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ dos señales definidas en el mismo intervalo temporal, definimos la fase relativa instantánea de φ_1 con respecto a φ_2 en el instante t por

$$(6.5) \quad \Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$$

y la fase absoluta instantánea entre φ_1 y φ_2 en el instante t por

$$(6.6) \quad |\Delta|(\varphi_1, \varphi_2)(t) = |\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)|$$

Observación: $\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t) = -\Delta(\varphi_2, \varphi_1)(t)$ y $|\Delta|(\varphi_1, \varphi_2)(t) = |\Delta|(\varphi_2, \varphi_1)(t)$

6.3. Cuantificación global de la diferencia de fases: *PLI*, *IDF*

Notemos también que si I denota el intervalo temporal en el que ambas señales φ_1 y φ_2 están definidas, entonces I se puede partir en tres conjuntos bien diferenciados, $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

- $I_1 = \{t \in I : \Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t) > 0\}$
- $I_2 = \{t \in I : \Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t) = 0\}$

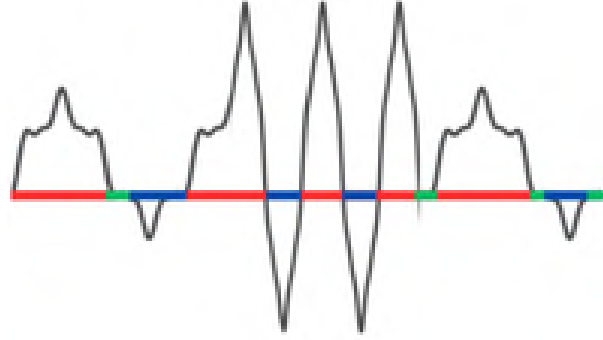


FIGURA 2. Partición del intervalo temporal I en tres subconjuntos I_1 , I_2 e I_3 según el signo de la diferencia $\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)$. Cada subconjunto representa los instantes en los que φ_1 es mayor, igual o menor que φ_2 , respectivamente.

- $I_3 = \{t \in I : \Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t) < 0\}$

Es claro que una magnitud global (macroscópica) que muestra la diferencia o coincidencia de fases entre φ_1 y φ_2 está contenida en la medida de los tres conjuntos.

- Si predomina el azul, habrá mucha coincidencia de fases.
- Si predomina el verde, la fase de φ_1 “adelanta” a la de φ_2 .
- Si predomina el rojo, al revés.

Esto puede calcularse de manera sencilla en un sólo índice, teniendo en cuenta el signo de $\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)$ o el signo de $\sin \Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)$, que también es el signo de la parte imaginaria del número complejo $e^{i\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)}$.

DEFINICIÓN 6.3.1. Dadas dos señales $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ con fases instantáneas respectivas $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ y amplitudes arbitrarias, el **Phase Lag Index (PLI) (Índice de retraso de fases)** [3] está dado por el valor absoluto del promedio de signo $\mathbb{I}m e^{i\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)}$ sobre el intervalo temporal. En otros términos

$$(6.7) \quad PLI(\varphi_1, \varphi_2, I) = |\langle \text{sign } \mathbb{I}m e^{i\Delta(\varphi_1, \varphi_2)} \rangle_I| = \frac{1}{|I|} \left| \int_I \text{sign } \mathbb{I}m e^{i\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t)} dt \right|.$$

Otra magnitud de interés se obtiene promediando en el intervalo I la fase relativa instantánea absoluta de las señales dadas. Para distinguir de PLI , la llamaremos **Índice de Divergencia de Fases (IDF) (Phase Divergence Index)** que estará dado por

$$(6.8) \quad IDF(\varphi_1, \varphi_2, I) = \langle |\Delta|(\varphi_1, \varphi_2) \rangle = \frac{1}{|I|} \int_I |\Delta|(\varphi_1, \varphi_2)(t) dt.$$

Claro que en los algoritmos concretos de aplicación las integrales que definen (PLI) e (IDF) se discretizan en N subintervalos de la misma longitud, produciendo una sucesión finita $t_1, t_2, \dots, t_N$ de puntos en cada uno de estos subintervalos, por ejemplo el extremo izquierdo, con ello las integrales que definen. PLI y IDF se aproximan, respectivamente, por las siguientes expresiones

$$PLI_{1,2} = PLI(\varphi_1, \varphi_2) \simeq \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N \text{sign} e^{i\Delta(\varphi_1, \varphi_2)(t_k)} \right|$$

y

$$IDF_{1,2} = IDF(\varphi_1, \varphi_2) \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\Delta|(\varphi_1, \varphi_2)(t_k).$$

Puesto que en las aplicaciones contenidas en los capítulos finales de esta tesis haremos uso frecuente de PLI , no ejemplificaremos aquí su uso concreto. El algoritmo de cálculo y el código Python correspondiente se encontrarán en el repositorio adjuntado con esta tesis.

Nociones de fase puntual, fase relativa y diferencias de fase globales de señales multidimensionales

7.1. Introducción

Los capítulos precedentes resumen técnicas de análisis armónico que, por una parte, fundamentan algunas herramientas de uso corriente en el análisis de señales unidimensionales y por otra parte conducen a extensiones de técnicas unidimensionales a dimensiones mayores que uno. Una imagen o un resultado de *fMRI* pueden considerarse señales multidimensionales en el sentido que son funciones de varias variables.

Este capítulo está destinado a sacar provecho de los resultados n -dimensionales de integrales singulares para proponer y probar una técnica de tipo *PLI* para la comparación entre imágenes.

Así como en el caso unidimensional (series temporales) definíamos, en el Capítulo 6, cantidades “instantáneas” como la fase instantánea, en este capítulo definiremos y estudiaremos fases puntuales y fases relativas puntuales para señales multidimensionales.

Luego abordaremos la generación de varios índices globales que provean indicadores sencillos de “conectividad” entre imágenes considerando promedios integrales de diversas funciones aplicadas al vector fase relativa puntual.

La base analítica será el uso de las transformadas de Riesz $R_1, \dots, R_n$, introducidos antes y su análisis de Fourier. Finalmente aplicaremos el método a la comparación de algunas imágenes con el objeto de mostrar su potencialidad.

7.2. Fase puntual

Sea φ una señal definida en algún dominio de $\mathbb{R}^n$, si φ describiera una imagen, podríamos considerar que el dominio de φ es un rectángulo y que $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2)$ es la intensidad (tono de grises) en el punto $x = (x_1, x_2)$ del rectángulo. Pero no restringiremos innecesariamente la dimensión. Denotaremos con $x = (x_1, \dots, x_n)$ los puntos de $\mathbb{R}^n$ que están en el dominio de φ . Si φ es una función de cuadrado integrable $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

entonces sus n -transformadas de Riesz

$$\begin{aligned} R_j \varphi(x) &= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(x-y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} \geq |y| > \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(x-y) dy \end{aligned}$$

están bien definidas y son ellas mismas funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ como se deduce de la fórmula de su transformada de Fourier probada en el Capítulo 5. En efecto

$$\widehat{R_j \varphi}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi}(\xi).$$

Por la identidad de Parseval aplicada dos veces, tenemos que

$$\|R_j \varphi\|_2 = \|\widehat{R_j \varphi}\|_2 = \left\| -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi} \right\|_2 \leq \|\widehat{\varphi}\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

Con las n transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n$ construimos un operador a valores vectoriales

$$(7.1) \quad \vec{R} = (R_1, \dots, R_n).$$

Más precisamente,

$$(7.2) \quad \vec{R} \varphi(x) = (R_1 \varphi(x), \dots, R_n \varphi(x)).$$

PROPOSICIÓN 7.2.1. *Para toda $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene la identidad*

$$(7.3) \quad \sum_{j=1}^n R_j(R_j \varphi) = -\varphi$$

En forma operacional, $\sum_{j=1}^n R_j^2 = -I$, donde I es el operador identidad y $R_j^2 = R_j \circ R_j$ que está bien definido en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Basta chequear la identidad en el lado de las frecuencias. Es decir, basta usar la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n R_j(R_j \varphi) \right)^\wedge(\xi) &= \sum_{j=1}^n (R_j(R_j \varphi))^\wedge(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^n (-i) \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{R_j \varphi}(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (-1) \frac{\xi_j}{|\xi|} (-i) \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{\varphi}(\xi) \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) \\
&= - \hat{\varphi}(\xi),
\end{aligned}$$

de donde se deduce la tesis tomando antitransformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Esta propiedad muestra que, aunque cada una de las transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^n, n > 1$, considera sólo un aspecto, digamos una dirección en la señal φ , entre todas recuperan toda la información que hay en φ .

Por consiguiente, es natural y razonable sostener y considerar que dada una “señal n -dimensional” $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ un buen, o, si se quiere, el mejor análogo para la transformada de Hilbert H que es unidimensional, sea la transformada de Riesz vectorial $\vec{R}\varphi(x) = (R_1\varphi(x), \dots, R_n\varphi(x))$. Por consiguiente, una información sobre una noción de fase puntual deberá estar contenida en el campo vectorial

$$(7.4) \quad \frac{\vec{R}\varphi(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{R_1\varphi(x)}{\varphi(x)}, \dots, \frac{R_n\varphi(x)}{\varphi(x)} \right)$$

y en particular, en el vector definido para cada x por

$$(7.5) \quad \vec{\Phi}(x) = \vec{\Phi}_\varphi(x) = \left(\arctan \frac{R_1\varphi(x)}{\varphi(x)}, \dots, \arctan \frac{R_n\varphi(x)}{\varphi(x)} \right)$$

DEFINICIÓN 7.2.1. Dada una señal n -dimensional φ , decimos que el campo vectorial $\vec{\Phi}_\varphi(x)$ es la **fase puntual** de φ en el punto x .

Este campo vectorial nos permite comparar de varias maneras dos señales n -dimensionales definidas sobre el mismo dominio.

DEFINICIÓN 7.2.2. Dadas dos señales φ_1 y φ_2 con el mismo dominio n -dimensional definimos la **fase relativa puntual de φ_2 con respecto a φ_1** como el campo vectorial

$$(7.6) \quad \vec{\Phi}_{1,2}(x) = \vec{\Phi}_{\varphi_1}(x) - \vec{\Phi}_{\varphi_2}(x)$$

Observemos que $\vec{\Phi}_{1,2}(x) = -\vec{\Phi}_{2,1}(x)$

En analogía con el caso de series temporales ($n = 1$) podemos también considerar desfasajes absolutos. En este caso tenemos todavía más opciones. Podemos considerar

también campos vectoriales de fases relativas puntuales absolutas y campos escalares en los que se usa alguna norma del vector de fases relativas puntuales. Dada una señal φ , denotamos por $\Phi_{\varphi}^j(x)$ a la j -ésima componente de $\vec{\Phi}_{\varphi}(x)$.

DEFINICIÓN 7.2.3. Sean φ_1 y φ_2 dos señales n - dimensionales con el mismo dominio, definimos el **vector de fase relativa puntual absoluta** de φ_2 con respecto a φ_1 (o de φ_1 con respecto a φ_2) por

$$(7.7) \quad \vec{\Phi}_{1,2}^{abs}(x) = (|\Phi_{\varphi_1}^1(x) - \Phi_{\varphi_2}^1(x)|, \dots, |\Phi_{\varphi_1}^n(x) - \Phi_{\varphi_2}^n(x)|)$$

Notemos que $\vec{\Phi}_{1,2}^{abs}(x) = \vec{\Phi}_{2,1}^{abs}$.

DEFINICIÓN 7.2.4. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que es la Euclidea si recordamos que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes. Definimos el **escalar de fase relativa puntual absoluta** de φ_2 con respecto a φ_1 (o de φ_1 con respecto a φ_2) por

$$(7.8) \quad \|\Phi_{1,2}\|(x) = \|\vec{\Phi}_{1,2}^{abs}(x)\| = \|\vec{\Phi}_{1,2}(x)\|.$$

Veamos cuál es el rango posible de cada uno de los cuatro conceptos definidos. Notemos en primer lugar que la fase puntual de una señal φ , que denotamos por $\vec{\Phi}_{\varphi}$, toma valores en el cubo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^n$. La fase relativa puntual de φ_1 con respecto a φ_2 , que denotamos $\vec{\Phi}_{1,2}(x)$, toma valores en el cubo $[-\pi, \pi]^n$. El vector de fase relativa absoluta puntual de φ_1 con respecto a φ_2 , que denotamos por $\vec{\Phi}_{1,2}^{abs}(x)$, toma valores en el cubo $[0, \pi]^n$. Finalmente el escalar de fase relativa puntual absoluta, que denotamos por $\|\Phi_{1,2}\|(x)$, toma valores en el intervalo $\left[0, \sqrt{n}\frac{\pi}{2}\right]$ si usamos la norma Euclidea.

En las aplicaciones que mostraremos en el Capítulo 8, estaremos usando imágenes, es decir $n = 2$, entonces, dada una imagen analógica $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x)$, su fase puntual será el vector (campo vectorial bidimensional) $\vec{\Phi}_{\varphi}(x) = \left(\arctan \frac{R_1\varphi(x)}{\varphi(x)}, \arctan \frac{R_2\varphi(x)}{\varphi(x)}\right)$.

Oservemos que, aunque sólo calculemos las fases en dos direcciones, la del eje x_1 y la del eje x_2 , la fórmula $R_1^2 + R_2^2 = -Identidad$, que probamos para cualquier dimensión n , nos garantiza la completitud de la información que las dos transformadas, en conjunto, contienen.

7.3. Cuantificación global de las diferencias de fases n -dimensionales PLI e IDF vectoriales

En el Capítulo 6 repasamos el concepto global de PLI (Phase Lag Index) e introducimos el IDF (Índice de Divergencia de Fases) para el caso de señales unidimensionales analógicas. El propósito de esta sección es extender estos conceptos a señales n -dimensionales a partir de los cuantificadores vectoriales y escalares puntuales introducidos en la sección precedente. Nuevamente, la idea básica es producir indicadores integrales a partir de los puntuales en ciertas partes del dominio de la señal n -dimensional dada. Si queremos generar cuantificadores que registren, dadas dos señales, en qué direcciones espaciales se manifiestan diferencias de fases significativas, nos convendrá que esos cuantificadores sean vectoriales. Si, en cambio, sólo nos interesa detectar diferencias de fases significativas en cualquiera de las n -direcciones del espacio, será suficiente, y por cierto más sencillo, proveer indicadores escalares. Otra vez, como en el caso unidimensional, el tipo de índices que generaremos dependerá del momento en el que calculemos los valores absolutos en relación con el momento del cálculo de los promedios en el algoritmo. Procedemos a definir con precisión todas estas propuestas para evitar ambigüedades en su implementación computacional.

En todo lo que sigue $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ serán dos señales analógicas n -dimensionales definidas en el mismo dominio de $\mathbb{R}^n$.

En la sección anterior hemos definido el campo vectorial fase relativa puntual de φ_2 con respecto a φ_1 en el punto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\vec{\Phi}_{1,2}(x) = \vec{\Phi}_{\varphi_1}(x) - \vec{\Phi}_{\varphi_2}(x),$$

que se escribe en coordenadas

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}^j(x) &= \Phi_{\varphi_1}^j(x) - \Phi_{\varphi_2}^j(x) \\ &= \arctan \frac{R_j \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)} - \arctan \frac{R_j \varphi_2(x)}{\varphi_2(x)} \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, n$ y para todo $x \in \Omega$. Para cada $j = 1, \dots, n$ calculamos ahora el valor medio sobre Ω del signo de la parte imaginaria de $e^{i\Phi_{1,2}^j(x)}$, es decir,

$$(7.9) \quad \left\langle \text{signo } \Im e^{i\Phi_{1,2}^j} \right\rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \dots \int \text{signo } \Im e^{i\Phi_{1,2}^j(x)} dx, \dots, dx_n =: M_{1,2}^j(\Omega),$$

donde $|\Omega|$ es el volumen de Ω en $\mathbb{R}^n$.

Con estas medidas podemos definir dos índices de tipo *PLI*, uno vectorial y otro escalar.

DEFINICIÓN 7.3.1. El **Phase Lag Index Vectorial en Ω ($PLIV$)** entre las señales φ_1 y φ_2 es el vector n -dimensional dado por el valor absoluto de las medias $M_{1,2}^j(\Omega)$, precisamente

$$(7.10) \quad PLIV_{1,2}(\Omega) = (|M_{1,2}^1(\Omega)|, \dots, |M_{1,2}^n(\Omega)|)$$

El **Phase Lag Index Escalar en Ω ($PLIE$)** entre las señales φ_1 y φ_2 es la norma (alguna norma en $\mathbb{R}^n$) del $PLIV_{1,2}(\Omega)$, precisamente $PLIE_{1,2}(\Omega) = \|PLIV_{1,2}(\Omega)\| = \left(\sum_{j=1}^n (M_{1,2}^j(\Omega))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Notemos que el cuantificador vectorial $PLIV_{1,2}(\Omega)$ es más complejo, pero captura más información que $PLIE_{1,2}(\Omega)$ ya que todavía pone de manifiesto en qué direcciones de $\mathbb{R}^n$ resultan más diferenciadas las fases de las señales bajo análisis.

Procedamos ahora, como en el caso unidimensional, a definir análogamente un índice de Divergencia de Fases vectorial y otro escalar, basados ahora en los conceptos de *vector de fase relativa puntual absoluta* y de *escalar de fase relativa puntual absoluta* definidos en la sección anterior.

DEFINICIÓN 7.3.2. El **Índice de Divergencia de Fases Vectorial ($IDFV$)** entre las señales φ_1 y φ_2 es el vector n -dimensional dado por el promedio sobre Ω del vector de fase relativa puntual absoluta, precisamente

$$(7.11) \quad IDFV_{1,2}(\Omega) = \left\langle \vec{\Phi}_{1,2}^{abs} \right\rangle_{\Omega} = \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \dots \int |\Phi_{\varphi_1}^1(x) - \Phi_{\varphi_2}^1(x) dx|, \dots, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \dots \int |\Phi_{\varphi_1}^n(x) - \Phi_{\varphi_2}^n(x) dx| \right)$$

El **Índice de Divergencia de Fases Escalar ($IDFE$)** entre las señales φ_1 y φ_2 es el promedio sobre Ω del escalar de fase relativa puntual absoluta de φ_2 con respecto a φ_1 , definido en la sección anterior. Precisamente

$$(7.12) \quad IDFE_{1,2}(\Omega) = \langle \|\Phi_{1,2}\| \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \dots \int \|\vec{\Phi}_{1,2}(x)\| dx_1 \dots dx_n.$$

De manera análoga al caso PLI , tenemos que $IDF\vec{V}_{1,2}$ es un cuantificador de n parámetros que todavía deja discriminar las direcciones, mientras que $IDFE_{1,2}$ los resume en un sólo cuantificador más sencillo.

El cálculo efectivo de los cuatro índices definidos arriba, $PLI\vec{V}_{1,2}$, $PLIE_{1,2}$, $IDF\vec{V}_{1,2}$ e $IDFE_{1,2}$ se obtiene de las mismas dos n -úplas básicas de fases

$$\frac{R_j\varphi_k(x)}{\varphi_k(x)}, j = 1, \dots, n; k = 1, 2.$$

y el cálculo de $R_j\varphi_k$ se hace efectivo vía su versión Fourier

$$R_j\varphi_k(x) = \left(-i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{\varphi}_k \right)^\vee(x).$$

Cuando se intenten usar los cuantificadores descriptos para detectar cuando una imagen, o en general, una señal n -dimensional se detiene por movimientos rígidos de otra imagen n -dimensional, será útil el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7.3.1. *Si $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^n$, es decir $\rho^T = \rho^{-1}$ y $|\det \rho| = 1$, donde ρ^T es la transpuesta de ρ y $\det \rho$ es su determinante, si, como antes,*

$$\vec{R}\varphi = (R_1\varphi, \dots, R_n\varphi),$$

entonces

$$(7.13) \quad \vec{R}(\varphi \circ \rho) = \rho^T \left[\left(\vec{R}\varphi \right) \circ \rho \right]$$

Demostración. Notemos primero que la transformada de Fourier conmuta con transformaciones ortogonales, en efecto

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \rho)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\rho(x)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-2\pi i \rho^{-1}(y) \cdot \xi} |\det \rho^{-1}| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-2\pi i y \cdot \rho(\xi)} dy \\ &= \hat{\varphi}(\rho(\xi)). \end{aligned}$$

En otras palabras, $(\varphi \circ \rho)^\wedge = \hat{\varphi} \circ \rho$. En particular,

$$\begin{aligned} [R_j(\varphi \circ \rho)]^\wedge(\xi) &= -i \frac{\xi}{|\xi|} (\varphi \circ \rho)^\wedge(\xi) \\ &= -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{\varphi}(\rho(\xi)). \end{aligned}$$

Sea $\eta = \rho(\xi) \circ \xi = \rho^{-1}(\eta) = \rho^T(\eta)$, por consiguiente

$$\xi_j = (\rho^T(\eta))_j = \sum_{k=1}^n \rho_{kj} \eta_k,$$

como también $|\eta| = |\xi|$ tenemos que

$$[R_j(\varphi \circ \rho)]^\wedge(\rho^{-1}(\eta)) = -i \sum_{k=1}^n \rho_{kj} \frac{\eta_k}{|\eta|} \hat{\varphi}(\eta) = \sum_{k=1}^n \rho_{kj} (R_k \varphi)^\wedge(\eta),$$

o bien

$$[R_j(\varphi \circ \rho)]^\wedge(\xi) = \sum_{k=1}^n \rho_{kj} (R_k \varphi)^\wedge(\rho(\xi)).$$

Antitransformando y escribiendo el resultado en forma vectorial

$$\vec{R}(\varphi \circ \rho) = \rho^T \left[(\vec{R}\varphi) \circ \rho \right]$$

□

En particular, para calcular la fase j -ésima puntual de la rotación ρ de una señal n -dimensional φ , tenemos que calcular

$$(7.14) \quad \arctan \frac{R_j(\varphi \circ \rho)}{\varphi \circ \rho} = \arctan \frac{\left(\rho^T \left[(\vec{R}\varphi) \circ \rho \right] \right)_j}{\varphi \circ \rho}$$

que sólo depende de la $\vec{R}$ de la señal φ original y de la transformación ortogonal ρ que podrá ser una rotación o una reflexión.

En el próximo capítulo, aplicaremos todas las técnicas antes desarrolladas a señales unidimensionales y bidimensionales (imágenes).

Capítulo 8

Aplicaciones I: *IDF E* enseñales bidimensionales (imágenes)

8.1. Introducción

En este capítulo se describe el procedimiento para analizar imágenes bidimensionales mediante el cálculo del *Índice de Divergencia de Fases (IDFE)*, desarrollado en el Capítulo 7, el cual permite evaluar la divergencia, es decir, las diferencias locales entre pares de imágenes. Al mismo tiempo, mostraremos una propiedad que consideramos importante de *IDF E* que es su invariancia por cambios de intensidades pero que es sensible a cambios estructurales en las imágenes.

El método consiste en comparar pares de imágenes, convirtiéndolas previamente a escala de grises y normalizándolas entre 0 y 1. La imagen original la llamaremos I_o , mientras que la imagen modificada la llamaremos I_m . Para evitar valores nulos que podrían afectar el cálculo de la fase, se añade un pequeño ϵ a los píxeles con valor cero. Se asume, por el momento, que las imágenes son cuadradas. Cada imagen se divide en $N \times N$ subcuadros (llamados $Q_{(n_1, n_2)}$), donde N debe ser un divisor exacto de las dimensiones de la imagen. Esta división permite analizar la información local de cada región para su posterior cálculo de *IDFE*. Cada subcuadro se representa como una matriz bidimensional independiente y para cada uno se calculan las *Transformadas de Riesz* en las direcciones x_1 y x_2 . A partir de estos componentes se obtienen las fases para cada subcuadro. Luego se calculan las diferencias de fase para cada par único de $Q_{(n_1, n_2)}$ subcuadros de ambas imágenes, obteniendo un valor de *IDFE*. Finalmente, utilizando un umbral determinado mediante el *Método del Codo* (en inglés, *elbow method*, comentado en la próxima subsección 8.1.1) sobre los valores de *IDFE*, identificamos regiones con diferencias significativas de fase. El esquema de la Figura ?? ilustra de manera resumida todo el procedimiento implementado en Python para la detección de rotación mediante *IDFE*. El código completo utilizado en estos ejemplos se encuentra disponible en el repositorio adjunto con la tesis.

8.1.1. Método del Codo (Elbow Method). Es una técnica heurística ampliamente empleada en el análisis de datos para determinar el punto óptimo de corte o umbral en un conjunto de valores ordenados. El método se utiliza con frecuencia en algoritmos de agrupamiento (como *k - means*), en la selección de componentes principales, o en la determinación de umbrales en distribuciones de medidas cuantitativas, como en el caso del presente trabajo. El algoritmo consiste en ordenar los valores obtenidos de una métrica (en este caso, los valores del IDFE) en forma ascendente y aplicar una transformación logarítmica en base 10 para facilitar la visualización de los cambios relativos entre ellos. Posteriormente, se calcula la diferencia entre valores consecutivos con el fin de identificar el punto en el que la pendiente de la curva presenta una disminución abrupta. Este punto, denominado *codo* (elbow), representa un umbral óptimo que permite separar los valores relevantes de aquellos que pueden considerarse residuales o de menor significancia.

Imagen 1. *Ejemplo Ilustrativo 1: $N = 8 \times 8$ subcuadros*

En este ejemplo se muestra una imagen inicial sencilla, utilizada para ilustrar la metodología implementada. La imagen I_o se presenta tal como se obtiene originalmente, sin modificaciones ni alteraciones, al contrario de la I_m , que presenta una modificación geométrica. En la Figura 1 se observa la imagen original, la modificada, y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales. En la Figura 2 se observa cómo el método del codo (comentado en la Subsección 8.1.1) detectó a la perfección el umbral de diferencias locales. Por último, en la Tabla 8.1.1 se observan los valores de IDFE obtenidos, resaltando aquellos donde se encontraron las diferencias.

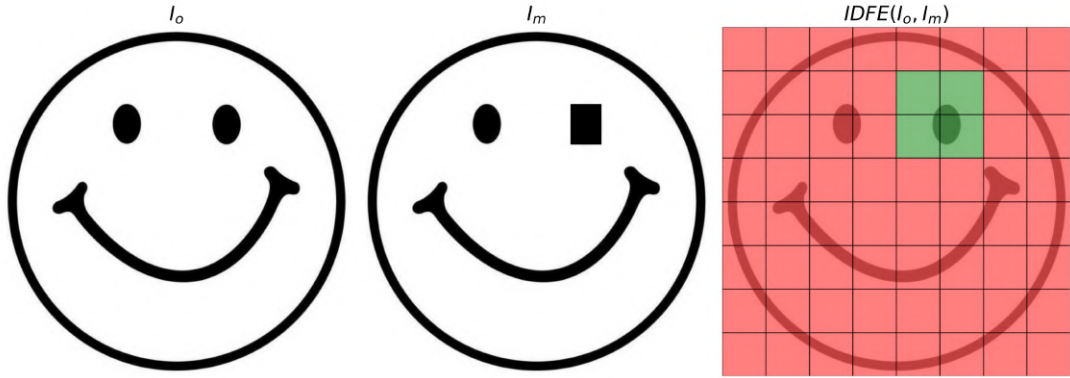


FIGURA 1. Ejemplo ilustrativo 1: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.

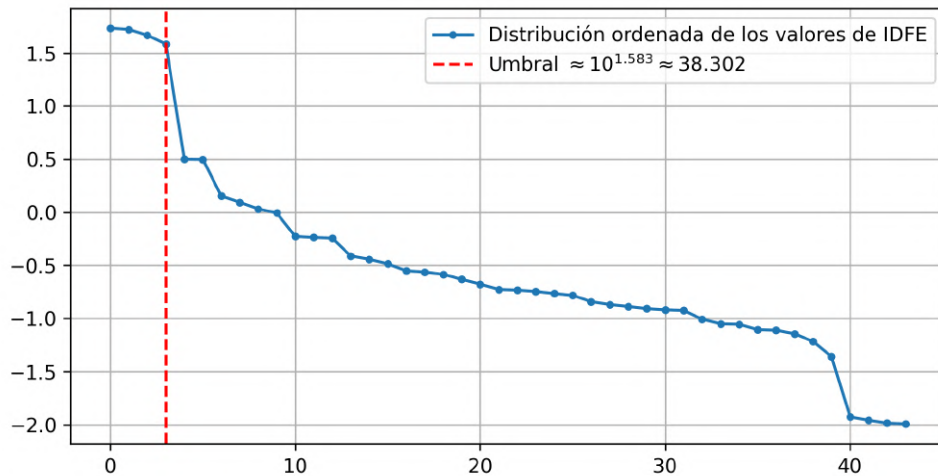


FIGURA 2. Ejemplo ilustrativo 1: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 38,302

Imagen 2. *Ejemplo ilustrativo 2: $N = 16 \times 16$ subcuadros*

En este ejemplo, la imagen I_o se presenta tal como se obtiene originalmente, mientras que la imagen I_m , que presenta una alteración. En la Figura 3 se observa la imagen original, la modificada, y la partición en subcuadros, nuevamente resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales. En la Figura 4 se observa cómo el método del codo (comentado en la Subsección 8.1.1) detectó a la perfección el umbral de diferencias locales. Por último, en la Tabla 8.1.1 se observan los valores de IDFE obtenidos, resaltando aquellos donde se encontraron las diferencias.

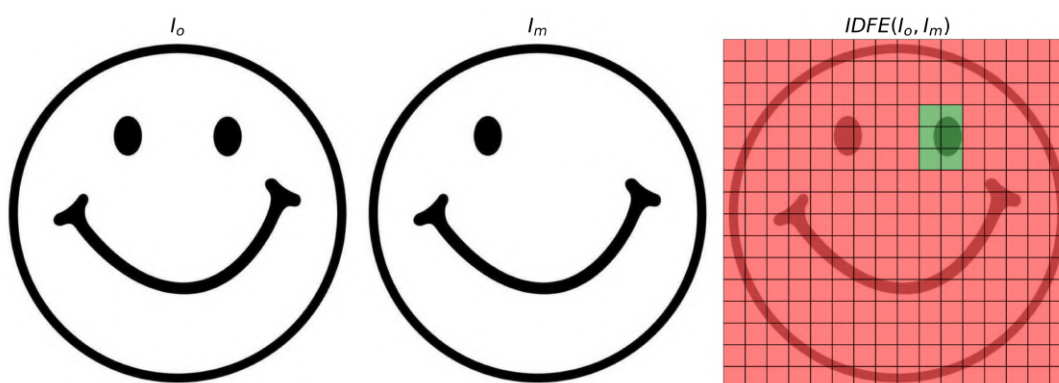


FIGURA 3. Ejemplo ilustrativo 2: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.

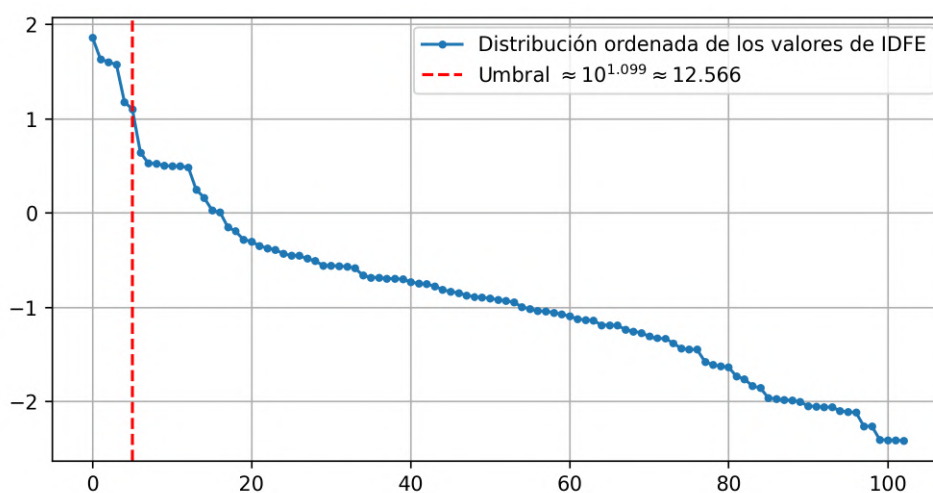


FIGURA 4. Ejemplo ilustrativo 2: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 12,566

CUADRO 1. Comparativa de IDFE entre subcuadros de las imagenes I_o y I_m del Ejemplo Ilustrativo 1 (8.1.1) para $N = 8 \times 8$ subcuadros.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
Q_1	0.00	0.14	0.21	0.01	0.12	0.16	0.14	0.00
Q_2	0.09	0.12	0.01	0.00	38.30	46.39	0.58	1.07
Q_3	0.10	0.00	1.42	0.08	54.20	52.66	0.01	1.24
Q_4	0.27	0.04	0.00	0.00	0.00	0.01	0.23	0.28
Q_5	0.33	0.19	0.17	0.00	0.00	0.09	3.15	0.26
Q_6	0.08	0.00	0.00	0.57	0.59	0.06	0.00	0.18
Q_7	0.39	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00
Q_8	0.00	0.18	0.36	0.12	3.16	0.98	0.00	0.00

CUADRO 2. Comparativa de IDFE entre subcuadros de las imagenes I_o y I_m del Ejemplo Ilustrativo 2 (8.1.1) para $N = 16 \times 16$ subcuadros.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}	Q_{16}
Q_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.01	0.00	0.07	0.17	0.20	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Q_2	0.00	0.00	0.00	0.15	0.12	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.20	0.13	0.00	0.00	0.00
Q_3	0.00	0.00	0.22	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.27	0.01	0.00
Q_4	0.00	0.10	0.06	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	15.08	42.40	0.04	0.01	0.70	1.06	0.01
Q_5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.38	3.14	0.00	0.00	39.86	72.21	0.27	0.00	0.01	1.45	0.19
Q_6	0.12	0.14	0.00	0.00	0.00	0.31	0.01	0.00	0.00	12.57	37.33	0.05	0.00	0.00	0.41	1.01
Q_7	0.37	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.09	0.00	0.00	0.15
Q_8	0.33	0.00	0.01	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.35	0.07	0.00	0.50
Q_9	3.06	0.00	0.04	0.28	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.35	0.00	0.00	0.26
Q_{10}	3.16	0.00	0.00	0.01	0.18	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.13	0.13	0.00	0.01	0.35
Q_{11}	0.10	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.01	0.00	0.45	0.05	0.00	0.00	0.00	0.01	0.20
Q_{12}	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.42	3.20	4.41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Q_{13}	0.00	0.64	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
Q_{14}	0.00	0.00	0.04	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.06	0.00	0.00
Q_{15}	0.00	0.00	0.00	0.18	1.76	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00
Q_{16}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.06	0.52	0.28	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Imagen 3. Autorretrato de Van Gogh: $N = 30 \times 30$ subcuadros

Como un segundo ejemplo de la aplicación, compararemos el Autorretrato de Vincent van Gogh original (I_o), que está en el Van Gogh Museum de Ámsterdam, con una leve modificación en uno de los ojos del retrato (I_m) (Ver Figura). En la Figura 5 se observa la imagen original, la modificada, y la partición en subcuadrados, nuevamente resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales. En la Figura 6 se observa cómo el método del Codo (comentado en la Subsección 8.1.1) detectó a la perfección el umbral de diferencias locales.



FIGURA 5. Autorretrato de Van Gogh 1: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.

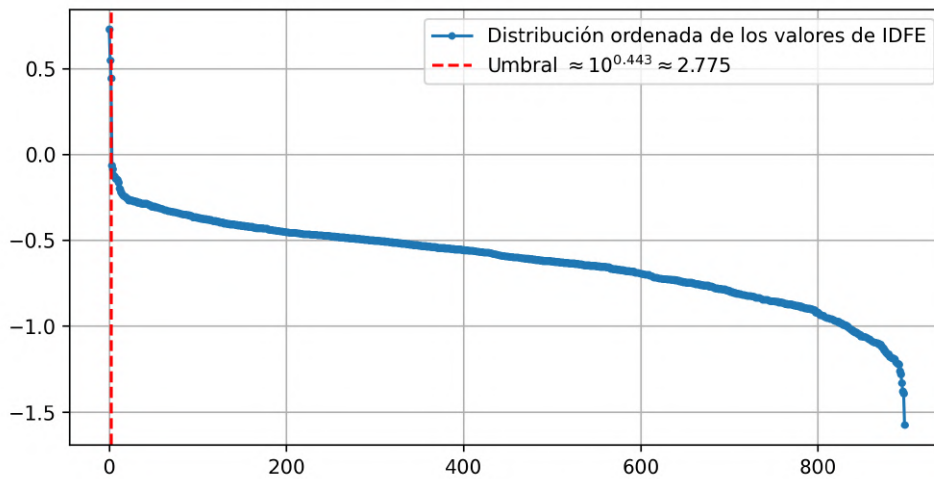


FIGURA 6. Autorretrato de Van Gogh 1: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 2,775

Imagen 4. *Autorretrato de Van Gogh: $\alpha = 0,5$ - $N = 30 \times 30$ subcuadros*

Como segundo ejemplo de aplicación, se analiza el Autorretrato de Van Gogh (I_o) con una reducción de intensidad global del 50 % ($\alpha = 0,5$), versus una versión modificada (I_m) en la que se introdujo una leve alteración en uno de los ojos. Esta modificación de intensidad afecta localmente la estructura visual y también genera un cambio global en el brillo de la imagen, lo que permite evaluar la robustez del método frente a variaciones de intensidad. En la Figura 7 se muestran la imagen original, la modificada y la partición, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales. En la Figura 8 se observa cómo el método del Codo (descrito en la Subsección 8.1.1) determinó de manera precisa el umbral de detección de dichas diferencias.

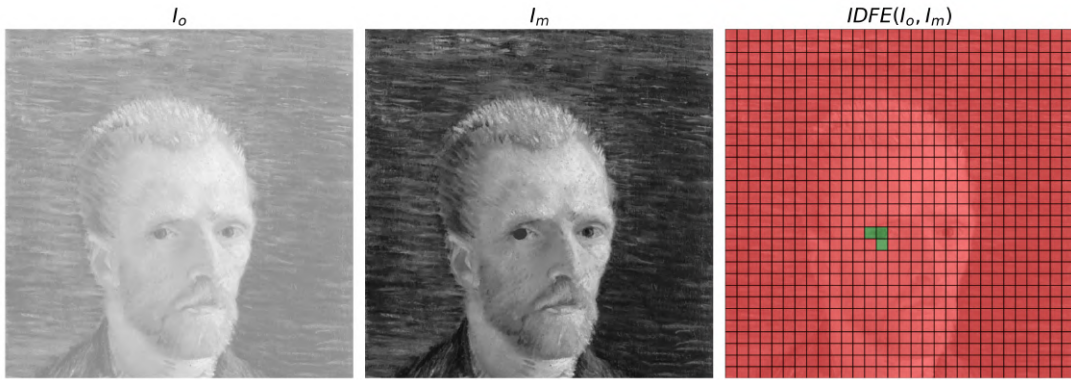


FIGURA 7. Autorretrato de Van Gogh 2: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.

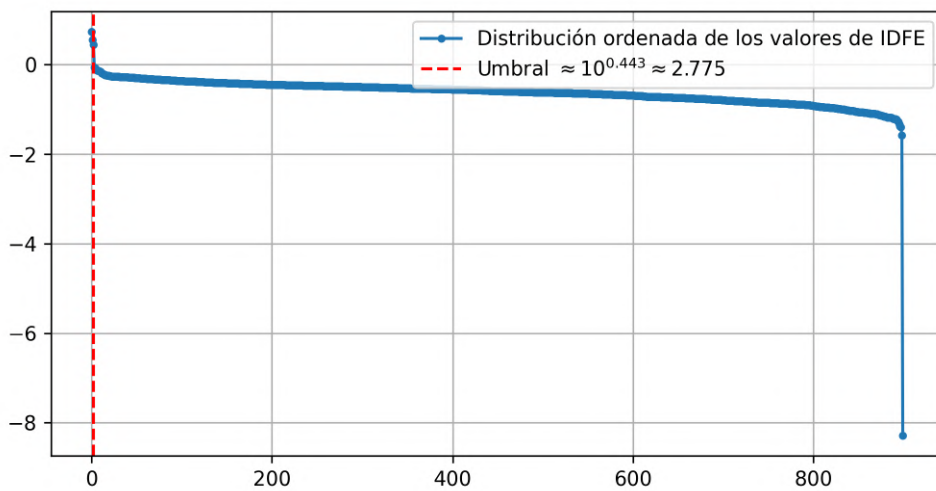


FIGURA 8. Autorretrato de Van Gogh 2: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 2,775

Imagen 5. *Autorretrato de Van Gogh: $\alpha = 0,1$ - $N = 60 \times 60$ subcuadros*

Como tercer ejemplo de aplicación, se analiza el Autorretrato de Van Gogh (I_o) versus la misma imagen con una reducción de intensidad global del 10 % ($\alpha = 0,1$), sin alteraciones. Buscamos evaluar la robustez del método frente a variaciones de intensidad en una misma imagen. En la Figura 9 se muestran la imagen original, la modificada y la partición, sin detección diferencias locales, como era esperado. En la Figura 10 se observa cómo el método del Codo (descrito en la Subsección 8.1.1) determinó de manera precisa el umbral de detección de dichas diferencias.

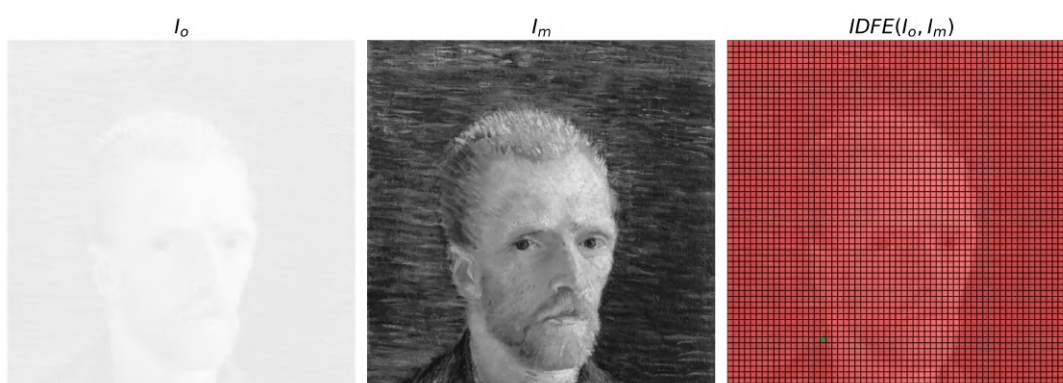


FIGURA 9. Autorretrato de Van Gogh 3: Imagen original, imagen modificada y la partición en subcuadros, resaltando en color verde aquellas regiones donde el IDFE detectó diferencias locales.

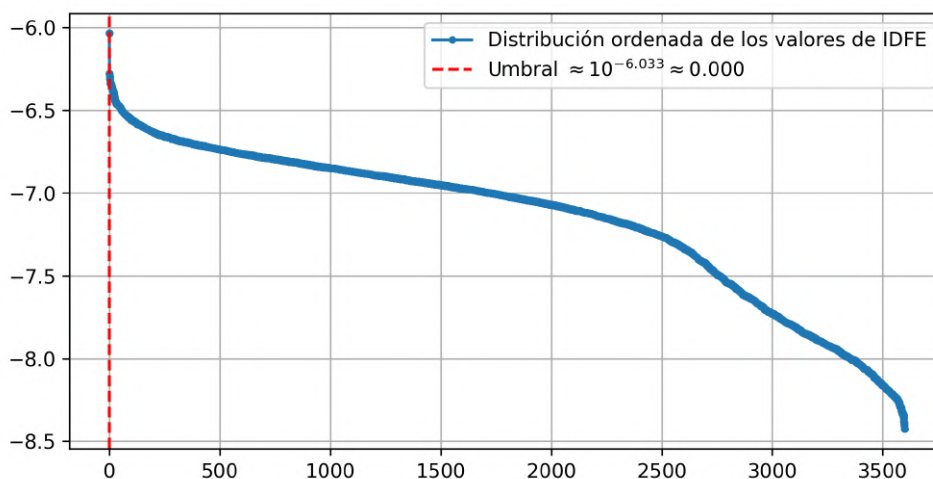


FIGURA 10. Autorretrato de Van Gogh 3: Método del Codo en escala logarítmica del IDFE. Umbral detectado: 0

8.2. Rotaciones

En esta sección se presentan ejemplos de detección de la rotación de una imagen utilizando el Índice de Diferencia de Fase (*IDFE*). La metodología implementada en Python permite estimar con precisión el ángulo de rotación entre una imagen de referencia y su versión rotada. El procedimiento es el siguiente: dada la imagen original, denominada '*Imagen de referencia*' (I_{ref}), se genera su versión rotada con un ángulo conocido ρ_0 , denominada '*Imagen rotada*' $\rho = \rho_0$ ($I_{rot\rho_0}$). A continuación, se calcula el IDFE comparando las fases de la imagen rotada con todas las posibles fases calculadas luego de calcular las rotaciones de las transformadas de Riesz de la imagen de referencia, desde 1° hasta 360° , en pasos de 1° . El ángulo correspondiente al valor mínimo del IDFE normalizado indica la rotación que mejor alinea la imagen rotada con la referencia, que debe coincidir con nuestro $\rho = \rho_0$ para probar que el método funciona correctamente. El esquema de la Figura 11 ilustra de manera resumida todo el procedimiento implementado en Python para la detección de rotación mediante IDFE. El código completo utilizado en estos ejemplos se encuentra disponible en el repositorio adjunto con la tesis.

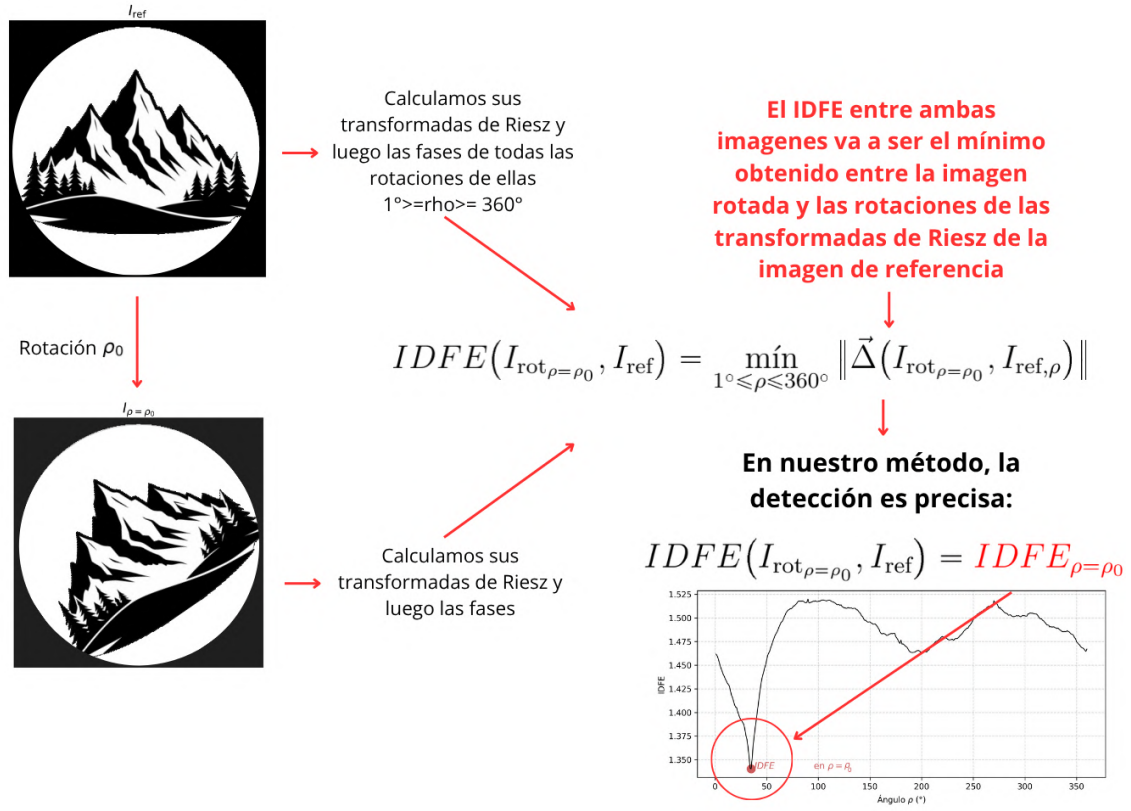


FIGURA 11. Esquema del procedimiento implementado para la detección de rotación mediante IDFE.

Imagen 1. Rotación aplicada: $\rho = 87^\circ$

La Figura 12 muestra la imagen de referencia junto con su versión rotada, ambas circunscritas dentro de una máscara circular. En la Tabla 8.2 se pueden observar los valores del IDFE normalizados obtenidos para cada ángulo de rotación ρ , dejando en evidencia que el método detecta con precisión el ángulo de rotación de la imagen de referencia, en este caso $\rho_0 = 87^\circ$. La Figura 13 presenta la curva del valor del *IDFE* normalizado en función del ángulo de rotación ρ . Se observa un mínimo en $\rho = 87^\circ$ que corresponde a la rotación que mejor alinea la imagen rotada con la de referencia.

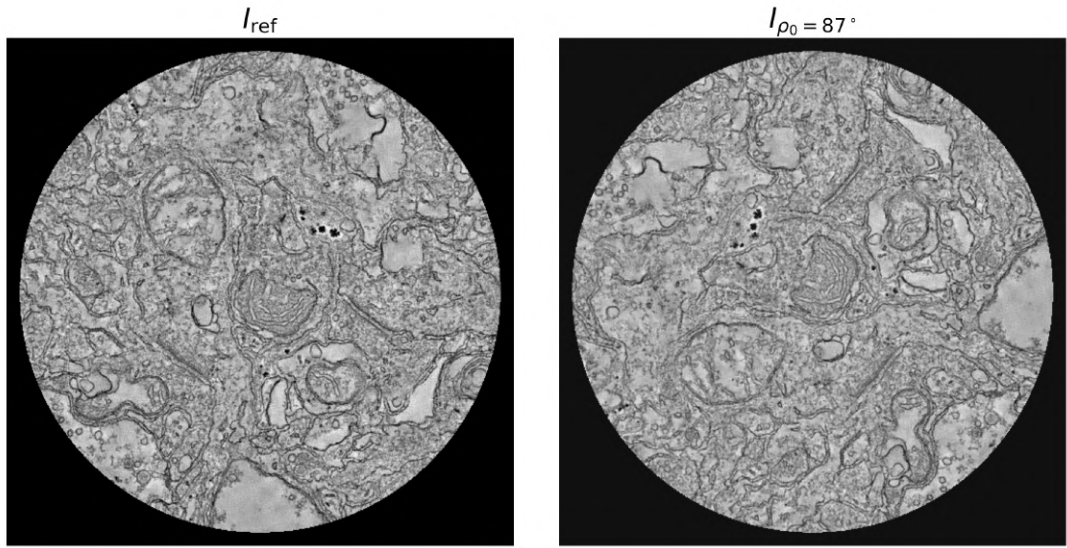


FIGURA 12. Imagen de referencia (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.

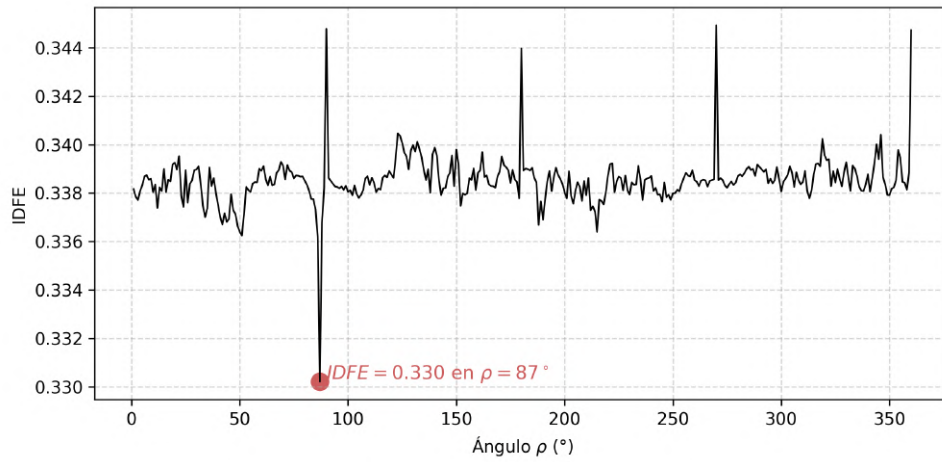


FIGURA 13. Curva del valor del IDFE normalizado en función del ángulo de rotación ρ .

CUADRO 3. Valores del Índice de Divergencia de Fase Escalar (IDFE) normalizado para cada ángulo de rotación ρ .

ρ	DPI	ρ	DPI	ρ	DPI	ρ	DPI	ρ	DPI	ρ	DPI
1°	0.338	61°	0.339	121°	0.339	181°	0.339	241°	0.338	301°	0.338
2°	0.338	62°	0.339	122°	0.339	182°	0.339	242°	0.338	302°	0.339
3°	0.338	63°	0.338	123°	0.340	183°	0.339	243°	0.338	303°	0.339
4°	0.338	64°	0.339	124°	0.340	184°	0.339	244°	0.338	304°	0.339
5°	0.338	65°	0.338	125°	0.340	185°	0.339	245°	0.338	305°	0.339
6°	0.339	66°	0.338	126°	0.340	186°	0.339	246°	0.338	306°	0.338
7°	0.339	67°	0.339	127°	0.340	187°	0.338	247°	0.338	307°	0.339
8°	0.339	68°	0.339	128°	0.339	188°	0.337	248°	0.338	308°	0.339
9°	0.339	69°	0.339	129°	0.340	189°	0.338	249°	0.338	309°	0.338
10°	0.338	70°	0.339	130°	0.340	190°	0.337	250°	0.338	310°	0.338
11°	0.338	71°	0.339	131°	0.340	191°	0.338	251°	0.338	311°	0.339
12°	0.337	72°	0.339	132°	0.340	192°	0.338	252°	0.338	312°	0.338
13°	0.338	73°	0.339	133°	0.340	193°	0.339	253°	0.338	313°	0.338
14°	0.338	74°	0.339	134°	0.339	194°	0.338	254°	0.338	314°	0.338
15°	0.339	75°	0.339	135°	0.339	195°	0.339	255°	0.339	315°	0.339
16°	0.338	76°	0.339	136°	0.339	196°	0.339	256°	0.339	316°	0.339
17°	0.339	77°	0.339	137°	0.339	197°	0.339	257°	0.339	317°	0.339
18°	0.338	78°	0.339	138°	0.338	198°	0.339	258°	0.339	318°	0.339
19°	0.339	79°	0.339	139°	0.340	199°	0.338	259°	0.339	319°	0.340
20°	0.339	80°	0.339	140°	0.340	200°	0.338	260°	0.339	320°	0.340
21°	0.339	81°	0.338	141°	0.340	201°	0.338	261°	0.338	321°	0.339
22°	0.340	82°	0.338	142°	0.339	202°	0.339	262°	0.338	322°	0.339
23°	0.338	83°	0.338	143°	0.338	203°	0.338	263°	0.339	323°	0.338
24°	0.337	84°	0.338	144°	0.338	204°	0.338	264°	0.339	324°	0.339
25°	0.339	85°	0.337	145°	0.338	205°	0.338	265°	0.339	325°	0.338
26°	0.338	86°	0.336	146°	0.339	206°	0.338	266°	0.338	326°	0.339
27°	0.338	87°	0.330	147°	0.339	207°	0.338	267°	0.339	327°	0.339
28°	0.339	88°	0.337	148°	0.340	208°	0.338	268°	0.339	328°	0.338
29°	0.339	89°	0.338	149°	0.338	209°	0.338	269°	0.339	329°	0.339
30°	0.339	90°	0.345	150°	0.340	210°	0.338	270°	0.345	330°	0.339
31°	0.339	91°	0.339	151°	0.339	211°	0.339	271°	0.339	331°	0.339
32°	0.338	92°	0.339	152°	0.337	212°	0.337	272°	0.339	332°	0.338
33°	0.337	93°	0.338	153°	0.338	213°	0.337	273°	0.339	333°	0.339
34°	0.337	94°	0.338	154°	0.338	214°	0.337	274°	0.338	334°	0.339
35°	0.337	95°	0.338	155°	0.338	215°	0.336	275°	0.338	335°	0.339
36°	0.339	96°	0.338	156°	0.339	216°	0.338	276°	0.338	336°	0.338
37°	0.338	97°	0.338	157°	0.339	217°	0.338	277°	0.338	337°	0.338
38°	0.339	98°	0.338	158°	0.339	218°	0.338	278°	0.338	338°	0.338
39°	0.338	99°	0.338	159°	0.338	219°	0.338	279°	0.338	339°	0.338
40°	0.338	100°	0.338	160°	0.339	220°	0.339	280°	0.339	340°	0.339
41°	0.337	101°	0.338	161°	0.339	221°	0.339	281°	0.339	341°	0.338
42°	0.337	102°	0.338	162°	0.340	222°	0.339	282°	0.339	342°	0.339
43°	0.337	103°	0.338	163°	0.339	223°	0.338	283°	0.339	343°	0.339
44°	0.337	104°	0.338	164°	0.339	224°	0.338	284°	0.339	344°	0.340
45°	0.337	105°	0.338	165°	0.338	225°	0.339	285°	0.339	345°	0.339
46°	0.338	106°	0.338	166°	0.338	226°	0.339	286°	0.339	346°	0.340
47°	0.337	107°	0.338	167°	0.338	227°	0.338	287°	0.339	347°	0.339
48°	0.337	108°	0.339	168°	0.338	228°	0.339	288°	0.339	348°	0.338
49°	0.337	109°	0.339	169°	0.339	229°	0.338	289°	0.339	349°	0.338
50°	0.336	110°	0.338	170°	0.339	230°	0.338	290°	0.339	350°	0.338
51°	0.336	111°	0.339	171°	0.340	231°	0.338	291°	0.339	351°	0.338
52°	0.337	112°	0.338	172°	0.339	232°	0.338	292°	0.339	352°	0.338
53°	0.338	113°	0.338	173°	0.339	233°	0.338	293°	0.339	353°	0.339
54°	0.338	114°	0.338	174°	0.339	234°	0.339	294°	0.338	354°	0.340
55°	0.338	115°	0.338	175°	0.338	235°	0.339	295°	0.339	355°	0.339
56°	0.338	116°	0.339	176°	0.339	236°	0.338	296°	0.338	356°	0.338
57°	0.338	117°	0.339	177°	0.339	237°	0.339	297°	0.339	357°	0.338
58°	0.338	118°	0.339	178°	0.338	238°	0.339	298°	0.339	358°	0.338
59°	0.339	119°	0.339	179°	0.338	239°	0.339	299°	0.339	359°	0.339
60°	0.339	120°	0.339	180°	0.344	240°	0.339	300°	0.338	360°	0.345

Imagen 2. Rotación aplicada: $\rho = 1^\circ$

En este ejemplo se muestra el mismo procedimiento utilizando la misma imagen de referencia, pero aplicando una rotación de $\rho = 1^\circ$ (Figura 14). El objetivo es demostrar que, aunque este pequeño giro es prácticamente imperceptible al ojo humano, el IDFE es capaz de detectarlo con precisión (Figura 15).

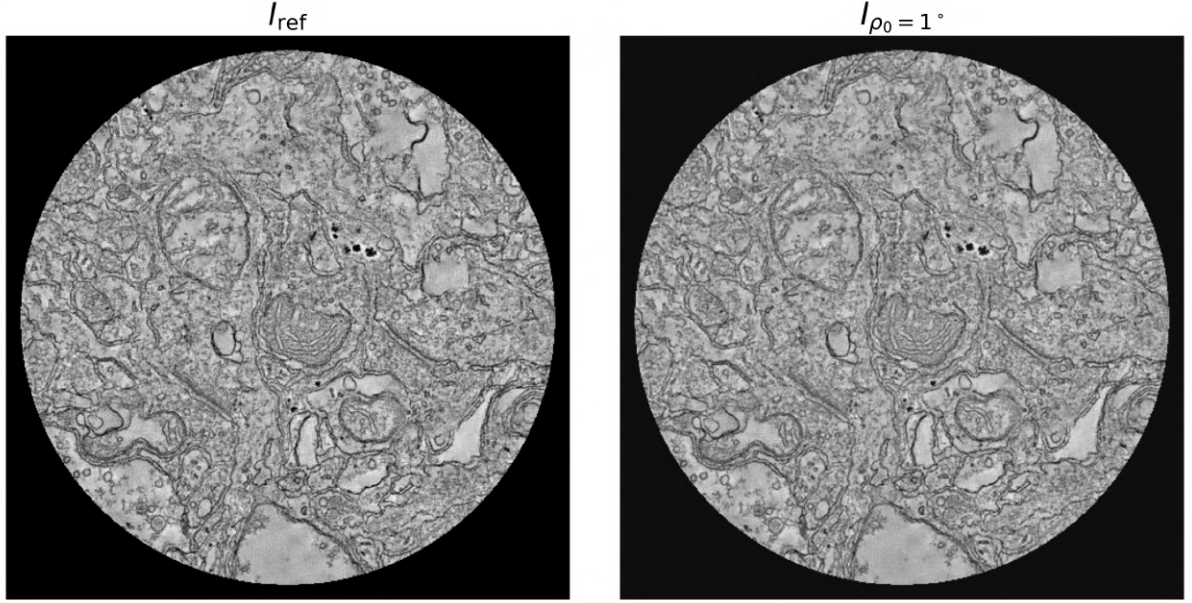


FIGURA 14. Imagen de referencia (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.

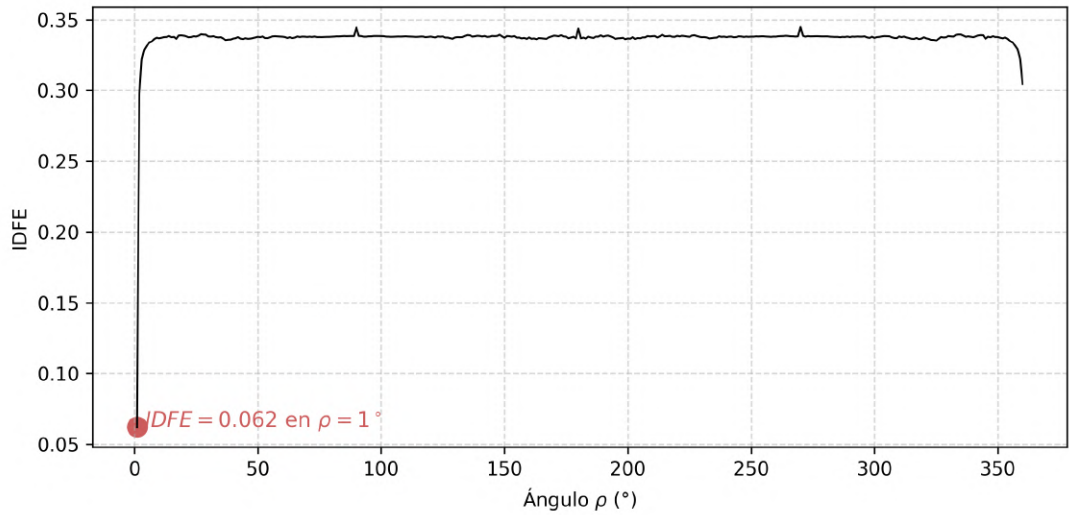


FIGURA 15. Curva del valor del IDFE normalizado en función del ángulo de rotación ρ .

Imagen 3. Rotación aplicada: $\rho = 60^\circ$ - Variación de intensidad $\alpha = 0,5$

En este caso, aplicamos una rotación de $\rho = 60^\circ$ y, además, introducimos una variación de intensidad del 50 % sobre la imagen de referencia (Figura 16). El método demuestra ser robusto frente a cambios de intensidad, detectando con precisión la rotación (Figura 17).

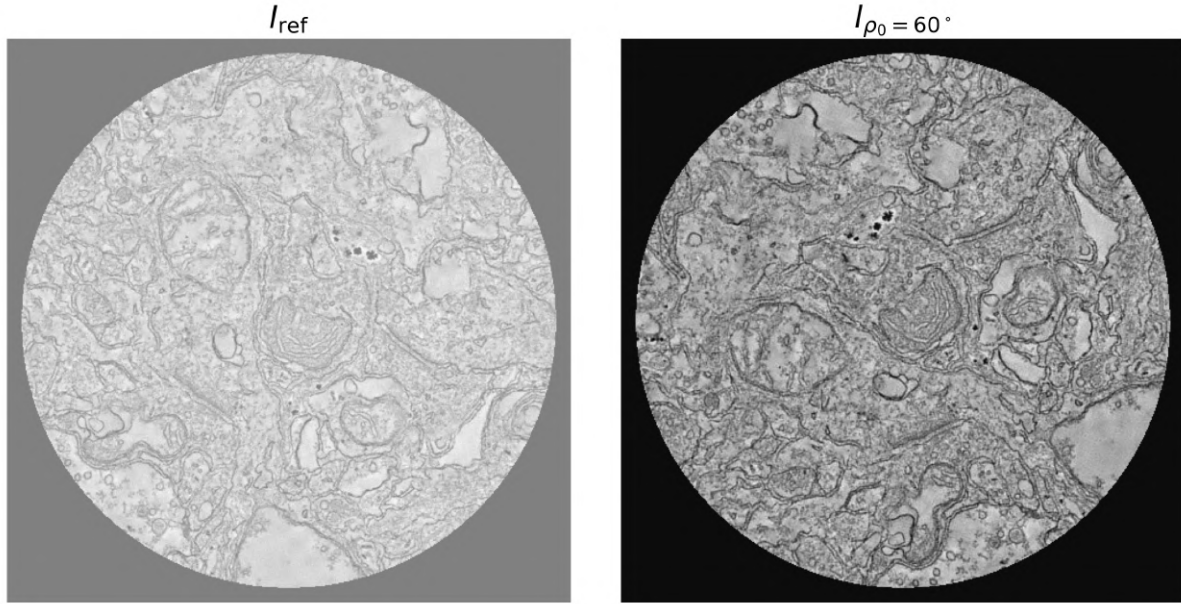


FIGURA 16. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.

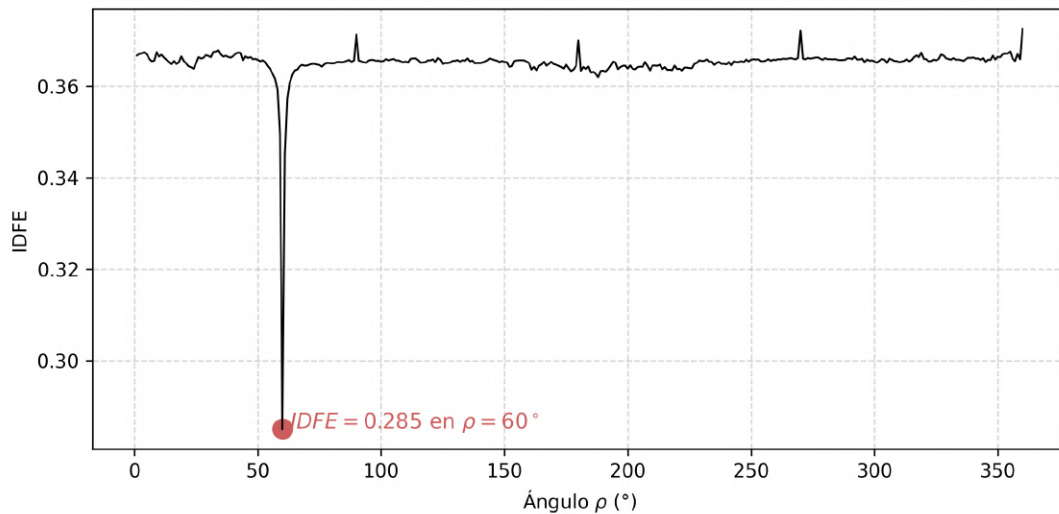


FIGURA 17. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .

Imagen 4. *Rotación aplicada: $\rho = 12^\circ$ - Variación de intensidad $\alpha = 0,1$*

En este ejemplo aplicamos una rotación de $\rho = 12^\circ$ y, además, ajustamos la intensidad de la imagen de referencia mediante un factor $\alpha = 0,1$ (Figura 18). Esta reducción de intensidad varía ampliamente la imagen resultante pero el método sigue siendo capaz de detectar la rotación con precisión (Figura 19).

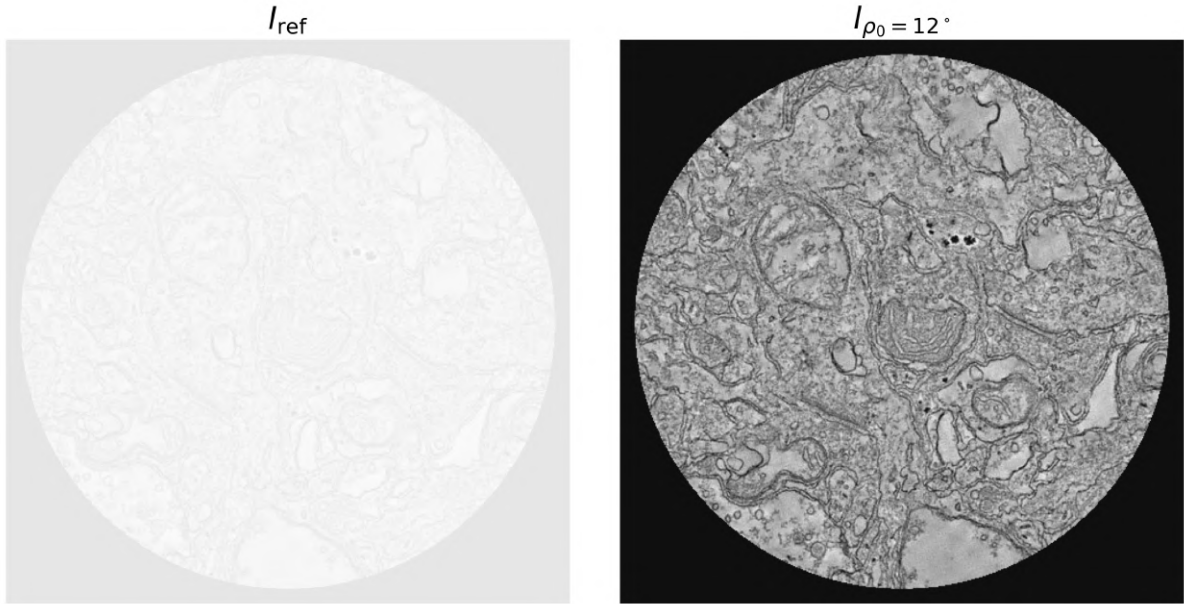


FIGURA 18. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.

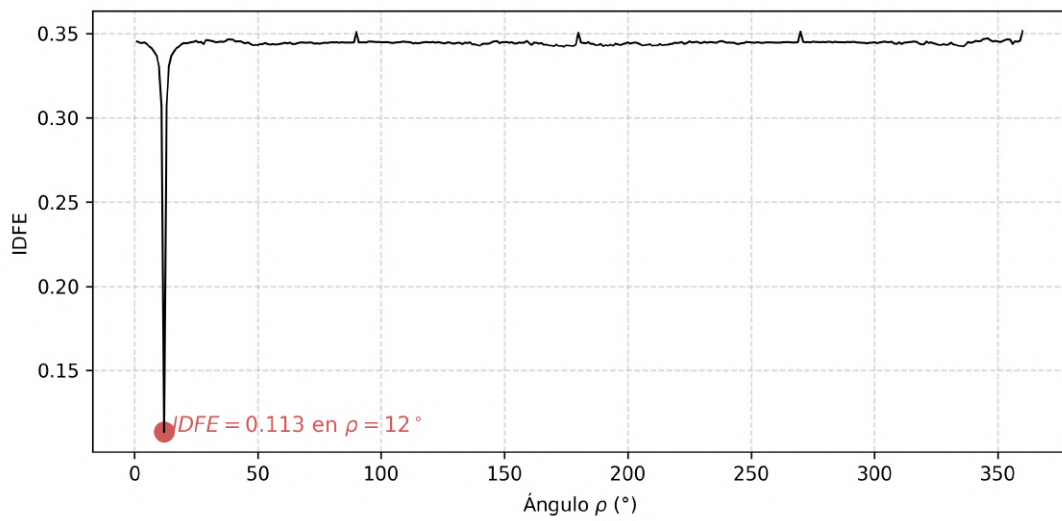


FIGURA 19. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .

Imagen 4. Rotación aplicada: $\rho = 289^\circ$ - Variación de intensidad $\alpha = 0,05$

En este ejemplo, se aplicó un ajuste de intensidad con un factor $\alpha = 0,05$, lo que altera notablemente el contraste de la imagen y la hace prácticamente indescifrable al ojo humano (ver Figura 20). El método se mantiene robusto frente a este cambio de intensidad (Figura 21).

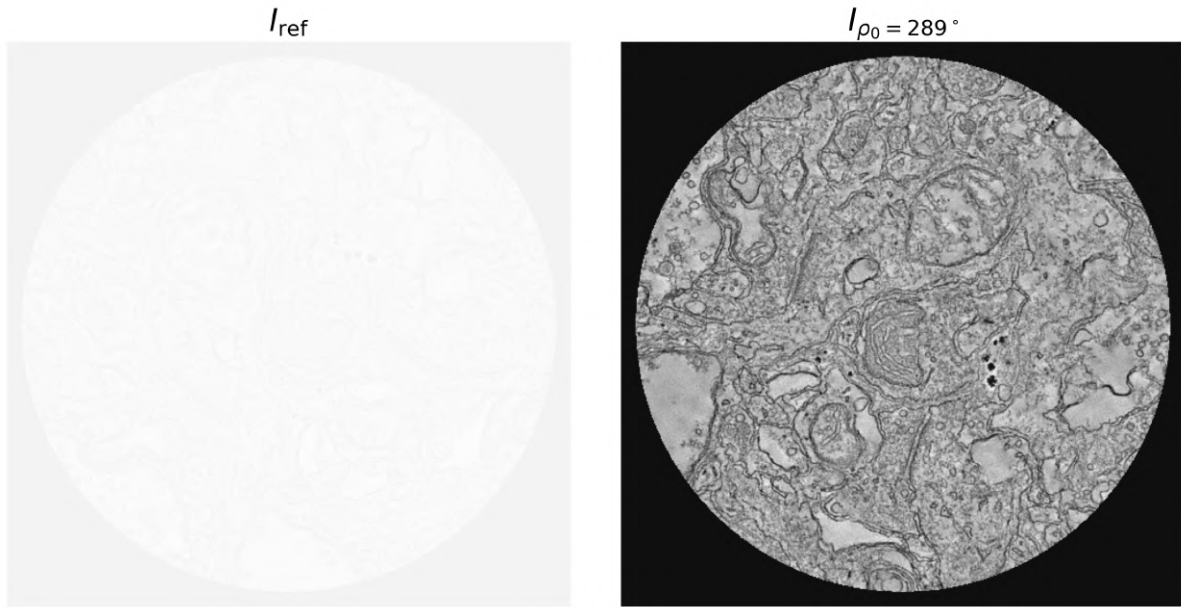


FIGURA 20. Imagen original (izquierda) y su versión rotada (derecha) con máscara circular aplicada.

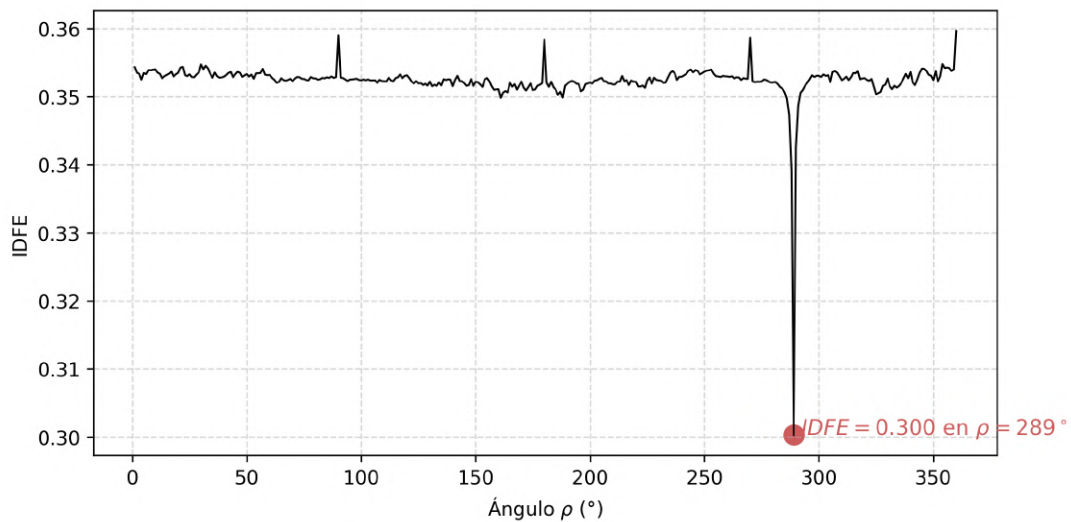


FIGURA 21. Curva del valor del índice de diferencia de fase (DPI) en función del ángulo de rotación ρ .

Revisión de conceptos de Análisis de señales, Medidas de Información y Métodos Estadísticos

9.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es establecer, repasar y unificar la notación y los conceptos fundamentales que son bien conocidos del área y serán utilizados en los capítulos siguientes de esta tesis. A diferencia de los capítulos anteriores, aquí nos centraremos en describir estas métricas de manera concisa, destacando sus fundamentos conceptuales y su aplicación a los datos experimentales, sin profundizar en derivaciones matemáticas extensas que pueden encontrarse en la bibliografía. Para lectores con experiencia en análisis de señales y neurociencia, su lectura puede considerarse prescindible; aun así, los invitamos a recorrer este capítulo, preparado con especial cuidado para ofrecer una visión ordenada y accesible de las herramientas empleadas. De este modo, se establece un puente natural entre los conceptos teóricos y los análisis presentados en los próximos capítulos de aplicación.

9.2. Densidad Espectral de Potencia (PSD)

El estudio de un proceso estocástico puede abordarse desde distintas perspectivas. En el dominio temporal, el comportamiento del proceso se describe mediante sus valores instantáneos y las correlaciones entre ellos. Sin embargo, al igual que en el análisis de señales determinísticas, resulta natural considerar su representación en el dominio de las frecuencias, donde la energía o la varianza del proceso se distribuyen según los componentes espectrales que lo constituyen.

En el caso de señales determinísticas, la transformada de Fourier permite descomponer la señal en sus armónicos elementales, y la densidad espectral describe cómo se reparte la energía a lo largo de las frecuencias. Cuando la señal es aleatoria, esta noción se generaliza a través del concepto de **Densidad Espectral de Potencia**, que caracteriza cómo se distribuye la varianza del proceso en el dominio frecuencial.

Un notable Teorema del Análisis de Fourier es el de Herglotz–Bochner, cuyo resultado central es la recíproca de la siguiente observación. Sea μ una medida positiva y finita en $\mathbb{R}$, podemos suponer que es una probabilidad. Su transformada de Fourier $\hat{\mu}$ está bien definida y es una función acotada en $\mathbb{R}$ con valores en general complejos. Este resultado constituye el fundamento matemático que garantiza la existencia de una *medida espectral* asociada a todo proceso estacionario, cuya derivada (en el caso absolutamente continuo) se denomina **Densidad Espectral de Potencia (PSD)**.

Precisamente

$$(9.1) \quad \hat{\mu}(\xi) = \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i t \xi} d\mu(t)$$

La función $\hat{\mu}(\xi)$ es generalmente con valores complejos y será valuada en $\mathbb{R}$ si μ es simétrica en $\mathbb{R}$. Consideremos $\xi_1, \dots, \xi_N$ una lista, sucesión finita de frecuencias, y formemos la matriz de $N \times N$ dada por

$$(9.2) \quad M = (M_{ij})_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, N} \text{ con } M_{ij} = \hat{\mu}(\xi_i - \xi_j).$$

PROPOSICIÓN 9.2.1. *La matriz compleja M es semidefinida positiva, para todo N y toda elección de $\xi_1, \dots, \xi_N$. Precisamente $v^T M v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^N$, o bien*

$$(9.3) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{v}_i v_j M_{ij} \geq 0.$$

Demostración. Sea $v = (v_1, \dots, v_N)$ con cada $v_i \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{v}_i v_j M_{ij} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{v}_i v_j \hat{\mu}(\xi_i - \xi_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{t \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i t (\xi_i - \xi_j)} d\mu(t) \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^N \bar{v}_i e^{-2\pi i t (\xi_i)} \right) \left(\sum_{j=1}^N v_j e^{-2\pi i t (\xi_j)} \right) d\mu(t) \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^N v_j e^{-2\pi i t (\xi_j)} \right) \left(\sum_{j=1}^N \bar{v}_j e^{-2\pi i t (\xi_j)} \right) d\mu(t) \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^N v_j e^{-2\pi i t (\xi_j)} \right|^2 d\mu(t) \geq 0 \end{aligned}$$

El Teorema de Herglotz–Banach (H-B) garantiza la recíproca.

TEOREMA 9.2.1. *(H-B) Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en cero y semidefinida positiva, entonces existe una medida positiva μ tal que $\hat{\mu} = \varphi$. Es decir, φ es la Transformada de Fourier de una medida.*

Este resultado es la base para probar la existencia de la “densidad espectral” de potencia de un proceso estocástico débilmente estacionario, o estacionario, en sentido amplio. Repasamos a continuación la noción de Proceso Estocástico Débilmente Estacionario y veremos cómo el Teorema *H-B* (9.2.1) viene a proveernos la densidad espectral de dicho proceso.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Un Proceso Estocástico (*PE*) (de tiempo continuo) es una función $X = \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cada t fijo $X(t, \omega)$ como función de $\omega \in \Omega$ es una variable aleatoria. En las aplicaciones puede pensarse como una familia de señales indexada por $\omega \in \Omega$, $X_\omega = X(t, \omega)$. Dejando de lado ciertas cuestiones delicadas de medibilidad, esta interpretación es clara y se extiende como una familia de señales aleatorias.

Se dice que un *PE* es débilmente estacionario (*PEDE*) si cumple las siguientes propiedades

- a. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $X_\omega = X(t, \omega)$ está en $L^2(\Omega, \mathcal{P})$ i.e. $\int_{\Omega} |X_t(\omega)|^2 d\mathcal{P}(\omega) < \infty$;
- b. todas las variables aleatorias X_t tienen la misma media (esperanza) $m \in \mathbb{C}$;

$$(9.4) \quad \mathcal{E}(X_t) = \int_{\Omega} X_t(\omega) d\mathcal{P}(\omega) = m,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$;

- c. para todos $s, t, h \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(9.5) \quad \mathcal{E}(X_{t+h}, \overline{X_{s+h}}) = \mathcal{E}(X_t, \overline{X_s});$$

- d. continuidad en $t_0 = 0$ en $L^2(\Omega, d\mathcal{P})$;

$$(9.6) \quad \mathcal{E}(|X_t - X_0|^2) \rightarrow 0, t \rightarrow 0.$$

Notemos que c . implica que

$$(9.7) \quad \mathcal{E}(X_{t+s}, \overline{X_t}) = \mathcal{E}(X_{t+s-t}, \overline{X_{t-t}}) = \mathcal{E}(X_s, \overline{X_0})$$

DEFINICIÓN 9.2.1. La función $R(t) = \mathcal{E}(X_s, \overline{X_0}) = \mathcal{E}(X_{t+s}, \overline{X_s})$ es la autocorrelación (estocástica) de PEDE X .

LEMA 9.2.1. La autocorrelación R de un PEDE X es continua e cero y definida positiva.

Demostración. Para probar la continuidad, notemos que

$$\begin{aligned} |R(0+h) - R(0)| &= |\mathcal{E}(X_h, \overline{X_0}) - \mathcal{E}(X_0, \overline{X_0})| \\ &\leq \mathcal{E}(|X_h - X_0|, |\overline{X_0}|) \\ &\leq \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(|X_h - X_0|^2) \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(|\overline{X_0}|^2), \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Schwartz. El último término tiende a cero cuando h tiende a cero por la propiedad d . de PEDE. Veamos ahora que R es definida positiva. En efecto, sea N un número natural dado, $t_1, t_2, \dots, t_N$; N números reales (instantes en el proceso) y $v = (v_1, \dots, v_N)$ un vector cualquiera de entradas complejas, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{v_i} v_j R(t_i - t_j) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathcal{E}(X_{t_i-t_j}, \overline{X_{t_0}}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathcal{E}(X_{t_i}, \overline{X_{t_j}}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} X_{t_i}(\omega) \overline{X_{t_j}(\omega)} d\mathcal{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \overline{v_i} X_{t_i}(\omega) \right) \left(\sum_{j=1}^N v_j \overline{X_{t_j}(\omega)} \right) d\mathcal{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \overline{v_i} X_{t_i}(\omega) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^N v_j X_{t_j}(\omega) \right)} d\mathcal{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^N \overline{v_i} X_{t_i}(\omega) \right|^2 d\mathcal{P}(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

□

TEOREMA 9.2.2. *Existe una única medida positiva y finita en $\mathbb{R}$ que denotamos con S tal que $\hat{S}$ es la función de autocorrelación $R(t)$ asociada al Proceso Estocástico Débilmente Estacionario X ,*

$$(9.8) \quad \hat{S}(t) = R(t)$$

Demostración. Se deduce directamente del Lema 9.2.1 y del Teorema 9.2.1 □

Si bien el Teorema precedente no provee un método explícito para el cálculo de la medida S , que puede ser absolutamente continua o no, resulta relevante porque prueba que todo *PEDE* X tiene un “espectro de potencias” $S = S(X)$.

Introducimos brevemente un esquema de cálculo explícito de S en términos de los denominados periodogramas. Para ello haremos una hipótesis adicional sobre el *PEDE* X que no representa una restricción para nuestras aplicaciones posteriores. Supondremos que, además de las propiedades 9.2, tenemos que cada señal $X_\omega(t) = X(t, \omega) \in L^\infty(\mathbb{R})$ como función de t para cada $\omega \in \Omega$. Sea $W(t)$ una función de $L^1(\mathbb{R})$ que interpretamos como una ventana temporal. Definimos el “periodograma del *PEDE* X con ventana W

$$(9.9) \quad S_W(\xi, \omega) = \left| \int_{t \in \mathbb{R}} W(t) X(t, \omega) e^{-2\pi i t \xi} dt \right|^2,$$

que está bien definido ya que el integrando está en $L^1(\mathbb{R})$ por las propiedades de X y W .

El siguiente resultado muestra cómo obtener la densidad espectral de un *PEDE* real y acotado tomando ventanas cada vez más amplias.

TEOREMA 9.2.3. *Sea X un *PEDE* real tal que $X_\omega(t) \in L^\infty$ para cada $\omega \in \Omega$. Sea W una ventana real y par en $L^1(\mathbb{R})$ tal que $(\hat{W})^2$ tiene integral uno. Entonces*

(1)

$$(9.10) \quad \mathcal{E}(S_W(\xi, \cdot)) = (S * (\hat{W})^2)(\xi),$$

y

(2)

$$(9.11) \quad \mathcal{E}\left(S_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}W(\frac{\cdot}{\lambda})}}\right) \rightarrow S(\xi), \lambda \rightarrow \infty$$

en el sentido de las distribuciones de Schwartz.

Demostración. Notemos que, como W es par y real, su transformada de Fourier es real, y por consiguiente, $(\hat{W})^2$ es positiva. Notemos también que para $\lambda > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda (\hat{W})^2(\lambda s) &= \left[\sqrt{\lambda} \hat{W}(\lambda s) \right]^2 \\ &= \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{-2\pi i t(\lambda s)} dt \right\}^2 \\ &= \left\{ \sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} W\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) e^{-2\pi i \mu s} \frac{d\mu}{\lambda} \right\}^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} W\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \right)^\wedge(s) \right]^2.\end{aligned}$$

Probemos (1),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(S_W(\xi, \delta)) &= \mathcal{E}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} W(t) X(t, \omega) e^{-2\pi i t\xi} dt\right|^2\right) \\ &= \mathcal{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} W(t) X(t, \omega) e^{-2\pi i t\xi} dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} W(\tau) X(\tau, \omega) e^{-2\pi i \tau\xi} d\tau\right)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W(t) W(\tau) e^{-2\pi i \xi(t-\tau)} \mathcal{E}(X(t, \omega) X(\tau, \omega)) d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W(t) W(\tau) e^{-2\pi i \xi(t-\tau)} R(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} W(t) W(\tau) e^{-2\pi i \xi(t-\tau)} \hat{S}(t-\tau) d\tau \right\} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) \left\{ \int_{\mathbb{R}} W(t-\delta) e^{-2\pi i \xi\delta} \hat{S}(\delta) d\delta \right\} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) \left\{ \int_{\mathbb{R}} \widehat{W(t-\delta)} e^{-2\pi i \xi\delta}(\Omega) S(\Omega) d\Omega \right\} dt.\end{aligned}$$

Calculemos $(W(t-\cdot)e^{-2\pi i \xi\cdot})^\wedge(\theta)$,

$$\begin{aligned}(W(t-\cdot)e^{-2\pi i \xi\cdot})^\wedge(\theta) &= \int_{\sigma \in \mathbb{R}} W(t-\sigma) e^{-2\pi i \xi\sigma} e^{-2\pi i \theta\sigma} d\sigma \\ &= \int_{\sigma \in \mathbb{R}} W(\sigma-t) e^{-2\pi i \sigma(\xi+\theta)} d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v \in \mathbb{R}} W(v) e^{-2\pi i(v+t)(\xi+\theta)} dv \\
&= e^{-2\pi i t(\xi+\theta)} e^{-2\pi i(v+t)(\xi+\theta)} \hat{W}(\xi + \theta),
\end{aligned}$$

introducimos esto en el cálculo precedente y tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(S_W(\xi, \cdot)) &= \int_{t \in \mathbb{R}} W(t) \left\{ \int_{\theta \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i t(\xi+\theta)} \hat{W}(\xi + \theta) S(\theta) d\theta \right\} dt \\
&= \int_{\theta \in \mathbb{R}} \left[\hat{W}(\xi + \theta) \right]^2 S(\theta) d\theta \\
&= \int_{\theta \in \mathbb{R}} \left[\hat{W}(\xi - \theta) \right]^2 S(-\theta) d\theta \\
&= \int_{\theta \in \mathbb{R}} \left[\hat{W}(\xi - \theta) \right]^2 S(\theta) d\theta \\
&= (S * (\hat{W})^2)(\xi)
\end{aligned}$$

lo que prueba (1). Para demostrar (2) notemos que, para $\lambda > 0$, la función $W^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\frac{t}{\lambda})$ está en $L^1(\mathbb{R})$, es real y por la observación al inicio de la prueba del teorema,

$$(W^{(\lambda)}(s))^2 = \lambda (\hat{W})^2(\lambda s)$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} (W^{(\lambda)}(s))^2 ds = \int_{\mathbb{R}} (\hat{W})^2(\lambda s) \lambda ds = \int_{\mathbb{R}} (\hat{W})^2(s) ds.$$

Es decir que $W^{(\lambda)}$ cumple todas las propiedades de W que nos permitieron probar el punto (1) del teorema. Por consiguiente, para todo $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(S_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\frac{\cdot}{\lambda})}(\xi, \cdot)\right) &= S * \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \widehat{W\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)}\right)^2 \\
&= \left[S * \left(\lambda (\hat{W})^2(\lambda \cdot)\right)\right](\xi)
\end{aligned}$$

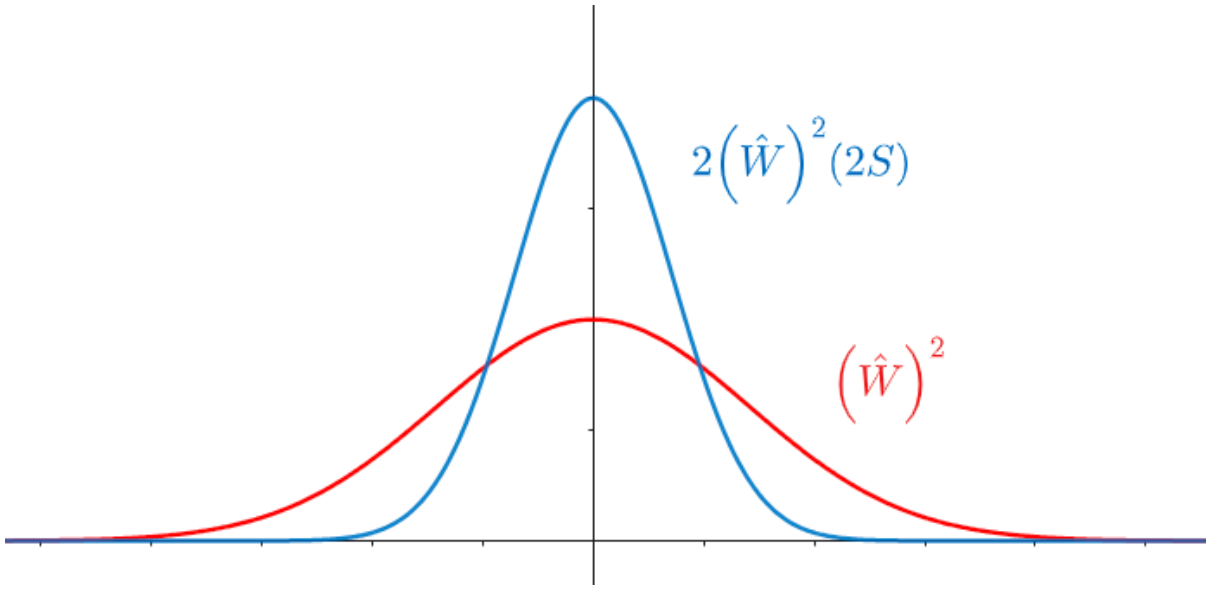


FIGURA 1. Ilustración de la familia de funciones $\lambda(\hat{W})^2(\lambda\xi)$ para distintos valores de $\lambda > 0$.

Notemos que $\lambda(\hat{W})^2(\lambda\xi)$ tiende a la delta de Dirac en cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Por consiguiente, en el sentido de las distribuciones:

$$(9.12) \quad \mathcal{E} \left(S^{(\xi, \cdot)}_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\frac{\cdot}{\lambda})} \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} S(\xi).$$

□

Relevancia neurocientífica en el marco de esta tesis. El análisis de la densidad espectral de potencia (PSD) es fundamental en neurociencia porque permite caracterizar cómo se distribuye la energía neuronal a lo largo de las distintas bandas de frecuencia. En esta tesis, la PSD aporta una visión detallada de cómo la influencia farmacológica de la trazodona en el Capítulo 11 y las demandas cognitivas de las tareas en el Capítulo 12 modulan la actividad oscilatoria. Estas diferencias espectrales entre grupos y condiciones permiten identificar patrones funcionales robustos, ofreciendo un marco cuantitativo para comprender los mecanismos neurofisiológicos que emergen en distintas etapas del desarrollo y bajo diferentes estados cerebrales. Veremos esto en los Capítulos 10, 10 y 12.

9.3. Coherencia (Cxy)

En la subsección precedente hemos introducido la densidad espectral de potencia S asociada a un proceso estocástico (señales aleatorias) débilmente estacionario X . Dado que S está asociada a la autocorrelación del proceso X , la denotamos por S_{XX} . Dado otro proceso estocástico Y en el mismo intervalo temporal que también sea débilmente estacionario, también tenemos definida la densidad espectral de potencia S_{YY} . Por otra parte, dados ambos procesos estocásticos X e Y , está bien definida la correlación cruzada

$$(9.13) \quad R_{XY}(t) = \mathcal{E} \left(X_s \overline{Y_{t+s}} \right)$$

y también la densidad espectral de potencia cruzada, como en la sección precedente, como

$$(9.14) \quad \hat{S}_{XY}(t) = R_{XY}(t)$$

Con estos conceptos estamos en condiciones de definir la coherencia de dos procesos estocásticos débilmente estacionarios como:

$$(9.15) \quad C_{XY} = \frac{|S_{XY}|^2}{S_{XX} S_{YY}}$$

Relevancia neurocientífica en el marco de esta tesis. La coherencia es una herramienta clave para estudiar la comunicación funcional entre regiones cerebrales, ya que cuantifica la sincronización en frecuencia entre pares de electrodos. En el contexto de esta tesis, la coherencia permitirá evaluar cómo la influencia farmacológica de la trazodona en el Capítulo 11 y las demandas cognitivas de las tareas en el Capítulo 12 influyen en la conectividad funcional. Este enfoque ofrece información complementaria a la PSD, revelando cambios en la coordinación interregional que no pueden detectarse únicamente mediante análisis de potencia.

9.4. Entropía de Permutación (PE)

La entropía de permutación, propuesta por Bandt y Pompe [4], es una medida basada en teoría de la información que cuantifica la complejidad ordinal de una serie temporal. A diferencia de las aproximaciones clásicas, como la entropía de Shannon —que ignora el orden temporal al cuantificar únicamente la frecuencia de aparición de los valores—, la PE incorpora explícitamente la estructura temporal de la señal al utilizar el orden relativo de los valores vecinos para construir una distribución de probabilidad.

Empezamos, como lo hacen Bandt y Pompe [4], describiendo el método básico. Sea $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ una serie temporal de tiempo discreto $1, 2, 3, \dots, k$. Tomemos primero $n = 2$ (el orden del análisis). Los pares ($n = 2$) consecutivos que se pueden formar con x son $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}$, es decir $k - 1$ pares. Ahora contamos en cuántos de esos pares $\{x_i, x_{i+1}\}$ se tiene que $x_{i+1} > x_i$ y en cuántos se tiene que $x_{i+1} \leq x_i$. Llamamos C a los primeros y D a los segundos. Entonces $C + D = k - 1$ y, por lo tanto, $\frac{C}{k-1} + \frac{D}{k-1} = 1$. Es decir, $\frac{C}{k-1}$ y $\frac{D}{k-1}$ son probabilidades y podemos calcular su entropía de Shannon

$$(9.16) \quad H(2) = -\frac{C}{k-1} \log \frac{C}{k-1} - \frac{D}{k-1} \log \frac{D}{k-1}.$$

Esta idea simple puede extenderse a órdenes mayores que $n = 2$. Notemos que en el caso $n = 2$, cada configuración creciente, C , se puede identificar con la permutación 01 del conjunto $\{0, 1\}$ y cada configuración decreciente, D , se puede identificar con la permutación 10. Si $n = 3$, podemos distinguir el comportamiento en los tres instantes consecutivos x_i, x_{i+1}, x_{i+2} por las seis ($b = 3!$) permutaciones de $\{0, 1, 2\}$. Precisamente 012, 021, 102, 120, 210, 201. Si π es una cualquiera de estas permutaciones de $\{0, 1, 2\}$, definimos

$$(9.17) \quad p(\pi) = \frac{|\{i : 0 \leq i \leq k-3, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3} \text{ es tipo } \pi\}|}{k-2}$$

decimos que $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$ es tipo π si su orden es el mismo que el de π . Así

$$(9.18) \quad H(3) = - \sum_{\pi \in \Pi_3} p(\pi) \log p(\pi),$$

donde $\Pi_3 = \{\pi : \pi \text{ es permutación de } \{0, 1, 2\}\}$. En general, dado $n < k + 1$, consideramos $\Pi_n = \{\pi : \pi \text{ es permutación de } \{0, 1, \dots, k - 1\}\}$, definimos

$$(9.19) \quad p(\pi) = \frac{|\{i : 0 \leq i \leq k - n/x_{i+1}, \dots, x_{i+n} \text{ es tipo } \pi\}|}{k - n + 1}$$

y

$$(9.20) \quad H(n) = - \sum_{\pi \in \Pi_n} p(\pi) \log p(\pi)$$

que es la Entropía de Permutación de orden n de la señal X .

Desde el punto de vista algorítmico, la Entropía de Permutación se determina a partir de dos parámetros fundamentales:

- **Dimensión de incrustación** (d): determina la cantidad de puntos consecutivos utilizados para formar cada vector embebido^{*}. Controla la longitud de los patrones ordinales y la complejidad del alfabeto resultante ($d!$ permutaciones posibles).
- **Retardo temporal** (τ): especifica la separación entre los puntos del vector embebido. Permite ajustar la escala temporal a la que se analizan las estructuras ordinales de la señal.

Estos parámetros tienen un concepto importante asociado, el de **patrón ordinal**, que corresponde al orden relativo de los valores dentro de cada vector embebido. Cada fragmento de la serie se transforma en una permutación que indica qué posición ocupa cada valor al ordenar el vector de menor a mayor. Los distintos patrones ordinales actúan como los “símbolos” del método y permiten construir vectores retardados a partir de la señal original y, a partir de ellos, la secuencia de permutaciones que caracteriza la estructura temporal de la serie.

A partir de estos parámetros se construyen vectores retardados de la forma

$$(9.21) \quad Y_t^{(d,\tau)} = (x_{t-(d-1)\tau}, \dots, x_{t-\tau}, x_t)^T, \quad t > (d-1)\tau.$$

Cada vector $Y_t^{(d,\tau)}$ se transforma luego en un *patrón ordinal* mediante el ordenamiento ascendente de sus componentes. Este procedimiento asigna a cada vector una permutación

^{*}Conjunto de valores de la serie temporal que representa el estado local del sistema en un instante dado y permite reconstruir su dinámica en un espacio de mayor dimensión.

π_t entre las $d!$ posibles. El procedimiento completo se ejemplifica en la Figura 2 a partir de una señal ilustrativa.

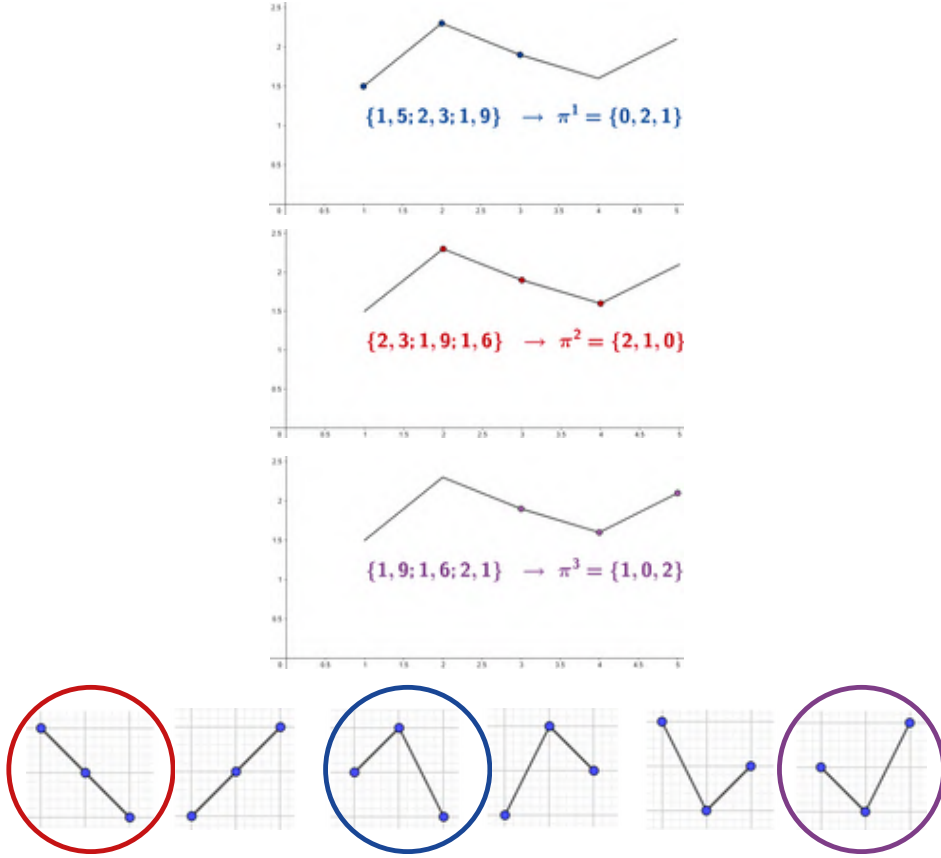


FIGURA 2. Ejemplo ilustrativo del procedimiento de construcción de patrones ordinales para la entropía de permutación en una señal $x_t = 1, 5, 2, 3, 1, 9, 1, 6, 2, 1$ con dimensión de incrustación $d = 3$ y retardo temporal $\tau = 1$. Se generan los vectores embebidos y se asignan las permutaciones correspondientes π^1, π^2, π^3 según el orden relativo de sus componentes. En la parte inferior se muestran las $d! = 3! = 6$ permutaciones posibles para $d = 3$ y las observadas en la señal se indican mediante un círculo con color coincidente con el vector embebido.

A partir de una serie suficientemente larga es posible estimar la frecuencia de aparición de cada permutación. Si P_i denota la probabilidad del patrón ordinal i -ésimo, la entropía de permutación normalizada se define como

$$(9.22) \quad h_{\text{EP}}(X) = -\frac{1}{\log(d!)} \sum_{i=1}^{d!} P_i \log P_i.$$

Valores cercanos a $h_{EP} \approx 1$ indican una dinámica altamente irregular (más compleja o cercana al ruido), mientras que valores bajos reflejan patrones temporales más regulares y, por lo tanto, menor complejidad.

Un aspecto adicional del método es la posible aparición de *patrones prohibidos*, es decir, permutaciones que no aparecen en la serie temporal, lo cual puede asociarse a restricciones dinámicas del sistema[†].

Relevancia neurocientífica en el marco de esta tesis. La PE ha demostrado ser una herramienta valiosa en el estudio de sistemas dinámicos complejos, tanto naturales[‡] como artificiales[§]. Su construcción se basa en relaciones ordinales y no requiere supuestos previos sobre la distribución de probabilidad del sistema, lo que la vuelve robusta frente al ruido, artefactos y cambios lentos en la amplitud de la señal [5]. En neurociencia, la PE se ha utilizado de manera extensa para caracterizar la dinámica del EEG, ya que el método capta variaciones sutiles en la estructura temporal asociadas a distintos estados fisiológicos como los diferentes estadios de sueño en los Capítulos 10 y 11 así como también para estudiar cambios en la actividad cerebral durante tareas creativas como en el Capítulo 12.

9.5. Complejidad de Lempel-Ziv (LZC)

La complejidad algorítmica de Kolmogorov $K(S)$ caracteriza la complejidad de una cadena S como la longitud del programa binario más corto (*prog*) más corto que la genera, realizada por una máquina universal U , formalmente,

$$(9.23) \quad K(S) = \min_{\text{prog}} \{\text{largo}(\text{prog})\}.$$

Pero $K(S)$ no es computable en general, ya que no existe un algoritmo capaz de garantizar que el programa hallado sea el más corto posible entre todos los programas que generan S . Esta imposibilidad práctica hace necesario recurrir a aproximaciones que capturen el espíritu de la complejidad algorítmica pero que puedan calcularse de manera efectiva. Una

[†]La presencia de patrones prohibidos ha sido estudiada como indicador de determinismo en sistemas dinámicos no lineales.

[‡]Aquel que ocurre en la naturaleza sin intervención humana directa, como la actividad cerebral registrada mediante EEG.

[§]Aquel creado o controlado por el ser humano, como modelos computacionales de actividad neuronal o señales sintéticas utilizadas para validar algoritmos de análisis de EEG.

estrategia natural consiste en relacionar la complejidad con el grado de compresibilidad de la secuencia. En términos generales, si una cadena puede comprimirse de manera sustancial, entonces existe una descripción más corta que la propia cadena, y su complejidad efectiva debe ser baja. Por el contrario, si la cadena es difícil de comprimir, se interpreta que contiene poca estructura redundante y por lo tanto su complejidad es alta.

La complejidad de Lempel–Ziv (LZC) surge precisamente de este enfoque: se basa en medir cuánta “información nueva” debe introducirse para generar la secuencia utilizando únicamente operaciones de copia y expansión de subcadenas ya observadas.

Sea $X : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ una función cualquiera con dominio en los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y con imagen en el conjunto de los dígitos 0 y 1. De otro modo los valores $X(i) = X_i$ definen una sucesión de ceros y unos. Hay sucesiones (funciones X) epíricamente “poco complejas” como $X(i) = 1, \forall i$ o $X(i) = \frac{1 + (-1)^i}{2}$. Pero la mayor proporción de funciones X tendrán un comportamiento fuera de toda simplificación funcional y serán “muy complejas” heurísticamente. Dada X , fijamos $n \in \mathbb{N}$ (grande) y denotamos con X^n la sucesión finita definida por los primeros n términos de la sucesión X ,

$$X^n = x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Ahora procedemos a “factorizar” X^n en $C(X^n)$ factores distintos de acuerdo al siguiente algoritmo de Lempel-Ziv. Para describir el intuitivamente algoritmo supongamos que X es la expansión de π en base dos, denotamos a X por π ,

$$\pi^{20} = 11,00100100001111110110101010001000010100011000_2$$

Tomemos $n = 20$,

$$\pi^{20} = 11,001001000011111101_2$$

Exploramos X^n , de izquierda a derecha, agrupando en “patrones” nuevos en la sucesión

$$\pi^{20} = 1 \mid 10 \mid 01 \mid 0010 \mid 000 \mid 111 \mid 1110 \mid 1.$$

Así, tenemos que $C(\pi^{20}) = 8$.

Al menos teóricamente, este algoritmo de factorización puede hacerse para todo $n \in \mathbb{N}$. Se espera que el comportamiento de $C(X^n)$ cuando n crece a infinito contenga información

relevante sobre la complejidad global de la secuencia X . Pero resulta claro que muchas veces ese límite será infinito y, para tener un indicador fehaciente que permita comparar complejidades, tendremos que normalizar adecuadamente $C(X^n)$. Esa normalización resulta natural a partir del siguiente teorema de Lempel-Ziv.

TEOREMA 9.5.1.

$$(9.24) \quad C(X^n) \leq \frac{n}{\delta_n \log n}$$

con $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. En particular

$$(9.25) \quad \frac{C(X^n) \log n}{n} \leq \frac{1}{\delta_n} \rightarrow 1$$

Esto permite definir una entropía de Lempel-Ziv como

$$(9.26) \quad H_{LZ}(X) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C(X^n) \log n}{n},$$

donde $\limsup$ denota el límite superior que será un número entre 0 y 1.

Recordamos que, dada una sucesión X_n de números reales

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup\{\lambda_n : n \leq k\}),$$

donde el límite en k existe dado que $\sup\{\lambda_n : n \leq k\}$ es no decreciente como sucesión con índice k .

Observamos que el límite puede no existir, pero el $\limsup$ existe siempre y por el Teorema 9.5.1 resultará un número entre 0 y 1.

Se sabe también que con fuente ergódica y estacionaria se tiene que

$$(9.27) \quad H_{LZ} = H \text{ de Shannon}$$

Una presentación rigurosa de estos resultados puede encontrarse en Cover y Thomas [6].

Es fundamental considerar que, para que la métrica sea robusta, la secuencia debe ser suficientemente larga en relación con el tamaño del alfabeto; para secuencias cortas (frente a $|A|$) la complejidad tiende a aproximarse a la longitud de la secuencia y pierde sensibilidad estadística.

A continuación se presenta el procedimiento paso a paso (algoritmo clásico, estilo LZ76 [7]) para obtener la descomposición y calcular C_{LZ} de una secuencia $S_{0:T-1}$:

1. **Inicialización.** Sea $i = 0$. Inicie una lista vacía de factores (producciones) $\mathcal{F} = \emptyset$ y una ventana de prefijo P inicialmente vacía.
2. **Primer símbolo.** Tome el primer símbolo S_0 ; agréguelo como primer factor: $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{S_0\}$. Actualice $i \leftarrow 1$ y $P \leftarrow P S_0$.
3. **Bucle principal.** Mientras $i < T$:
 - a) Busque la cadena más larga Q que comience en S_i y que aparezca en P (prefijo previo). Es decir, encuentre el mayor $n \geq 1$ tal que $S_{i:i+n-1} \in \text{factor}(P)$.
 - b) Si existe tal Q y además $i + n < T$ (hay un símbolo siguiente), entonces la nueva producción será Q seguida del símbolo siguiente $a = S_{i+n}$ (producción tipo *reproducción+símbolo nuevo*). Añada Qa a $\mathcal{F}$ y avance $i \leftarrow i + n + 1$.
 - c) Si no existe Q (o Q consume hasta el final sin símbolo nuevo), entonces tome el símbolo simple S_i como nueva producción y avance $i \leftarrow i + 1$.
 - d) Actualice el prefijo P como $P \leftarrow P$ (última producción).
4. **Fin.** Cuando $i \geq T$, el conjunto $\mathcal{F}$ contiene la descomposición en producciones; la complejidad LZ es

$$C_{LZ}(S_{0:T-1}) = |\mathcal{F}|.$$

Relevancia neurocientífica en el marco de esta tesis. La complejidad de Lempel–Ziv resulta especialmente valiosa en neurociencia porque permite capturar cambios en la organización temporal de la actividad cerebral que no se reflejan en métricas espectrales tradicionales. En el contexto de este trabajo, LZC ofrece una medida sensible para comparar estados fisiológicos (vigilia, somnolencia, sueño) y para evaluar cómo distintos factores —como la maduración cortical, la demanda cognitiva de las tareas o el efecto de fármacos como la trazodona— modifican la dinámica de la señal EEG. Su capacidad para detectar variaciones sutiles en la irregularidad temporal la convierte en una herramienta robusta para analizar diferencias entre grupos y comprender mejor los mecanismos neurofisiológicos que subyacen a los procesos estudiados.

9.6. Complejidad Conjunta de Lempel–Ziv (JLZC)

La complejidad conjunta de Lempel–Ziv (JLZC) extiende el enfoque clásico de Lempel–Ziv [7] para cuantificar la complejidad algorítmica de un *conjunto* de secuencias simultáneamente. Mientras que la LZC tradicional mide el grado de “novedad” necesario para reconstruir una única cadena S , la JLZC evalúa cuánta información nueva debe introducirse para describir de manera conjunta múltiples señales que evolucionan en paralelo. Esta generalización permite estimar la complejidad de un sistema multivariado y, en particular, capturar dependencias y redundancias entre señales.

Sea un conjunto de K secuencias sincronizadas y de igual longitud,

$$\mathcal{S} = \{S_{0:T-1}^{(1)}, S_{0:T-1}^{(2)}, \dots, S_{0:T-1}^{(K)}\},$$

definidas sobre un alfabeto finito A . La idea central consiste en construir una *secuencia conjunta* codificada a partir del vector de símbolos observados en cada tiempo:

$$X_t = (S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(K)}),$$

de modo que la cadena multivariada

$$X_{0:T-1} = (X_0, X_1, \dots, X_{T-1})$$

queda definida sobre el alfabeto producto A^K . Aplicar LZC sobre esta secuencia conjunta permite evaluar la complejidad del sistema completo. Formalmente, definimos:

$$(9.28) \quad C_{\text{JLZ}}(\mathcal{S}) = C_{\text{LZ}}(X_{0:T-1}).$$

De forma análoga al caso univariado, la complejidad conjunta mide el número de producciones necesarias para reconstruir la secuencia multivariada usando únicamente operaciones de copia y extensión de patrones previamente observados. Cuando las señales comparten estructura o muestran redundancia temporal, la secuencia conjunta puede comprimirse más: la complejidad conjunta disminuye. Por el contrario, cuando las señales evolucionan de manera independiente o presentan interacciones altamente no lineales, la compresibilidad disminuye y la complejidad aumenta.

Un resultado teórico importante es que, bajo normalización apropiada, la JLZC constituye un estimador consistente de la *entropía conjunta* del sistema [8, 9], es decir:

$$(9.29) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_{\text{JLZ}}(\mathcal{S}) \log T}{T} = h_{\text{joint}},$$

donde h_{joint} representa la tasa de entropía conjunta del proceso multivariado. Esta propiedad justifica el uso de JLZC para estudiar sistemas complejos con múltiples variables de interacción, como la actividad cerebral registrada mediante EEG multicanal.

Relevancia neurocientífica en el marco de esta tesis. La JLZC se ha utilizado ampliamente para analizar la coordinación entre canales EEG, dado que permite capturar regularidades temporales compartidas y patrones de integración funcional que no se reflejan en métricas univariadas. En particular, resulta sensible a cambios en la conectividad efectiva, la sincronización y la complejidad global de la dinámica cortical. Estudios previos han demostrado que la complejidad conjunta disminuye en estados cerebrales más estables o sincronizados (como el sueño profundo) y aumenta en condiciones donde la actividad multicanal es más rica o menos redundante, como en vigilia activa [9]. Esta medida, por lo tanto, complementa los análisis espectrales y univariados proporcionando una perspectiva multivariada de la organización temporal del cerebro.

9.7. Métodos Estadísticos

En esta sección se describen los métodos estadísticos empleados para evaluar diferencias significativas entre los grupos y condiciones estudiados. Se utilizaron pruebas no paramétricas debido a que los datos no seguían una distribución normal y, en varios casos, los tamaños muestrales eran reducidos[¶].

Los análisis se organizaron según el tipo de comparación necesaria:

- Comparación entre dos grupos independientes: **prueba de Mann–Whitney**.
- Comparación entre dos condiciones medidas sobre los mismos sujetos: **prueba de Wilcoxon para muestras pareadas**.
- Comparación entre más de dos grupos independientes: **prueba de Kruskal–Wallis**.

[¶]Las pruebas no paramétricas no requieren asumir normalidad y son adecuadas cuando los datos presentan asimetrías, valores atípicos o escalas ordinales.

En los capítulos de aplicaciones se especifica el nivel de significancia empleado en cada análisis. En términos generales, el *nivel de significancia* α [‡] establece el criterio para decidir el rechazo de la hipótesis nula^{**}.

Por su parte, el *valor de p* cuantifica la probabilidad de obtener un resultado tan extremo como el observado —o más— bajo el supuesto de que H_0 es verdadera. Por lo tanto, valores de p pequeños indican mayor evidencia en contra de la hipótesis nula.

Para facilitar la lectura y uniformar la presentación de resultados, se utilizó la siguiente notación estándar:

$$p < 0,05 (*), \quad p < 0,01 (**), \quad p < 0,001 (***)$$

Esta convención permite interpretar rápidamente la magnitud del valor de p y, con ello, la fuerza de la evidencia estadística que respalda las diferencias observadas entre grupos o condiciones, denotada mediante asteriscos, donde un mayor número de estos indica un nivel de significancia más estricto.

9.7.1. Prueba de Mann-Whitney para dos grupos independientes. La prueba de **Mann-Whitney** (o *Wilcoxon rank-sum test*) permite comparar dos grupos cuyas observaciones son independientes entre sí[10]. Esta prueba es apropiada cuando las distribuciones no son normales o cuando el tamaño muestral es reducido, como ocurre en el Capítulo 10 al comparar registros de EEG entre perros jóvenes y adultos, donde cada individuo pertenece únicamente a un grupo.

Fundamento teórico. Sean $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ y $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ dos muestras independientes. La hipótesis nula es:

$$H_0 : F = G,$$

donde F y G son las distribuciones subyacentes. La alternativa puede ser bilateral o unilateral (por ejemplo, que un grupo presente valores estocásticamente mayores que el otro).^{††}

[‡]El nivel de significancia (α) es un umbral prefijado que determina cuánta evidencia se exige para rechazar la hipótesis nula. Comúnmente se utiliza $\alpha = 0,05$, lo que implica aceptar una probabilidad del 5 % de cometer un error tipo I (rechazar H_0 cuando en realidad es verdadera).

^{**}La hipótesis nula (H_0) suele representar la ausencia de efecto o de diferencias entre grupos. Por ejemplo, que dos distribuciones tengan la misma mediana o que un tratamiento no produzca cambios en una medida determinada.

^{††}Un ejemplo clásico citado en la literatura describe un estudio donde se evalúa si un fármaco prolonga el tiempo de supervivencia de animales infectados, comparando un grupo tratado con un grupo control.

9.7.2. Prueba de Wilcoxon para muestras pareadas. La prueba de **Wilcoxon de rangos con signo** fue propuesta por Frank Wilcoxon en 1945 [11] para comparar dos condiciones medidas sobre los mismos sujetos. Evalúa si las diferencias dentro de cada par difieren significativamente de cero. Este enfoque es particularmente útil en estudios de EEG donde un mismo sujeto es evaluado en dos condiciones, por ejemplo, sueño con y sin administración de trazodona en el Capítulo 11.

Fundamento teórico. Sea (X_i, Y_i) un conjunto de pares de observaciones dependientes. Defínase $D_i = Y_i - X_i$ y elimínense los casos con $D_i = 0$. Los valores $|D_i|$ se ordenan y rankean; se asigna a cada uno el signo correspondiente. El estadístico se define como:

$$W^+ = \sum_{i:D_i>0} R_i,$$

donde R_i es el rango asignado a $|D_i|$. Bajo H_0 , la distribución de W^+ es conocida y puede aproximarse por una normal cuando n es grande.

9.7.3. Prueba de Kruskal–Wallis para más de dos grupos. Cuando se compararon más de dos grupos independientes se utilizó la prueba de **Kruskal–Wallis** [12]. Esta técnica es una extensión del test de Wilcoxon para múltiples grupos y permite evaluar diferencias globales entre sus distribuciones. Su uso es adecuado, por ejemplo, al comparar los distintos estados de sueño o al evaluar diferencias entre grupos etarios, como en el análisis del desarrollo cerebral en bebés prematuros en el Capítulo 13. Aunque un mismo sujeto puede aportar datos a varios estados, para este análisis cada estado se considera como un grupo independiente^{‡‡}.

Fundamento teórico. Sea C el número de grupos y n_i el tamaño del grupo i . Todas las observaciones se rankean en conjunto y se calcula la suma de rangos R_i para cada grupo. El estadístico es:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^C \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

La alternativa relevante es que la supervivencia del grupo tratado sea estocásticamente mayor. Este tipo de contexto motiva el uso de pruebas no paramétricas cuando no se puede asumir normalidad ni homogeneidad de varianzas.

^{‡‡}Esto es una simplificación habitual cuando la estructura longitudinal es compleja o cuando se prioriza la comparación global entre estados más que la inferencia a nivel sujeto.

donde $N = \sum_i n_i$. Bajo H_0 , el estadístico H se aproxima por una distribución χ^2 con $C - 1$ grados de libertad.

Corrección por comparaciones múltiples. En análisis que involucraron múltiples comparaciones por pares, como en el se utilizó la corrección de Bonferroni[13]. Esta corrección reduce la probabilidad de cometer errores tipo I^{§§}. En este trabajo permitió asegurar que las diferencias detectadas entre estados o grupos fueran estadísticamente confiables a pesar del gran número de contrastes realizados.

Relevancia en el contexto de esta tesis. Los métodos estadísticos presentados en esta sección constituyen una parte central del análisis desarrollado en esta tesis. La naturaleza fisiológica de los datos de EEG, junto con la variabilidad intersujeto y los tamaños muestrales reducidos, hace imprescindible el uso de pruebas no paramétricas que no requieren asumir normalidad y son robustas frente a valores atípicos. La elección de estas herramientas permitió evaluar de manera confiable las diferencias entre grupos etarios, estados de sueño y condiciones experimentales analizadas en los capítulos de aplicaciones. Asimismo, la combinación de pruebas univariadas y correcciones por comparaciones múltiples garantizó una interpretación rigurosa de los resultados, preservando la validez estadística de las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo.

^{§§}El error tipo I consiste en rechazar H_0 cuando en realidad es verdadera, es decir, detectar una diferencia que no existe.

Aplicaciones I: Sueño en perros - efectos del envejecimiento

El presente capítulo se basa en los resultados publicados en el artículo titulado “Sleep and cognition in aging dogs. A polysomnographic study” [14], un trabajo en conjunto con las doctoras Alejandra Mondino y Natasha J. Olby, del Department of Clinical Sciences, College of Veterinary Medicine, North Carolina State University, Raleigh, NC, United States.

10.1. Introducción

El sueño desempeña un papel esencial en el mantenimiento de un funcionamiento cerebral estable y equilibrado, lo que permite que los procesos cognitivos —como atención, memoria, aprendizaje, planificación, toma de decisiones y regulación emocional— operen de manera óptima a lo largo del tiempo [15, 16]. En otras palabras, es la capacidad del cerebro para preservar un “equilibrio interno” en sus funciones cognitivas frente a cambios internos (como envejecimiento o neurodegeneración) o externos (estrés, falta de sueño, estímulos ambientales), y se lo conoce como “homeostasis cognitiva” [17]. En el contexto del sueño, mantener este equilibrio implica que dormir contribuye a restaurar y organizar la información, consolidar la memoria y mantener la eficiencia de las redes neuronales, asegurando un funcionamiento cerebral adecuado durante la vigilia [18].

En este contexto, los perros constituyen un modelo valioso para el estudio del sueño debido a sus similitudes fisiológicas y neurológicas con los humanos, así como a la presencia de trastornos del sueño comparables, incluyendo alteraciones del ciclo sueño-vigilia y disminución en la calidad del sueño [19, 20, 21].

El presente capítulo se centra en los cambios relacionados con la edad en el ciclo sueño-vigilia y en las características electroencefalográficas en perros senior. Al igual que los humanos, los perros experimentan alteraciones en su ciclo sueño-vigilia con la edad [22, 23], y los propietarios de perros mayores reportan cambios conductuales relacionados con el sueño, tales como insomnio o aumento del tiempo de descanso durante el

día [24]. Estas variaciones pueden reflejar tanto un envejecimiento normal como procesos neurodegenerativos subyacentes, similares al síndrome de disfunción cognitiva canina (CCDS), análogo canino de la enfermedad de Alzheimer [25, 26, 27, 28], caracterizado por desorientación, alteraciones de memoria, dificultades de aprendizaje, cambios en la interacción social, ansiedad y alteraciones en el ciclo sueño-vigilia [29, 30, 31].

Para evaluar objetivamente estos cambios, se realizaron registros polisomnográficos que incluyen electroencefalografía (EEG), electromiografía (EMG) y movimientos oculares (EOG), lo que permite un análisis detallado de la macroestructura del sueño y de las características de los estados cerebrales [32, 33]. Sobre estos registros se aplicaron diversas herramientas de análisis de señales desarrolladas a lo largo de la tesis: densidad espectral de potencia (PSD), complejidad de Lempel-Ziv (LZC) y Phase Lag Index (PLI) [7, 34, 35].

El objetivo central de este estudio fue cuantificar los cambios relacionados con la edad en la estructura del sueño y en las características electroencefalográficas en perros senior. Se planteó la hipótesis de que los perros senior presentarían, en comparación con perros jóvenes, menor tiempo en sueño NREM y REM, así como diferencias en las métricas de complejidad y conectividad. Estos análisis permiten obtener una visión detallada de la dinámica cerebral durante el envejecimiento canino.

10.2. Sujetos y metodología

Población de estudio. Todos los procedimientos fueron aprobados por el Comité Institucional de Cuidado y Uso de Animales de la Universidad Estatal de Carolina del Norte (NCSU, por sus siglas en inglés), protocolo número 21-303. Se utilizaron perros propiedad de clientes que participaban en el estudio longitudinal de neuroenvejecimiento en la Facultad de Medicina Veterinaria de la NCSU. Todos los propietarios revisaron y firmaron un formulario de consentimiento informado antes de la participación. Para ser incluidos, los perros debían tener una edad superior al 75 % de su esperanza de vida esperada, que considera la altura y el peso del animal y puede aplicarse incluso en perros mestizos. Además, debían estar libres de comorbilidades que pudieran impedir su capacidad para realizar pruebas cognitivas (como la imposibilidad de caminar o ceguera). Se recopilaron datos demográficos y se realizaron exámenes físicos, ortopédicos y neurológicos en todos los perros. Se midió la altura hasta la parte dorsal de la escápula (cruz)

y el peso corporal para calcular la esperanza de vida esperada. También se realizaron análisis de orina, panel bioquímico y hemograma completo para descartar comorbilidades potenciales. Veintiocho perros [13, 251, 57 años (rango: 10, 4–16, 2) fueron incluidos en este estudio. Su esperanza de vida fraccionaria media fue de 1,060,12 (rango: 0,81–1,22). Diecisiete eran hembras castradas y 11 machos castrados. Diecisiete eran perros de raza pura y once mestizos. La raza más representada fue el pit bull terrier con cuatro perros, seguido del Labrador retriever con dos perros. También hubo un perro de cada una de las siguientes razas: pastor australiano, basset hound, beagle, border collie, braco de Bretaña, dachshund, pointer alemán de pelo corto, golden retriever, pastor alemán, setter irlandés y pomerania.

Estudios polisomnográficos. Los perros fueron sometidos a registros polisomnográficos (PSG) con adquisición simultánea de EEG, EOG, EMG y ECG. Se emplearon cuatro electrodos activos de EEG: $F3$, $F4$, Fz (frontal izquierdo, derecho y línea media, respectivamente) y Cz (vértice) (Figura 1A). La ubicación de los electrodos permitió evaluar corteza frontal y parietal, siendo la frontal especialmente relevante en el deterioro cognitivo. Estos electrodos se referenciaron a Oz , ubicado sobre la protuberancia occipital externa. La señal bipolar de EOG se registró colocando electrodos sobre el arco cigomático izquierdo y derecho, junto al canto lateral de cada ojo ($F7$ y $F8$, respectivamente). Se colocó un electrodo de tierra sobre los músculos temporales izquierdos. Para EMG, se obtuvo señal bipolar mediante dos electrodos sobre los músculos dorsales del cuello, izquierdo y derecho. Finalmente, un electrodo sobre el quinto espacio intercostal, referenciado a Cz , permitió registrar el ECG. Se emplearon electrodos recubiertos en oro (Genuine Grass 10 mm Gold Cup, Natus Medical Inc), fijados a la piel con crema para electrodos SAC2 (Cadwell Laboratories) tras aplicar preparación cutánea y solución para electrodos (Signa Spray, Parker Laboratories). Los registros se realizaron con el software Cadwell Easy II (Cadwell Laboratories). La impedancia de los electrodos se verificó que estuviera por debajo de $20\text{ k}\Omega$ antes de comenzar la grabación. La frecuencia de muestreo fue de 400 Hz y todas las señales se filtraron en banda pasante entre $0,53$ y 70 Hz ; se aplicó además un filtro notch durante la adquisición para eliminar el ruido de línea a 60 Hz . Los registros se llevaron a cabo en un ambiente silencioso, con luz tenue y ruido blanco reproducido mediante computadora (Figura 1B). La temperatura de la sala se

mantuvo en 20 °C. Los propietarios trajeron a los perros en dos días distintos: un día de adaptación, para minimizar el “efecto de la primera noche” [36], y el día de registro. Este efecto se refiere a que la primera vez que un sujeto duerme en un entorno nuevo o bajo monitoreo (como el laboratorio o con electrodos), su sueño suele ser más fragmentado, superficial o menos representativo de su patrón habitual. Durante el día de adaptación, los perros se familiarizaron con el entorno y los electrodos, de modo que el registro del día siguiente reflejara un sueño más natural y representativo. Se indicó que llevaran la cama o mantas habituales de los perros para mayor comodidad. Durante el día de adaptación se realizó un registro de 30 minutos para que el perro se familiarizara con el entorno y el equipo. El día de prueba, la sesión de PSG tuvo una duración de 2 horas, iniciando entre las 12:30 y 13:30, horario en el cual los perros suelen realizar siestas. En casos de ansiedad o intento de abandonar la sala, se interrumpió la grabación antes de las 2 horas. El intervalo entre el día de adaptación y el registro nunca superó las 2 semanas; entre ambos días se realizaron las pruebas cognitivas. Los estados de vigilia, somnolencia, sueño NREM y REM fueron puntuados manualmente en épocas de 3 s utilizando el software Spike 2 (Cambridge Electronic Design) (Figura 1C). La vigilia se caracterizó por actividad rápida en el EEG, alta actividad EMG y movimientos oculares frecuentes de alta amplitud. La somnolencia mostró actividad EEG similar a la vigilia, menor pero observable actividad muscular y movimientos oculares reducidos en frecuencia y amplitud. El sueño NREM se identificó por oscilaciones neuronales de baja frecuencia y alta amplitud, principalmente en la banda delta, con actividad muscular significativamente reducida y movimientos oculares ausentes o esporádicos. El sueño REM presentó actividad EEG de alta frecuencia, ausencia de actividad muscular y movimientos oculares rápidos frecuentes, observables también como artefactos en el EEG. Se calcularon la latencia para entrar en somnolencia, NREM y REM, así como el porcentaje del tiempo total de grabación dedicado a cada estado conductual. Además, se estimó la eficiencia del sueño sumando el tiempo en NREM y REM y dividiéndolo por el tiempo total registrado.

Preprocesamiento de las señales EEG. Las señales crudas de EEG provenientes de los cuatro electrodos fueron exportadas desde Spike 2 a MATLAB (versión 2022b; The MathWorks Inc). Se seleccionaron todas las épocas libres de artefactos y sin transiciones para los análisis cuantitativos. El primer paso consistió en el preprocesamiento de las

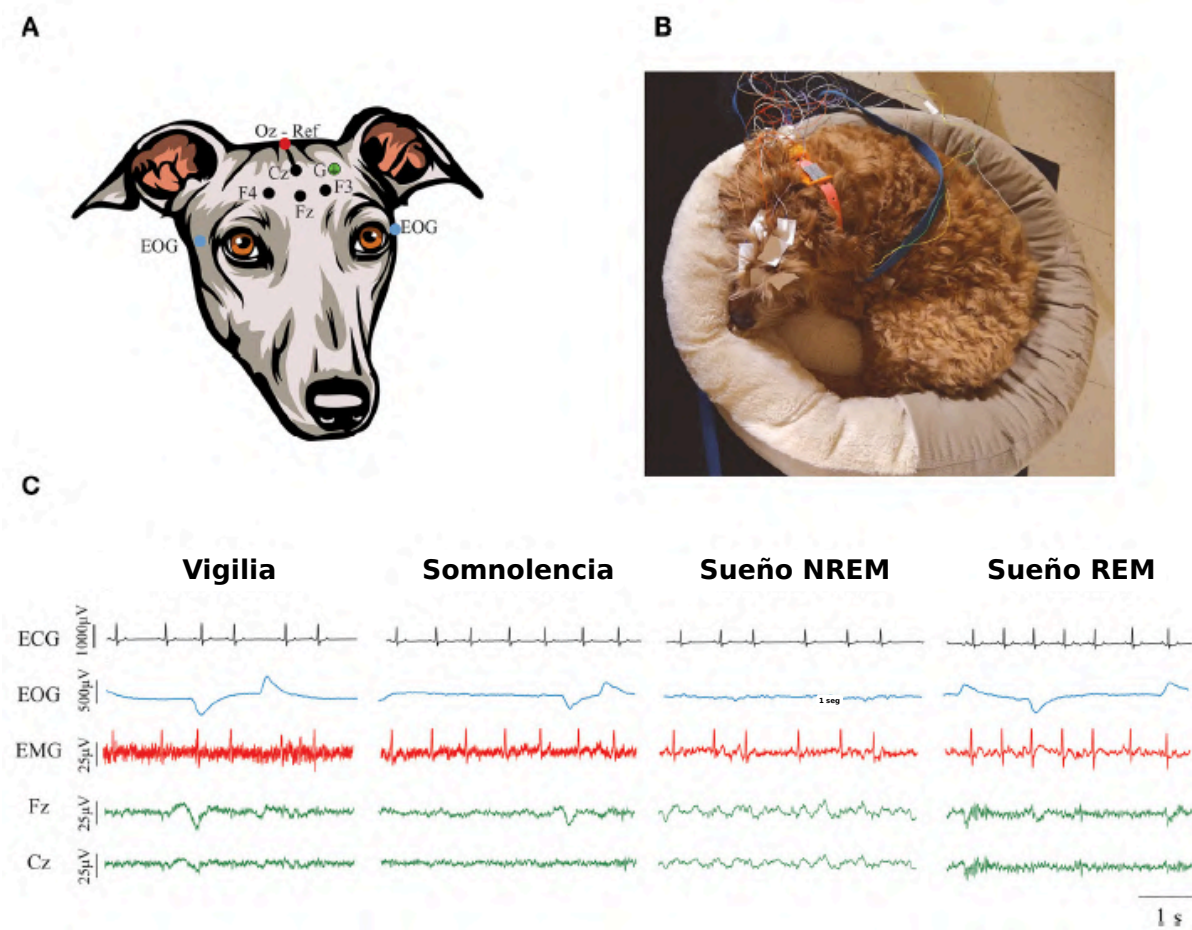


FIGURA 1. (A) Ubicación de los electrodos. Se colocaron cuatro electrodos activos de EEG sobre la línea media y las áreas frontal izquierda y derecha (Fz, F3 y F4, respectivamente), además del vértex (Cz). Estos electrodos se representan con un punto negro. El electrodo de referencia se colocó sobre la protuberancia occipital externa (Oz; punto rojo). La señal de EOG bipolar se registró mediante dos electrodos ubicados en el arco cigomático izquierdo y derecho, junto al canto lateral de cada ojo (puntos azules). El electrodo de tierra (G) se colocó sobre los músculos temporales izquierdos (punto verde). EMG y ECG también fueron registrados, aunque no se muestran en la figura. (B) Perro durante un registro polisomnográfico utilizando su propia cama. (C) Señales representativas de ECG, EOG, EMG y EEG durante vigilia, somnolencia, sueño NREM y sueño REM. Se observa contaminación del ECG en la señal de EMG.

señales, aplicando un filtro pasa banda entre 1 y 70 Hz, junto con un filtro notch a 60 Hz para eliminar el ruido de la red eléctrica. Los estados de sueño—somnolencia, sueño NREM y sueño REM—fueron puntuados manualmente en épocas de 3 segundos, siguiendo la práctica establecida en polisomnografía canina. Se eligieron épocas cortas por

dos razones: (i) los perros no estaban sedados (en el 100 % de los casos) y con frecuencia generaban artefactos por movimiento o actividad muscular, los cuales son más fáciles de detectar y excluir en segmentos más breves; y (ii) las transiciones entre estados de vigilia ocurren más rápidamente en perros que en humanos, por lo que una resolución temporal más fina mejora la identificación de los estados NREM y REM.

10.3. Análisis de datos

10.3.1. Densidad Espectral de Potencia (PSD).

Preparación de los datos. La densidad espectral de potencia (PSD) se utilizó para cuantificar la contribución relativa de las diferentes frecuencias presentes en la señal EEG. Para cada sujeto y cada estado de sueño, se seleccionaron aleatoriamente un número mínimo de épocas libres de artefactos a partir de los registros preprocesados. Cada señal fue previamente filtrada mediante un filtro pasabanda Butterworth de quinto orden, con frecuencias de corte entre 0,5 y 45 Hz y una frecuencia de muestreo de 400 Hz , lo que permitió eliminar componentes de baja y alta frecuencia no deseadas y preservar el rango de interés para el análisis del sueño.

Posteriormente, se calculó la densidad espectral de potencia (PSD) utilizando el método de Welch [37], implementado en la función `scipy.signal.welch` de la biblioteca *SciPy* [38], con ventanas de 1 segundo y un 50 % de solapamiento, asegurando una resolución de frecuencia de 0,25 Hz en el rango de 0,5 a 50 Hz . La potencia total de cada época se obtuvo sumando los valores de todas las divisiones discretas del espectro, denominadas **bins de frecuencia**, y a partir de ella se calculó la PSD relativa ($rPSD$) dividiendo la potencia de cada bin por la potencia total de la señal. Los resultados se organizaron en matrices donde cada columna correspondía a una época y cada fila a un bin de frecuencia. Esta estructura permitió calcular la PSD promedio por canal y por estado de sueño, garantizando comparaciones consistentes entre diferentes estados, sujetos o condiciones experimentales. La normalización mediante PSD relativa asegura que las diferencias observadas reflejen cambios en la distribución espectral de la señal y no simples variaciones globales de amplitud.

Análisis estadístico. Los valores de PSD relativa obtenidos para cada estado fueron utilizados para los análisis comparativos entre grupos independientes. Dado que los sujetos pertenecen a grupos distintos y no existen observaciones pareadas, se aplicó la prueba

de Mann–Whitney para dos muestras independientes (detallada en el Capítulo 9). Los resultados de estos análisis se presentan en la Figura 2, donde se muestra el PSD promedio por canales y se indican mediante sombreado las bandas de frecuencia en las que se encontraron diferencias significativas.

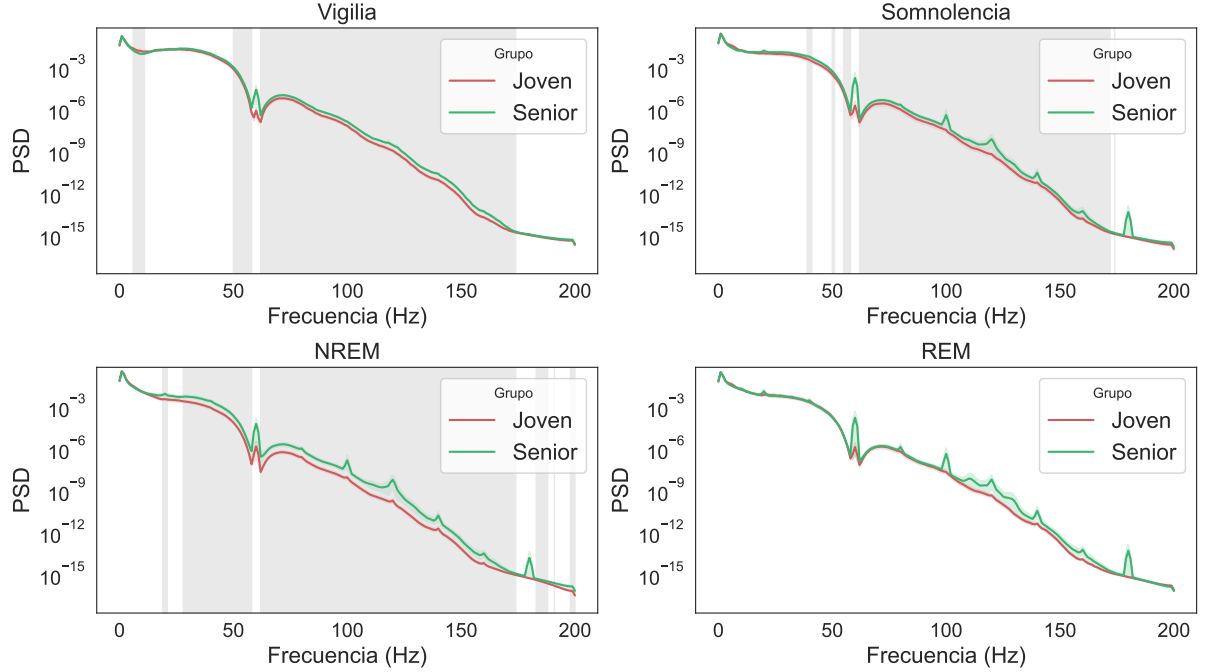


FIGURA 2. PSD promedio a través de los canales en cada estado. Las regiones sombreadas indican los rangos de frecuencia donde se observaron diferencias significativas entre los grupos.

Conclusiones preliminares. En vigilia, los valores de PSD relativo fueron ligeramente mayores en el grupo de perros senior en comparación con los jóvenes, especialmente en las frecuencias bajas. El análisis estadístico mostró diferencias significativas en este rango, lo que sugiere una mayor potencia espectral en los animales de más edad durante el estado de alerta. Durante la somnolencia, las diferencias entre grupos se atenuaron, aunque se observaron cambios significativos en algunas frecuencias bajas y medias, indicando que las variaciones asociadas a la edad siguen presentes, pero de manera más limitada. En el sueño NREM, los perros jóvenes mostraron una leve reducción general del PSD relativo en comparación con los senior, con diferencias estadísticamente significativas en un amplio rango de frecuencias bajas y medias. Esto podría reflejar diferencias en la profundidad o estabilidad del sueño entre grupos etarios. En cambio, en el sueño REM no se registraron diferencias significativas en la mayoría de las frecuencias. Solo se observaron cambios

puntuales en un rango limitado, lo que sugiere que la edad no ejerce un efecto claro sobre la actividad oscilatoria en esta etapa.

10.3.2. Complejidad de Lempel-Ziv (LZC).

Preparación de los datos. La complejidad de Lempel-Ziv (LZC) se utilizó para cuantificar la irregularidad y diversidad temporal de las señales EEG. Este enfoque permite capturar información sobre la estructura de la señal que no es detectable mediante medidas de potencia espectral, complementando así los análisis de PSD. Para cada sujeto y cada estado de sueño, se seleccionaron épocas libres de artefactos a partir de los registros preprocesados. Cada señal fue previamente filtrada mediante un filtro pasabanda Butterworth de tercer orden, separando dos rangos de frecuencia de interés: bajas frecuencias de 1 a 16 Hz y altas frecuencias de 16 a 60 Hz. Esta segmentación permitió analizar la complejidad en diferentes bandas espectrales relevantes para el sueño. Para cada época y canal, la señal filtrada fue transformada en una secuencia binaria mediante un algoritmo de discretización, y posteriormente se calculó el LZC utilizando el método de Lempel-Ziv binario. Esta métrica asigna valores mayores a señales más irregulares y diversas, y valores menores a señales más predecibles o repetitivas. Los valores de LZC obtenidos por canal y estado fueron promediados para cada sujeto, generando matrices organizadas por épocas y canales, de manera análoga a la estructura utilizada en los análisis de PSD. Los resultados finales se agruparon por estado de sueño y banda de frecuencia, permitiendo comparaciones entre los estados de 'Vigilia', 'Somnolencia', 'NREM' y 'REM'.

Análisis estadístico. Al igual que en el análisis anterior, se aplicó la prueba de Mann–Whitney para dos muestras independientes. Los resultados se presentan en la Figura 3, donde se muestran los valores promedio de LZC por canal y estado de sueño, distinguiendo entre frecuencias bajas $[1 - 16Hz]$ y altas $[16 - 60Hz]$, y destacando con asteriscos la significancia estadística las diferencias entre condiciones experimentales.

Análisis estadístico. Para evaluar diferencias entre condiciones experimentales se aplicó la prueba de Mann–Whitney para dos muestras independientes. Los resultados se presentan en la Figura 3, mostrando los valores promedio de LZC por canal y estado de sueño, con asteriscos que indican las diferencias estadísticamente significativas.

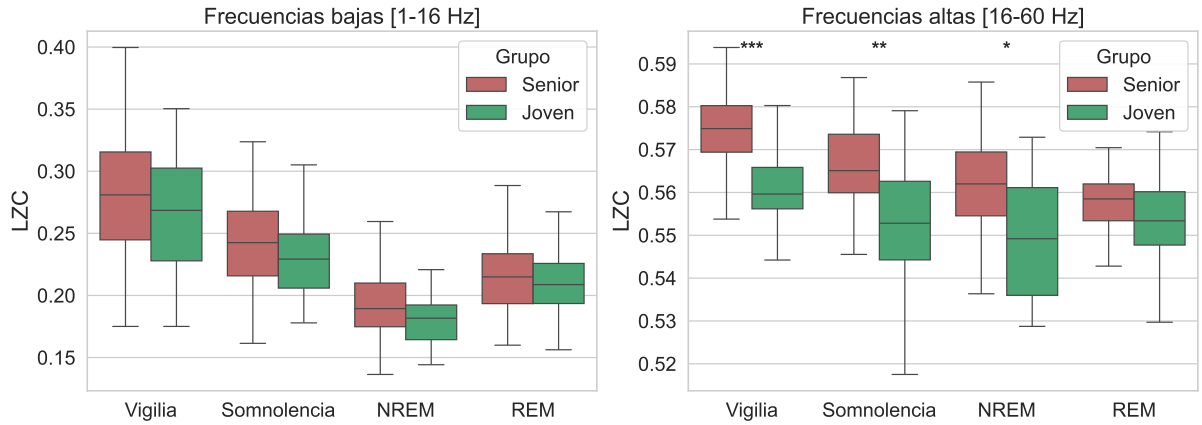


FIGURA 3. Valores de LZC promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos (* $p < 0,05$; ** $p < 0,01$)

Conclusiones preliminares. El análisis de la complejidad (LZC) mostró diferencias entre los grupos Senior y Joven a lo largo de los distintos estados de sueño y frecuencias. Durante la **vigilia**, los valores de LZC en bajas frecuencias no mostraron diferencias significativas entre grupos, mientras que en altas frecuencias el grupo Senior presentó valores significativamente mayores, indicando una mayor complejidad en el grupo Senior. En la **somnolencia**, las bajas frecuencias continuaron sin diferencias significativas, pero en altas frecuencias la complejidad fue también significativamente superior en el grupo Senior. Durante el **NREM**, no se observaron diferencias significativas en bajas frecuencias, mientras que en altas frecuencias el grupo Senior mostró valores levemente mayores con significancia menor. Finalmente, en el **REM** no se detectaron diferencias significativas en ninguna de las bandas de frecuencia, reflejando un patrón más homogéneo entre ambos grupos. En términos generales, los resultados evidencian una disminución progresiva de la complejidad desde vigilia hacia NREM, especialmente en las altas frecuencias, y sugieren que la edad (grupo Senior) se asocia con valores de LZC más elevados, particularmente en frecuencias altas.

10.3.3. Entropía de Permutación (PE).

Preparación de los datos. La entropía de permutación (PE) se utilizó como medida de complejidad de la señal EEG, cuantificando la irregularidad de la serie temporal en cada canal y estado de sueño. Para cada sujeto y cada estado, se seleccionaron épocas preprocesadas, previamente filtradas mediante un filtro pasabanda Butterworth de tercer

orden. Se calcularon dos bandas de interés: frecuencias bajas ($[1 - 16\text{Hz}]$) y frecuencias altas ($[16 - 60]\text{Hz}$), utilizando una frecuencia de muestreo de 400 Hz. La señal filtrada se dividió en vectores de longitud definida, y a partir de ellos se estimó la entropía de permutación para cada época mediante la función `complexity_entropy` del paquete `ordpy` [39]. con parámetros de embedding dimension $dx = 4$ y time lag $taux = 1$, obteniéndose la PE promedio por canal y estado. Los valores de PE resultantes se organizaron en un DataFrame donde cada fila corresponde a un canal en un estado específico de un sujeto, y se registran además la banda de frecuencia analizada, la clasificación del sujeto y el grupo etareo.

Análisis estadístico. Al igual que en los análisis anteriores, para evaluar diferencias entre condiciones experimentales se aplicó la prueba de Mann–Whitney para dos muestras independientes. Los resultados se presentan en la Figura 4, mostrando los valores promedio de LZC por canal y estado de sueño, con asteriscos que indican las diferencias estadísticamente significativas.

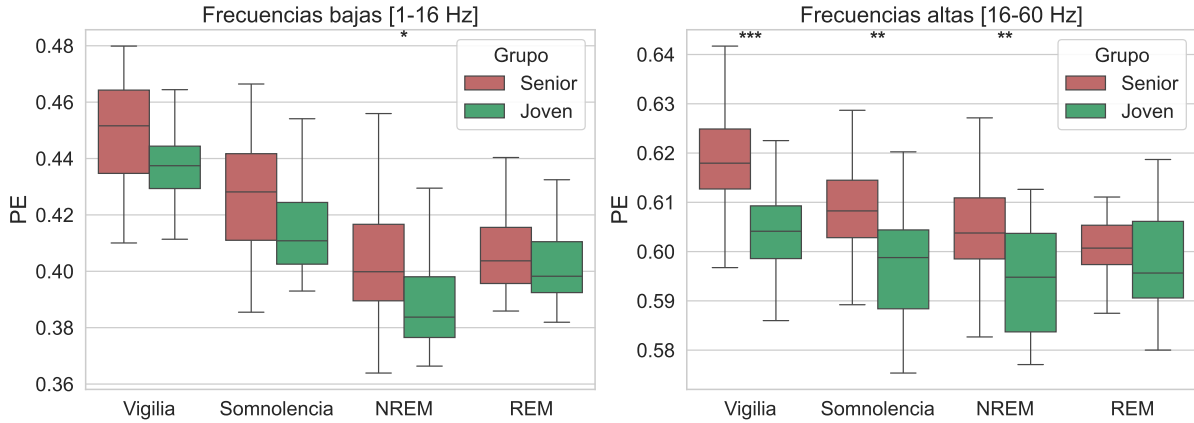


FIGURA 4. Valores de PE promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos.

Conclusiones preliminares. El análisis de la entropía por permutación (PE) mostró diferencias entre los grupos Senior y Joven a lo largo de los distintos estados de sueño y bandas de frecuencia. Durante la **vigilia**, no se observaron diferencias significativas en bajas frecuencias, mientras que en altas frecuencias el grupo Senior presentó valores significativamente mayores, indicando una mayor complejidad temporal de la señal EEG en el grupo Senior. En la **somnolencia**, las bajas frecuencias continuaron sin diferencias significativas, pero en altas frecuencias el grupo Senior mantuvo valores superiores con

significancia menor. Durante el **NREM**, se detectó una diferencia significativa en bajas frecuencias y en altas frecuencias la complejidad fue mayor en el grupo Senior con significancia más fuerte ($p < 0,01$). Finalmente, en el **REM** no se encontraron diferencias significativas en ninguna banda de frecuencia, reflejando un patrón más homogéneo entre ambos grupos.

En términos generales, los resultados evidencian una disminución progresiva de la complejidad medida por *PE* desde *vigilia* hacia *NREM*, especialmente en altas frecuencias. Los efectos se mantuvieron relativamente homogéneos a lo largo de los canales analizados.

10.3.4. Coherencia (Cxy).

Preparación de Datos. Para el análisis de coherencia (Cxy) entre pares de electrodos, se utilizaron las señales preprocesadas de cada sujeto. Para cada época dentro de un estado, se calculó la coherencia espectral utilizando la función `scipy.signal.coherence` con los siguientes parámetros: ventana de 256 muestras (`nperseg=256`), solapamiento de 128 muestras (`noverlap=128`) y transformada rápida de Fourier de tamaño igual a la frecuencia de muestreo (`nfft=fs`). Posteriormente, se promediaron los valores de coherencia a través de todas las épocas para obtener una medida representativa por estado de sueño y por sujeto. Para este estudio, se analizaron específicamente dos pares de electrodos que se consideraron relevantes: el par frontal *F3–F4* y el par medio-frontal *Fz–Cz*. Finalmente, se construyó un **DataFrame** consolidado que contiene, para cada perro y estado de sueño, los valores de coherencia para frecuencias entre 0 y 45 Hz, junto con la información etaria de grupo.

Análisis estadístico. Al igual que en los análisis anteriores, para evaluar diferencias entre condiciones experimentales se aplicó la prueba de Mann–Whitney para dos muestras independientes. Los resultados se presentan en la Figura 5, mostrando los valores promedio por canal y estado de sueño, con asteriscos que indican las diferencias estadísticamente significativas.

10.3.4.1. *Conclusiones preliminares.* Durante **Vigilia**, se observaron diferencias significativas en la coherencia entre grupos etarios en frecuencias bajas a medias (8,5, 11,5 y 19,5 Hz), lo que sugiere variaciones en la sincronización cortical aun en estado de alerta. En **Somnolencia**, las diferencias fueron más amplias y se extendieron a un rango de frecuencias más bajo y alto (3,5–6 Hz y 21,5–26,5 Hz), indicando que el proceso de

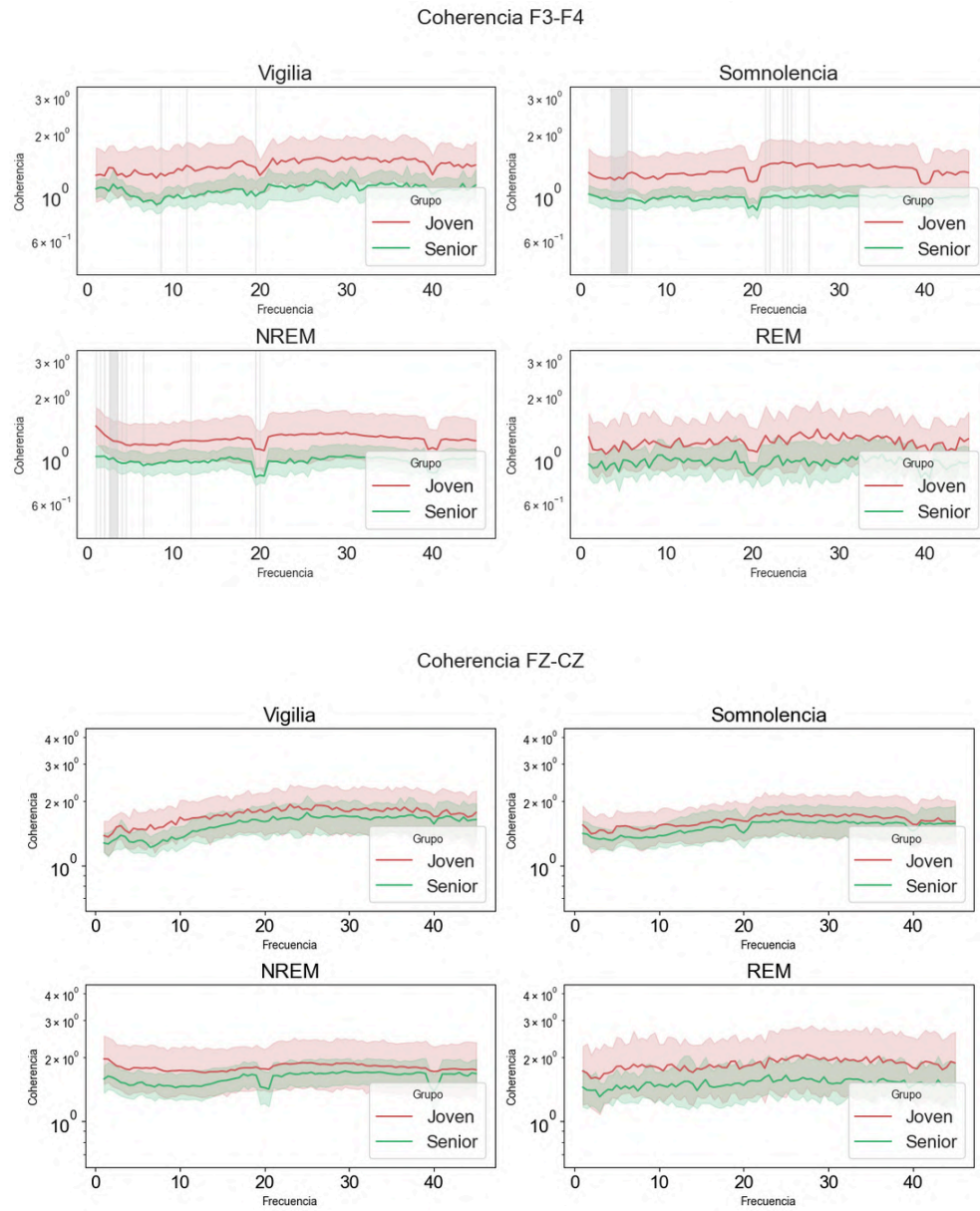


FIGURA 5. Gráficos de coherencia (C_{xy}) de todos los pares de canales en cada estado de sueño. Las áreas sombreadas verticalmente indican los intervalos de frecuencia en los que se encontraron diferencias significativas entre los grupos etarios.

transición hacia el sueño se acompaña de una reorganización más marcada del acoplamiento funcional entre las regiones frontales en los dos grupos etarios. Durante el estado **NREM**, se evidenciaron las diferencias más consistentes, especialmente en frecuencias bajas (1–6.5 Hz) y en bandas medias (12–20 Hz). Esto refleja que las características de

la conectividad cortical durante el sueño profundo difieren de manera sistemática entre jóvenes y adultos mayores, posiblemente vinculadas a cambios fisiológicos asociados al envejecimiento en los mecanismos de sincronización neuronal. Finalmente, durante el **REM**, no se observaron diferencias significativas entre grupos, lo cual sugiere que la dinámica de acoplamiento cortical en el sueño paradójico se mantiene relativamente conservada con la edad. En conjunto, estos resultados indican que las diferencias etarias en la coherencia neuronal son más notorias en los estados de transición y sueño profundo, mientras que en vigilia y sueño *REM* las redes cerebrales presentan patrones de sincronización comparables.

10.4. Discusión general

En este estudio se exploraron las diferencias asociadas al envejecimiento en la dinámica cerebral, evaluando y comparando la Densidad Espectral de Potencia (PSD), la complejidad de Lempel-Ziv (LZC), la entropía de permutación (PE) y la coherencia entre pares de electrodos en individuos jóvenes y mayores. Los resultados obtenidos revelan que el envejecimiento conlleva modificaciones tanto en la organización espectral como en la sincronización funcional del EEG, las cuales dependen del estado de sueño [23, 16].

Los análisis de PSD mostraron una disminución de la potencia en el grupo Senior, especialmente en las bandas bajas y medias, durante los estados de Vigilia, Somnolencia y NREM. Esta reducción de amplitud sugiere una menor sincronización de la actividad cortical lenta, coherente con reportes previos que describen una atenuación de las oscilaciones delta y theta con la edad [40, 41, 18]. Durante el estado REM, las diferencias fueron mínimas, lo que podría reflejar una preservación relativa de la actividad rápida en esta fase o una menor representación de dicho estado en el grupo mayor [22].

Las métricas de complejidad (LZC) evidenciaron valores más altos en el grupo Senior, particularmente durante las etapas de NREM y Somnolencia, indicando una mayor irregularidad o desorganización de los patrones eléctricos cerebrales. Este aumento de la complejidad es consistente con una reducción de la sincronización global y con un procesamiento cortical menos eficiente propio del envejecimiento [42, 35]. En paralelo, la entropía de permutación mostró un patrón similar: mayores valores en el grupo Senior en estados de Vigilia y Somnolencia, sugiriendo una pérdida de estructura temporal en la señal y un incremento de la variabilidad neuronal [43].

Los análisis de coherencia revelaron diferencias específicas según el estado de sueño. Durante la **Vigilia**, se observaron diferencias significativas en frecuencias bajas y medias, reflejando una menor coherencia interhemisférica en los individuos mayores [44, 34]. En **Somnolencia**, las diferencias se extendieron a un rango más amplio, indicando una reorganización de la sincronización funcional en la transición hacia el sueño. Durante el **sueño NREM**, se observaron las diferencias más robustas, principalmente en frecuencias bajas y medias, lo que sugiere una disminución marcada en la conectividad neuronal asociada a la actividad lenta, característica del sueño profundo [18, 45]. En cambio, durante el **REM** no se encontraron diferencias significativas entre grupos, lo que indica que la conectividad rápida parece menos afectada por el envejecimiento.

En conjunto, estos resultados muestran que el envejecimiento modifica la dinámica cortical de manera dependiente del estado de sueño. Los adultos mayores presentan menor potencia en bandas lentas, mayor complejidad y entropía, y una reducción de la coherencia funcional en estados de transición y sueño profundo. Este patrón sugiere una pérdida de sincronización global y una reorganización de las redes neuronales con la edad, compatible con procesos de desacoplamiento funcional y disminución de la eficiencia en la comunicación interregional [23, 19]. En suma, el envejecimiento no sólo altera la amplitud de las oscilaciones corticales, sino también su estructura temporal y su grado de sincronización, reflejando un cambio global en la dinámica cerebral durante el ciclo vigilia-sueño.

Aplicaciones II: Sueño en perros - efectos de la trazodona

El presente capítulo se basa en los resultados publicados en el artículo titulado “Sleep and cognition in aging dogs. A polysomnographic study” [14], un trabajo en conjunto con las doctoras Alejandra Mondino y Natasha J. Olby, del Department of Clinical Sciences, College of Veterinary Medicine, North Carolina State University, Raleigh, NC, United States y con la colaboración del Dr. Pablo Torterolo, del Laboratorio de Sueño de la Universidad de la República (UdelaR), Montevideo, Uruguay.

11.1. Introducción

Como se abordó en el capítulo anterior, el sueño es un proceso biológico esencial que aporta múltiples beneficios para la salud y el correcto funcionamiento del cerebro [46, 47, 48]. Cabe recordar que los perros constituyen un modelo valioso para el estudio del sueño debido a sus similitudes fisiológicas y neurológicas con los humanos [20, 45]. Cualquier alteración en la calidad o cantidad de sueño puede afectar el desempeño cognitivo y el bienestar general, tanto en humanos como en animales [49, 50].

La trazodona es un fármaco ampliamente utilizado en medicina veterinaria con propiedades ansiolíticas, antidepresivas e hipnóticas [51, 52, 53], demostrado efectivo en la mejora de la calidad del sueño y en la reducción de ansiedad en perros [54, 55, 56]. Sin embargo, los mecanismos neuronales subyacentes a sus efectos durante el sueño no han sido completamente caracterizados. Este capítulo se centra en investigar cómo la trazodona modula la dinámica cerebral en perros saludables durante los diferentes estados del sueño.

Para ello, se realizaron registros polisomnográficos (EEG, EMG y EOG) durante períodos de sueño diurno, permitiendo evaluar tanto la arquitectura del sueño como la actividad eléctrica cerebral [32]. Se emplearon los mismos 12 perros jóvenes analizados en el capítulo anterior, y cada sujeto fue sometido tanto a condiciones control como a administración de trazodona en un orden aleatorio, de manera que algunos perros

participaron primero con el fármaco y luego en condición control, y otros en el orden inverso.

Se analizaron cambios en la duración de cada estado de sueño, la densidad espectral de potencia relativa (PSD), la complejidad y aleatoriedad de la señal mediante Lempel-Ziv Complexity (LZC) [7, 57] y Permutation Entropy (PE) [4, 58], así como la conectividad cerebral usando Phase Lag Index (PLI) [3] y coherencia [59]. La hipótesis planteada fue que la trazodona produciría modificaciones en la estructura del ciclo sueño-vigilia, alteraciones en la potencia espectral y cambios en la complejidad y conectividad de la actividad eléctrica cerebral.

Estos análisis permiten comprender mejor los efectos a corto plazo de la trazodona sobre la actividad cerebral durante el sueño y aportan información relevante para su uso clínico en el manejo de trastornos del sueño en perros, con posibles implicancias en la investigación translacional hacia otras especies, incluyendo humanos.

11.2. Sujetos y metodología

Población de estudio. Todos los procedimientos fueron aprobados por el Comité Institucional de Cuidado y Uso de Animales de la Universidad Estatal de Carolina del Norte (NCSU, por sus siglas en inglés), protocolo número 21-303. Se utilizaron perros propiedad de clientes que participaban en el estudio longitudinal de neuroenvejecimiento en la Facultad de Medicina Veterinaria de la NCSU. Todos los propietarios revisaron y firmaron un formulario de consentimiento informado antes de la participación. Doce perros domésticos jóvenes y saludables (edad media $64,4 \pm$ meses), de distintos sexos y razas, participaron en este estudio (peso medio $20,08 \pm 9,1$ kg). Todos los animales fueron evaluados en tres etapas realizadas en días distintos: día de adaptación, registro con trazodona y registro sin trazodona.

Estudios polisomnográficos. Como se detalló en el capítulo anterior, los perros fueron sometidos a registros polisomnográficos (PSG) con adquisición simultánea de EEG, EOG, EMG y ECG. Se emplearon cuatro electrodos activos de EEG: $F3$, $F4$, Fz y Cz (Figura 1A), los registros se llevaron a cabo en un ambiente silencioso, con luz tenue y ruido blanco reproducido mediante computadora (Figura 1B). En este caso, se llevaron a cabo dos sesiones, en días distintos, para registrar datos bajo dos condiciones: sin

medicación y con trazodona. El orden de estas condiciones (con o sin trazodona) se equilibró de manera contrabalanceada. La dosis utilizada del fármaco fue de 5 mg/kg vía oral, correspondiente a la dosis empleada como sedante en perros. Tras la sesión de adaptación, la condición inicial (con o sin fármaco) se asignó de manera aleatoria y, durante la tercera visita, se implementó la condición opuesta. El intervalo entre la sesión de adaptación y los días de registro se mantuvo por debajo de dos semanas. Los estados de vigilia, somnolencia, sueño NREM y REM fueron puntuados manualmente en épocas de 3 s utilizando el software Spike 2 (Cambridge Electronic Design) ((Figura 1C)).

Preprocesamiento de las señales EEG. Las señales crudas de EEG provenientes de los cuatro electrodos fueron exportadas desde Spike 2 a MATLAB (versión 2022b; The MathWorks Inc). Se seleccionaron todas las épocas libres de artefactos y sin transiciones para los análisis cuantitativos. El primer paso consistió en el preprocesamiento de las señales, aplicando un filtro pasa banda entre 1 y 70 Hz, junto con un filtro notch a 60 Hz para eliminar el ruido de la red eléctrica. Los estados de sueño—somnolencia, sueño NREM y sueño REM—fueron puntuados manualmente en épocas de 3 segundos, siguiendo la práctica establecida en polisomnografía canina. Se eligieron épocas cortas por dos razones: (i) los perros no estaban sedados (en el 100 % de los casos) y con frecuencia generaban artefactos por movimiento o actividad muscular, los cuales son más fáciles de detectar y excluir en segmentos más breves; y (ii) las transiciones entre estados de vigilia ocurren más rápidamente en perros que en humanos, por lo que una resolución temporal más fina mejora la identificación de los estados NREM y REM. Para abordar la variabilidad en el número de épocas entre los diferentes estados conductuales, se seleccionaron cinco épocas por estado para asegurar consistencia en el análisis. Esta estrategia permitió mantener uniformidad en el conjunto de datos y facilitar la comparación entre estados en los análisis posteriores. Las épocas fueron elegidas de manera aleatoria para garantizar imparcialidad, y cada época tuvo una longitud de $N_{\text{point}} = 1200$ puntos. Posteriormente, se aplicaron los análisis correspondientes y se calculó el valor promedio de todas las épocas para obtener un único valor representativo por perro.

11.3. Análisis de datos

11.3.1. Densidad Espectral de Potencia (PSD).

Preparación de los datos. Como detallamos en el capítulo anterior, la densidad espectral de potencia (PSD) se utilizó para cuantificar la contribución relativa de las diferentes frecuencias en la señal EEG. Para cada sujeto y cada estado de sueño, se seleccionaron aleatoriamente un número mínimo de épocas libres de artefactos a partir de los registros crudos. Se calculó el PSD utilizando el método de Welch, con ventanas de 1 segundo y 50 % de solapamiento, asegurando una resolución de frecuencia de 0,25 Hz en el rango de 0,5 a 50 Hz. La potencia total de cada época se obtuvo sumando los valores de todas las divisiones discretas en las que se separa el espectro de la señal, llamadas **bins de frecuencia**, y a partir de ella se calculó la PSD relativa ($rPSD$) dividiendo la potencia de cada bin por la potencia total de la señal. Los resultados fueron organizados en matrices donde cada columna representaba una época y cada fila un bin de frecuencia. Esta estructura permitió calcular la PSD promedio por canal y por estado de sueño, garantizando comparaciones consistentes entre diferentes estados, sujetos o condiciones experimentales. La normalización mediante PSD relativa asegura que las diferencias observadas reflejen cambios en la distribución espectral de la señal y no variaciones globales de amplitud.

Análisis estadístico. Los valores de PSD relativa obtenidos para cada estado fueron utilizados para los análisis comparativos. Para los estados de 'Vigilia' y 'Somnolencia' se aplicó la prueba de Wilcoxon para muestras pareadas (WP), dado que todos los sujetos presentaron estos estados en ambas condiciones. En cambio, para los estados de 'NREM' y 'REM', se utilizó la prueba de Mann-Whitney para dos grupos independientes (P) (ambas pruebas están detalladas en el Capítulo 9), ya que algunos sujetos no presentaron estos estados en ambas condiciones, impidiendo un análisis pareado. Los resultados de estos análisis se presentan en la Figura 2, donde se muestra el PSD promedio por canales y se destacan con sombreado las bandas de frecuencia en las que se encontraron diferencias significativas.

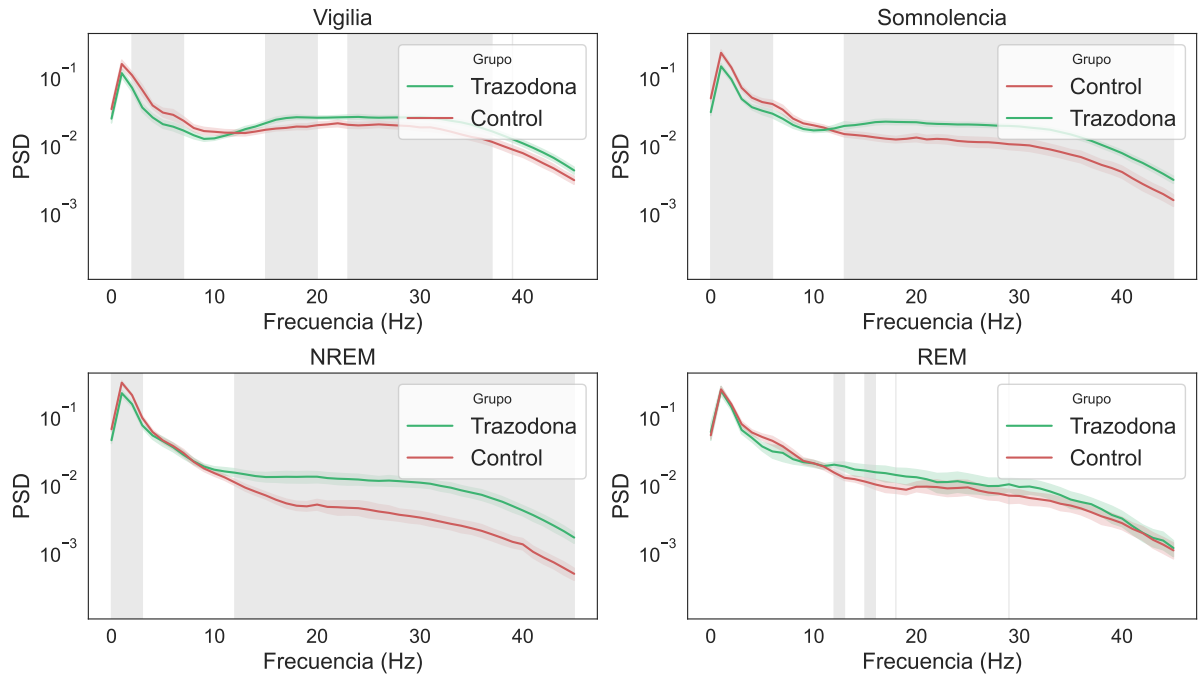


FIGURA 2. PSD promedio a través de los canales en cada estado. Las regiones sombreadas indican los rangos de frecuencia donde se observaron diferencias significativas entre los grupos.

Conclusiones preliminares. En vigilia, los valores de PSD fueron consistentemente mayores en el grupo control en comparación con el grupo bajo el efecto de trazodona, principalmente en frecuencias bajas y medias. El análisis estadístico mostró diferencias significativas en distintos rangos, lo que indica que la trazodona reduce la potencia espectral en este estado. Durante la somnolencia, el grupo con trazodona presentó un marcado descenso del PSD en relación con el control. Las diferencias resultaron significativas en casi todo el espectro, lo que evidencia un fuerte impacto de la medicación sobre la actividad oscilatoria en esta etapa. En el sueño NREM, el PSD también fue menor bajo trazodona, con diferencias estadísticamente significativas desde las frecuencias más bajas y extendidas a un rango amplio. Esto sugiere una reducción global de la potencia espectral en el sueño profundo. En cambio, en el sueño REM no se observaron diferencias significativas en la mayoría de las frecuencias. Solo se registraron cambios puntuales en un rango limitado, lo que indica que la trazodona no altera de manera marcada la actividad espectral en este estado. Sin embargo, estos hallazgos deben interpretarse con cautela, ya que varios sujetos bajo trazodona no alcanzaron esta etapa de sueño. Esto no solo reduce

la confiabilidad de los resultados, sino que también sugiere que la trazodona podría estar interfiriendo con la aparición o el mantenimiento del sueño REM.

11.3.2. Complejidad de Lempel-Ziv (LZC).

Preparación de los datos. La complejidad de Lempel-Ziv (LZC) se utilizó para cuantificar la irregularidad y diversidad temporal de las señales EEG. Este enfoque permite capturar información sobre la estructura de la señal que no es detectable mediante medidas de potencia espectral, complementando así los análisis de PSD. Para cada sujeto y cada estado de sueño, se seleccionaron épocas libres de artefactos a partir de los registros crudos. Cada señal cruda fue previamente filtrada mediante un filtro pasabanda Butterworth de tercer orden, separando dos rangos de frecuencia de interés: bajas frecuencias de 1 a 16 Hz y altas frecuencias de 16 a 60 Hz. Esta segmentación permitió analizar la complejidad en diferentes bandas espectrales relevantes para el sueño. Para cada época y canal, la señal filtrada fue transformada en una secuencia binaria mediante un algoritmo de discretización, y posteriormente se calculó el LZC utilizando el método de Lempel-Ziv binario. Esta métrica asigna valores mayores a señales más irregulares y diversas, y valores menores a señales más predecibles o repetitivas. Los valores de LZC obtenidos por canal y estado fueron promediados para cada sujeto, generando matrices organizadas por épocas y canales, de manera análoga a la estructura utilizada en los análisis de PSD. Los resultados finales se agruparon por estado de sueño y banda de frecuencia, permitiendo comparaciones entre los estados de 'Vigilia', 'Somnolencia', 'NREM' y 'REM'.

Análisis estadístico. Al igual que en el análisis anterior, para los estados de 'Vigilia' y 'Somnolencia' se seleccionó la prueba estadística según la relación entre las muestras. Las bandas de frecuencia bajas y altas fueron analizadas por separado, asegurando que las comparaciones estadísticamente significativas reflejen diferencias específicas en cada rango espectral. Los resultados se presentan en la Figura 3, donde se muestran los valores promedio de LZC por canal y estado de sueño, distinguiendo entre frecuencias bajas $[1 - 16\text{Hz}]$ y altas $[16 - 60\text{Hz}]$, y destacando con asteriscos la significancia estadística las diferencias entre condiciones experimentales.

Conclusiones preliminares. El análisis de la complejidad evidenció una disminución progresiva de los valores tanto en bajas como en altas frecuencias al pasar de vigilia hacia NREM, reflejando la reducción de la complejidad en etapas más profundas del sueño.

Esta tendencia se observó en ambos grupos, aunque con diferencias en la magnitud de los valores: el grupo Trazodona mostró valores de LZC consistentemente más elevados que el grupo Control, especialmente en altas frecuencias. En cuanto a los canales, se mantuvo un patrón relativamente homogéneo, sin un predominio marcado de regiones específicas. No obstante, se identificaron variaciones interindividuales que sugieren la necesidad de un análisis más fino en relación con la topografía y los efectos del fármaco. En conjunto, los resultados apoyan la hipótesis de que la complejidad neuronal disminuye con la profundidad del sueño y que la Trazodona podría modular este descenso, manteniendo un nivel mayor de complejidad en comparación con el grupo Control.

11.3.3. Entropía de Permutación (PE).

Preparación de los datos. La entropía de permutación (PE) se utilizó como medida de complejidad de la señal EEG, cuantificando la irregularidad de la serie temporal en cada canal y estado de sueño. Para cada sujeto y cada estado, se seleccionaron épocas libres de artefactos, previamente filtradas mediante un filtro pasabanda Butterworth de tercer orden. Se calcularon dos bandas de interés: frecuencias bajas ($[1 - 16Hz]$) y frecuencias altas ($[16 - 60]Hz$), utilizando una frecuencia de muestreo de 400 Hz. La señal filtrada se dividió en vectores de longitud definida, y a partir de ellos se estimó la entropía de permutación para cada época mediante la función `complexity_entropy` del paquete `ordpy` [39]. con parámetros de embedding dimension $dx = 4$ y time lag $taux = 1$, obteniéndose la PE promedio por canal y estado. Los valores de PE resultantes se organizaron en un DataFrame donde cada fila corresponde a un canal en un estado específico de un sujeto, y se registran además la banda de frecuencia analizada, la clasificación del sujeto y la condición experimental (con o sin Trazodona).

Análisis estadístico. Al igual que en los análisis anteriores, para los estados de 'Vigilia' y 'Somnolencia' se seleccionó la prueba estadística según la relación entre las muestras. Las bandas de frecuencia bajas y altas fueron analizadas por separado, asegurando que las comparaciones estadísticamente significativas reflejen diferencias específicas en cada rango espectral. Los resultados se presentan en la Figura 4, donde se muestran los valores promedio de LZC por canal y estado de sueño, distinguiendo entre frecuencias bajas $[1 - 16]Hz$ y altas $[16 - 60]Hz$, y destacando con asteriscos la significancia estadística las diferencias entre condiciones experimentales.

Conclusiones preliminares. El análisis de la entropía por permutación evidenció una disminución progresiva de los valores al pasar de vigilia hacia NREM, reflejando la reducción de la complejidad temporal de la señal EEG en etapas más profundas del sueño. Esta tendencia se observó en ambos grupos, aunque con diferencias en la magnitud de los valores: el grupo Trazodona mostró valores de PE consistentemente más elevados que el grupo Control, especialmente en frecuencias altas. En cuanto a los canales, se mantuvo un patrón relativamente homogéneo, sin un predominio marcado de regiones específicas. No obstante, se identificaron variaciones interindividuales que sugieren la necesidad de un análisis más detallado en relación con la topografía y los efectos del fármaco. En conjunto, los resultados apoyan la hipótesis de que la complejidad neuronal medida mediante PE disminuye con la profundidad del sueño y que la Trazodona podría modular este descenso, manteniendo un nivel mayor de complejidad en comparación con el grupo Control.

11.3.4. Coherencia (Cxy).

Preparación de Datos. Para el análisis de coherencia (Cxy) entre pares de electrodos, se utilizaron las señales preprocesadas de cada sujeto. Para cada época dentro de un estado, se calculó la coherencia espectral utilizando la función `scipy.signal.coherence` con los siguientes parámetros: ventana de 256 muestras (`nperseg=256`), solapamiento de 128 muestras (`noverlap=128`) y transformada rápida de Fourier de tamaño igual a la frecuencia de muestreo (`nfft=fs`). Posteriormente, se promediaron los valores de coherencia a través de todas las épocas para obtener una medida representativa por estado de sueño y por sujeto. Finalmente, se construyó un **DataFrame** consolidado que contiene, para cada perro y estado de sueño, los valores de coherencia para frecuencias entre 0 y 50 Hz, junto con la información de grupo (Trazodona o Control).

Análisis estadístico. Al igual que en los análisis anteriores, se seleccionó la prueba estadística según la relación entre las muestras. Los resultados se presentan en la Figura 5, donde se muestran las curvas de coherencia promedio entre todos los pares de canales, por grupo y estado de sueño. Se destacan con sombreado los tramos de frecuencia en los que se observaron diferencias significativas entre los grupos, permitiendo identificar los intervalos espectrales donde la conectividad funcional difiere según el tratamiento.

11.3.4.1. *Conclusiones preliminares.* Durante **Vigilia**, se observaron diferencias de coherencia principalmente en rangos de frecuencia baja a media, con niveles de significancia (tanto * como **), indicando que la administración de Trazodona altera la sincronización de actividad neuronal incluso en estado de alerta. En **Somnolencia**, los efectos fueron más amplios, afectando frecuencias bajas y altas, con predominio de una mayor significancia ** en la mayoría de los rangos, sugiriendo un aumento o reorganización del acoplamiento funcional en este estado intermedio de transición hacia el sueño. Durante **NREM**, se identificaron diferencias robustas y extendidas en casi todo el rango de frecuencias bajas y medias, mayormente con significancia **, lo que refleja que la Trazodona modula de manera consistente la conectividad en fases de sueño profundo. En **REM**, los cambios fueron más discretos, concentrándose en bandas de frecuencia medias, todos con significancia *, indicando efectos menos pronunciados sobre la conectividad en sueño paradójico. En conjunto, estos resultados sugieren que la Trazodona induce modificaciones específicas en la coherencia neuronal según el estado de sueño, afectando principalmente las fases de transición y sueño profundo, mientras que su impacto en REM es más limitado. Estos hallazgos respaldan la hipótesis de que la Trazodona no solo altera la actividad local, sino también la sincronización funcional entre regiones cerebrales durante el ciclo de sueño y se discutirán posteriormente en conjunto con los resultados de los demás análisis con el fin de integrar su interpretación fisiológica y farmacológica en el contexto del efecto de la Trazodona sobre la dinámica cerebral durante el sueño.

Índice de Bloqueo de Fase (PLI).

Preparación de los datos. El PLI se utilizó para cuantificar la conectividad funcional entre los canales de EEG, evaluando la consistencia de la diferencia de fase entre pares de señales. Este índice permite estimar la sincronización neuronal minimizando los efectos de conducción de volumen. Las señales EEG fueron previamente filtradas con un filtro pasabanda Butterworth de tercer orden, con una frecuencia de muestreo de 400 Hz. Se definieron seis bandas de frecuencia de interés: delta ([2 – 4] Hz), theta ([5 – 7] Hz), alfa ([9 – 11] Hz), sigma ([13 – 15] Hz), beta ([19 – 21] Hz) y gamma ([34 – 36] Hz). Para cada animal, canal y estado, se seleccionó un número fijo de épocas libres de artefactos, asegurando comparabilidad entre individuos. A partir de las señales filtradas, se calcularon matrices de conectividad PLI mediante la función `__phase_connectivity_numba`,

obteniendo valores de conectividad para cada par de canales. Además, se generaron 100 realizaciones de datos surrogados para cada condición, con el fin de estimar una distribución nula del PLI y evaluar su significancia. Los resultados se almacenaron en un `DataFrame` donde cada fila corresponde a un sujeto, estado y banda de frecuencia determinados, incluyendo la condición experimental (con o sin Trazodona), el valor promedio de PLI y el valor medio obtenido a partir de los datos surrogados. A partir de estos valores promedio, se generó un procedimiento de consolidación y filtrado de los datos: se generó una nueva matriz de significancia, en la que cada elemento representaba la conectividad únicamente cuando el valor real de PLI superaba al correspondiente valor obtenido en la distribución surrogada. De esta manera, las celdas que no presentaron diferencias respecto a los datos surrogados fueron reemplazadas por cero, lo que permitió conservar exclusivamente las conexiones con evidencia de acoplamiento de fase, listos para el análisis estadístico posterior.

Análisis estadístico. Para evaluar diferencias de conectividad entre los grupos, se aplicó la prueba Wilcoxon Rank-Sum Test para cada conexión y banda de frecuencia, considerando los valores medios de PLI obtenidos en cada estado. Las comparaciones se realizaron entre los grupos Control y Trazodona, evaluando la significancia estadística de las diferencias observadas en cada una de las 16 posibles conexiones entre electrodos. Los resultados se clasificaron según el nivel de significancia estadística: $p < 0,05$ (*) y $p < 0,01$ (**). A partir de este procedimiento se identificaron las conexiones que presentaron diferencias significativas en la fuerza de acoplamiento de fase entre los grupos, lo que permitió determinar patrones específicos de conectividad funcional asociados al uso de Trazodona durante los distintos estados de sueño. Los resultados se presentan en la Figura 6, donde se muestran los grafos de conectividad PLI mostrando únicamente las aristas con diferencias significativas entre grupos en cada estado de sueño y banda de frecuencia representante.

Conclusiones preliminares. Este análisis reveló diferencias significativas entre los grupos en múltiples conexiones y bandas de frecuencia, principalmente durante los estados de somnolencia y sueño NREM. En estos estados, el grupo Trazodona mostró un incremento en la sincronización entre regiones frontales y centrales —particularmente en las conexiones $F3-F4$, $F3-Fz$, $F4-Fz$ y $F4-Cz$ — en varias bandas de frecuencia baja e

intermedia ([2–4] Hz, [5–7] Hz y [9–11] Hz). Este patrón sugiere una mayor coherencia funcional en etapas de transición y sueño ligero bajo el efecto del fármaco. Durante la vigilia, también se observaron diferencias puntuales en las conexiones frontales, lo que podría reflejar una modulación residual del acoplamiento cortical incluso en estados de alerta. En cambio, durante el sueño REM las diferencias fueron escasas y limitadas a la conexión *F4-Cz* en altas frecuencias ([13–15] Hz), aunque la interpretación de este resultado debe tomarse con cautela debido a la baja cantidad de sujetos que alcanzaron este estado bajo trazodona.

11.4. Discusión general

En este estudio, se investigaron los efectos agudos de una dosis única de Trazodona sobre la dinámica cerebral, utilizando Densidad Espectral de Potencia (PSD), métricas de complejidad de Lempel-Ziv (LZC), entropía de permutación (PE), conectividad funcional (PLI) y coherencia entre pares de electrodos. Los resultados muestran que la Trazodona induce cambios específicos y dependientes del estado de sueño en estas métricas, reflejando su influencia sobre la actividad neuronal y la organización del ciclo vigilia-sueño [45].

Los resultados de PSD mostraron una disminución marcada de la potencia en el grupo tratado con Trazodona, especialmente en las bandas de frecuencia bajas y medias, durante los estados de vigilia, somnolencia y sueño NREM. Esta reducción refleja un efecto desincronizante sobre la actividad cortical, coherente con el perfil farmacológico del fármaco como modulador serotoninérgico [60, 61]. En contraste, durante el sueño REM no se observaron diferencias significativas, lo que podría asociarse tanto a la menor ocurrencia de este estado en los animales tratados como a una menor sensibilidad del mismo a la acción aguda de la Trazodona. En conjunto, los hallazgos de PSD sugieren que la Trazodona disminuye la amplitud de las oscilaciones lentas y modifica la organización espectral del EEG de manera dependiente del estado de sueño.

Los análisis de LZC revelaron una disminución significativa en la complejidad del ciclo vigilia-sueño en los animales tratados con Trazodona, especialmente durante la etapa de NREM, lo que sugiere una reducción en la variabilidad de los patrones en la dinámica cerebral [62]. En concordancia, la entropía de permutación promedio por canal mostró diferencias significativas entre grupos durante los estados de Vigilia y Somnolencia, tanto en bandas de frecuencia bajas ([1–16] Hz) como altas ([16–60] Hz). Estas diferencias

reflejan que la Trazodona modifica la complejidad temporal de las señales EEG de manera dependiente del estado y del rango espectral [63], aumentando la irregularidad de los patrones eléctricos en ciertos estados mientras estabiliza otros.

En cuanto a la conectividad, el índice de desfasaje de fase (PLI) evidenció un aumento generalizado en la conectividad funcional en algunos pares de electrodos bajo Trazodona, siendo este efecto específico para ciertos estados y bandas de frecuencia [3, 64]. Los resultados de coherencia mostraron incrementos en la sincronización funcional en NREM y Somnolencia, mientras que en REM los cambios fueron menos evidentes, probablemente debido a la menor cantidad de sujetos que ingresaron a esta etapa. La integración de estos hallazgos sugiere que Trazodona modula la comunicación entre regiones corticales de manera selectiva, fortaleciendo ciertos enlaces mientras reduce la variabilidad de las transiciones en el ciclo vigilia-sueño.

El patrón observado entre PSD, LZC y PE indica una relación inversa: las reducciones en potencia de bandas bajas se acompañan de un aumento en las métricas de complejidad y entropía, mientras que en bandas altas, aunque la potencia puede incrementarse, no se observan cambios significativos en la complejidad [65, 66]. Esto sugiere que Trazodona produce desincronización de las actividades de baja frecuencia y sincronización en las de alta frecuencia, modulando así la dinámica cortical según el estado y la banda espectral.

En resumen, los hallazgos de este estudio muestran que una dosis única de Trazodona altera la dinámica cerebral, promoviendo un sueño más estructurado y menos fragmentado [67, 68]. El fármaco reduce la potencia espectral en bandas bajas y medias, modulando simultáneamente la complejidad y la entropía de las señales EEG, e incrementando la conectividad funcional en pares de electrodos específicos. Estos resultados resaltan la importancia de considerar tanto la frecuencia como el estado de sueño al evaluar los efectos farmacológicos de la Trazodona y proporcionan una base sólida para futuros estudios que analicen los efectos crónicos del fármaco sobre la actividad neuronal en animales.

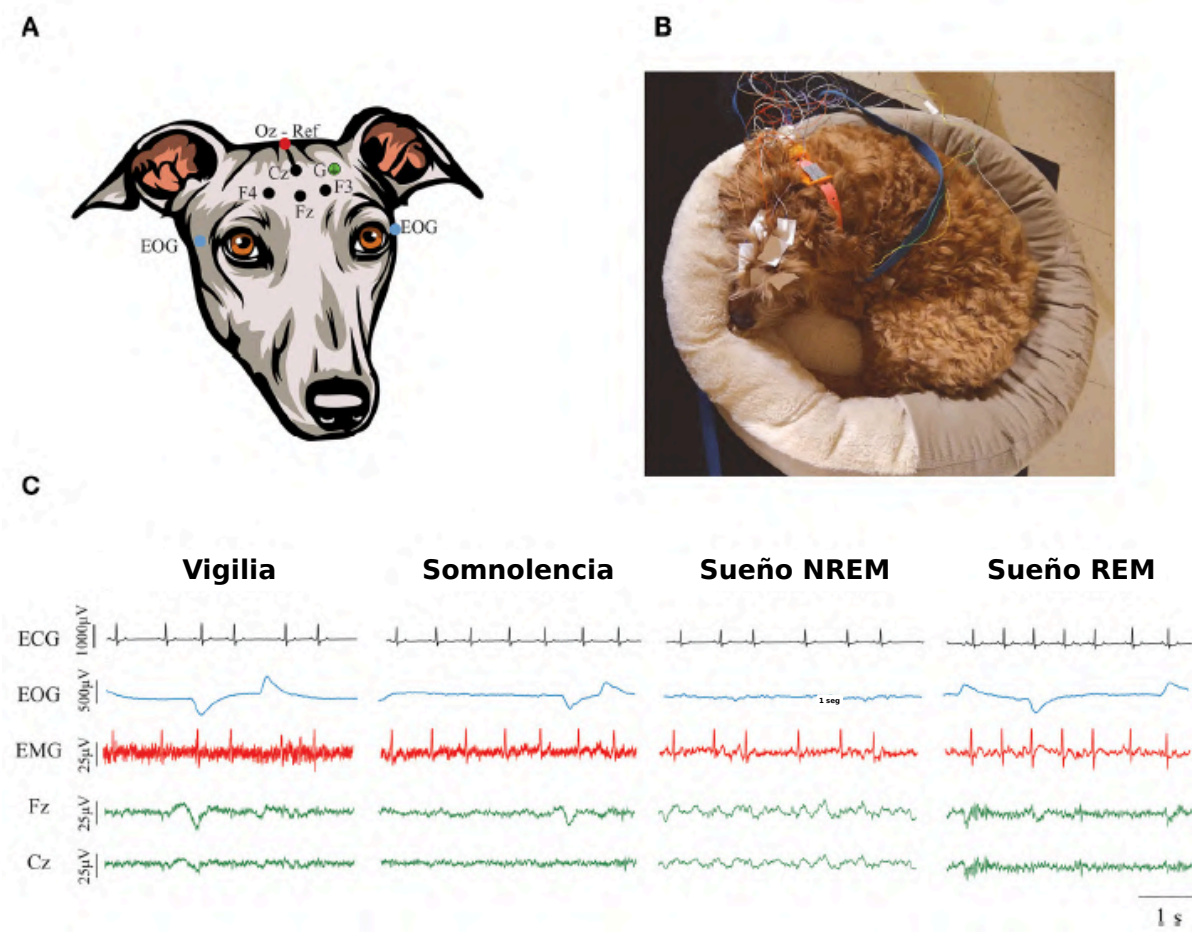


FIGURA 1. (A) Ilustración de la colocación de electrodos para los registros polisomnográficos en perros. Se utilizaron cuatro electrodos activos de EEG ubicados en la línea media y en las regiones frontal izquierda y derecha (Fz, F3 y F4, respectivamente), y en el vértex (Cz). El electrodo de referencia se colocó sobre la protuberancia occipital externa (Oz). Las señales bipolares de EOG se registraron con electrodos ubicados en los arcos cigomáticos izquierdo y derecho, cerca del canto lateral de cada ojo (puntos azules). Se colocó un electrodo de tierra (G) sobre el músculo temporal izquierdo. También se realizaron registros de EMG y ECG, aunque no se muestran en la figura.

(B) Fotografía de un perro durante el registro polisomnográfico mientras descansa en su cama.

(C) Señales representativas del estudio polisomnográfico, incluyendo electrocardiograma (ECG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG), que ilustran patrones característicos durante vigilia, somnolencia, sueño NREM y sueño REM.

(D) Dos registros representativos de EEG (canales F3 y F4) correspondientes a un perro en condición control y tras la administración de trazodona, mostrados para los distintos estados conductuales.

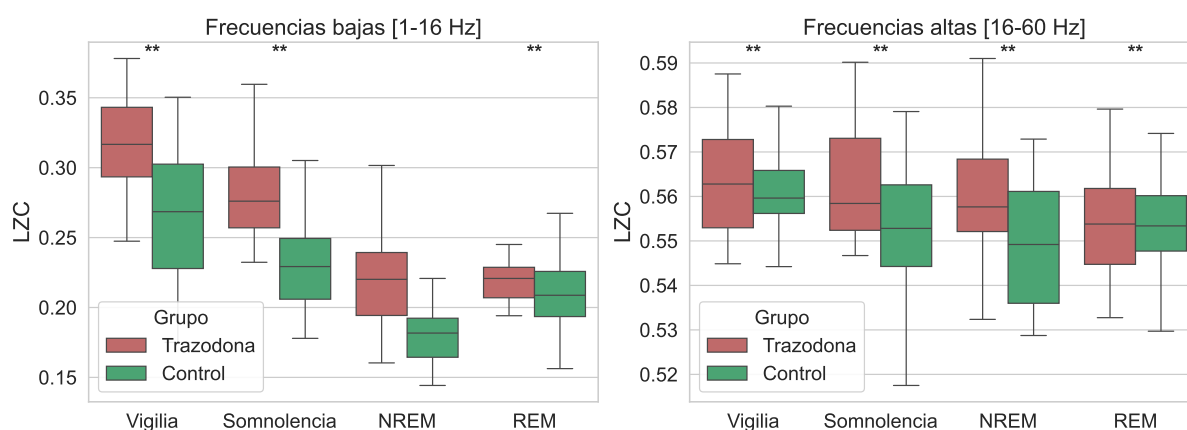


FIGURA 3. Valores de LZC promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos ($* p < 0,05$; $** p < 0,01$)

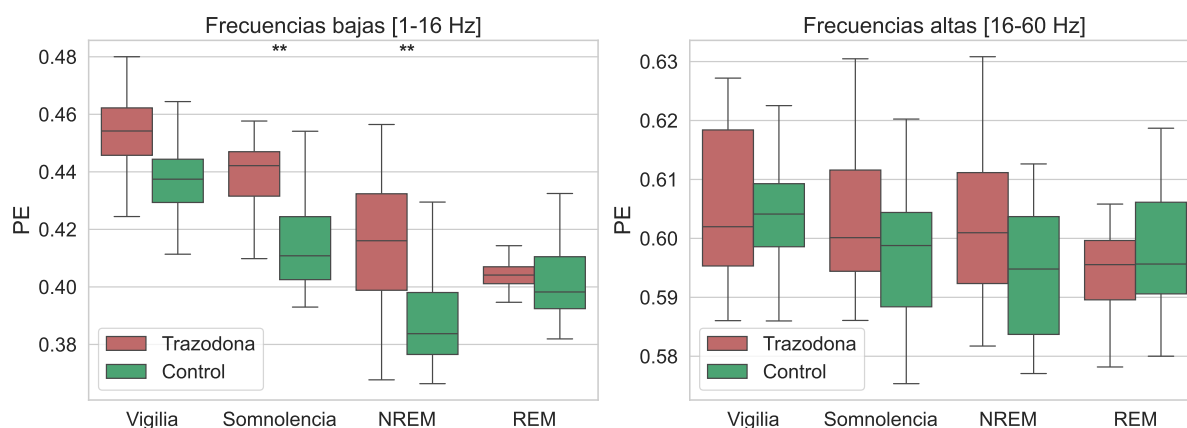


FIGURA 4. Valores de PE promedio a través de los canales en cada estado de sueño. Los asteriscos sobre las cajas indican en qué estado se encontraron diferencias significativas entre los grupos.

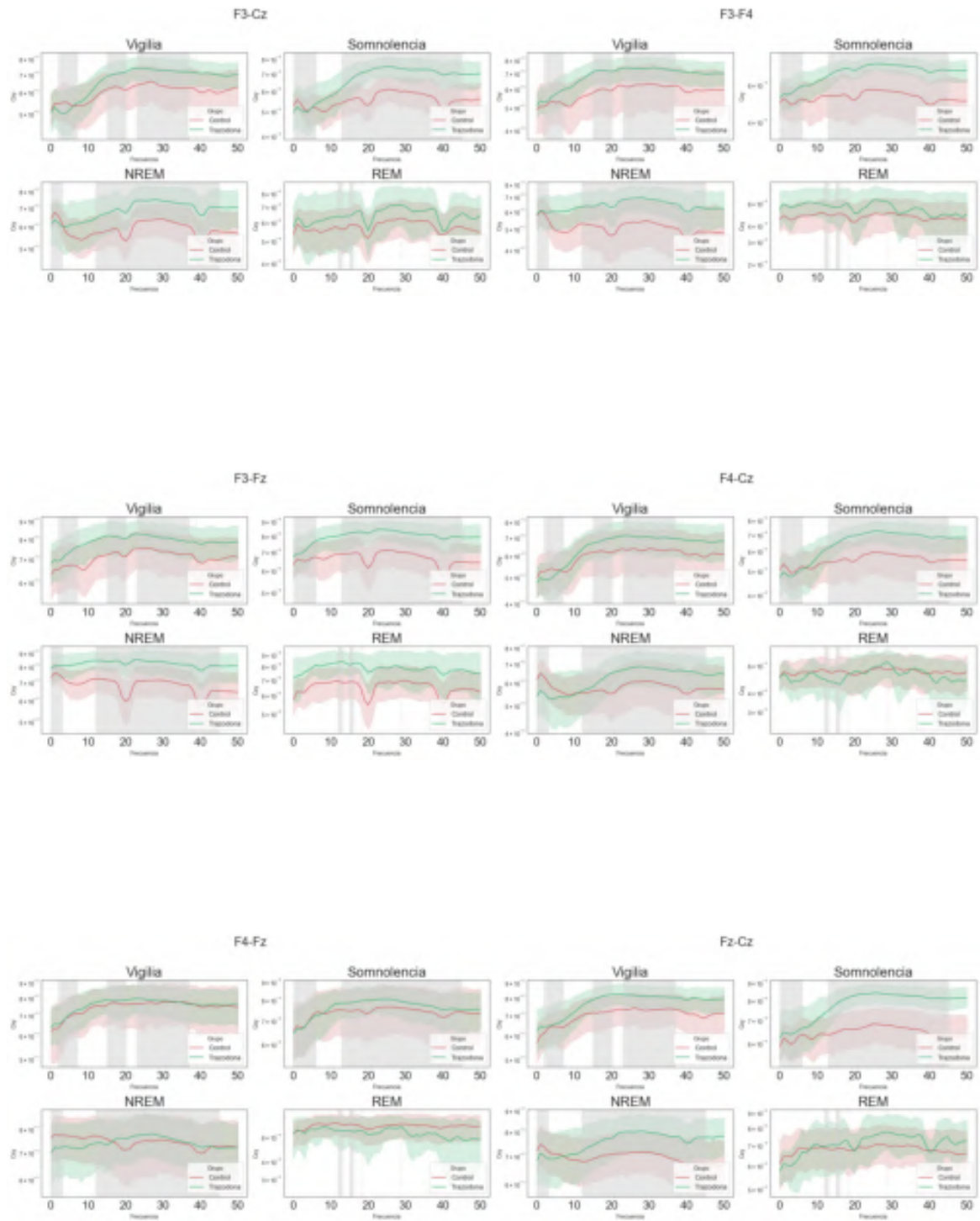


FIGURA 5. Gráficos de coherencia (C_{xy}) de todos los pares de canales en cada estado de sueño. Las áreas sombreadas verticalmente indican los intervalos de frecuencia en los que se encontraron diferencias significativas entre los grupos (Trazodona vs. Control).

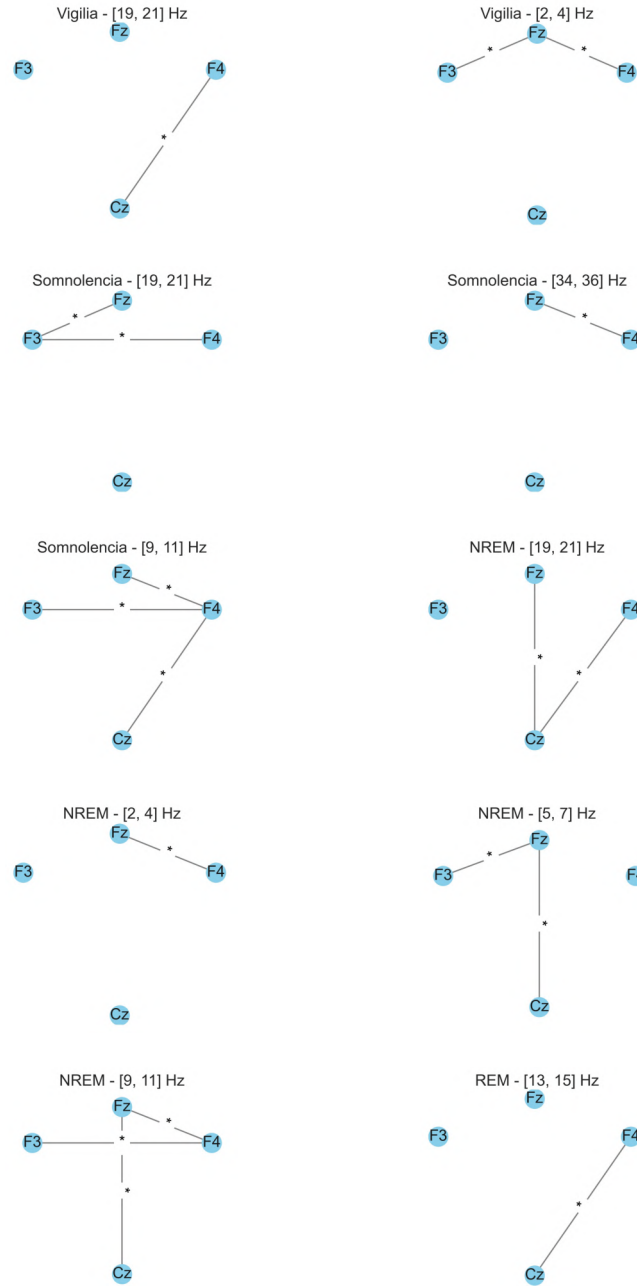


FIGURA 6. Grafo de conectividad PLI mostrando únicamente las aristas con diferencias significativas entre grupos (Control vs. Trazodona) en cada estado de sueño y banda de frecuencia. Los resultados se clasificaron según el nivel de significancia estadística: $p < 0,05$ (*) y $p < 0,01$ (**)

Aplicaciones III: Creatividad en niños

El presente capítulo se basa en los resultados publicados en el artículo titulado “Exploring the neural basis of creativity: EEG analysis of power spectrum and functional connectivity during creative tasks in school-aged children” [69]. Un trabajo en conjunto con las doctoras Gabriela Krumm y Vanessa Arán Filippetti, del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, y del Centro Interdisciplinario de Investigaciones en Ciencias de la Salud y del Comportamiento (CIICSAC), Universidad Adventista del Plata, Libertador San Martín, Entre Ríos, Argentina.

12.1. Introducción

La creatividad constituye un aspecto fundamental de la cognición humana, especialmente durante la infancia, etapa en la que el pensamiento divergente y la capacidad de generar ideas novedosas experimentan un marcado desarrollo [70]. Se define por la habilidad de producir soluciones originales, ver las cosas desde perspectivas diferentes y combinar conceptos previamente no relacionados de manera innovadora [71]. A lo largo de la historia, la creatividad ha sido estudiada desde perspectivas sociales, psicológicas, cognitivas e históricas, lo que ha dado lugar a múltiples teorías. Sin embargo, los mecanismos cerebrales que subyacen al pensamiento creativo, en particular en niños, aún no han sido completamente dilucidados [72].

La neurociencia cognitiva ha mostrado que la creatividad no corresponde a una facultad unitaria, sino que emerge de la interacción dinámica entre diversas redes neuronales distribuidas en el cerebro [73]. Este enfoque integrador resalta la necesidad de comprender la creatividad como un fenómeno complejo y multidimensional [74]. El uso de la electroencefalografía (EEG) ha permitido caracterizar patrones de actividad neuronal durante

tareas creativas [75]. Estudios previos han documentado cambios significativos en distintas bandas de frecuencia durante tareas que evalúan asociaciones remotas, resolución de problemas, expresión artística o narrativa [76, 77].

En este capítulo, estudiamos la creatividad en población infantil a partir de registros de EEG obtenidos durante la aplicación del *Torrance Test of Creative Thinking* (TTCT) [78], el cual incluye tanto tareas figúrales como verbales. Mientras las primeras evalúan habilidades visoespaciales, las segundas se centran en la expresión lingüística creativa [79]. Esta aproximación complementaria permite obtener una visión más amplia de la creatividad en niños en edad escolar. El objetivo fue explorar los patrones oscilatorios y de sincronización cerebral que acompañan el desempeño creativo, contribuyendo a una comprensión más profunda de los mecanismos cerebrales que sostienen la creatividad durante el desarrollo infantil [80].

12.2. Sujetos y metodología

Población de estudio. La muestra estuvo compuesta por 15 niños/as argentinos de entre 9 y 12 años ($\mu = 10,33$; desvío standard $\sigma = 1,11$) de nivel socioeconómico medio. Los criterios de inclusión fueron: ausencia de antecedentes neurológicos o psiquiátricos, capacidades sensoriales normales o corregidas, escolaridad regular y sin repitencia de grado. Se evaluaron CI, niveles de inatención e hiperactividad-impulsividad, y nivel educativo parental (escala de cinco niveles, de primario a posgrado). La adquisición de datos se realizó en dos sesiones individuales, utilizando el dispositivo Emotiv Epoc+. Los padres otorgaron consentimiento informado y el protocolo fue aprobado por el Comité de Ética de FCS-UAP (Resolución 5,7/2019).

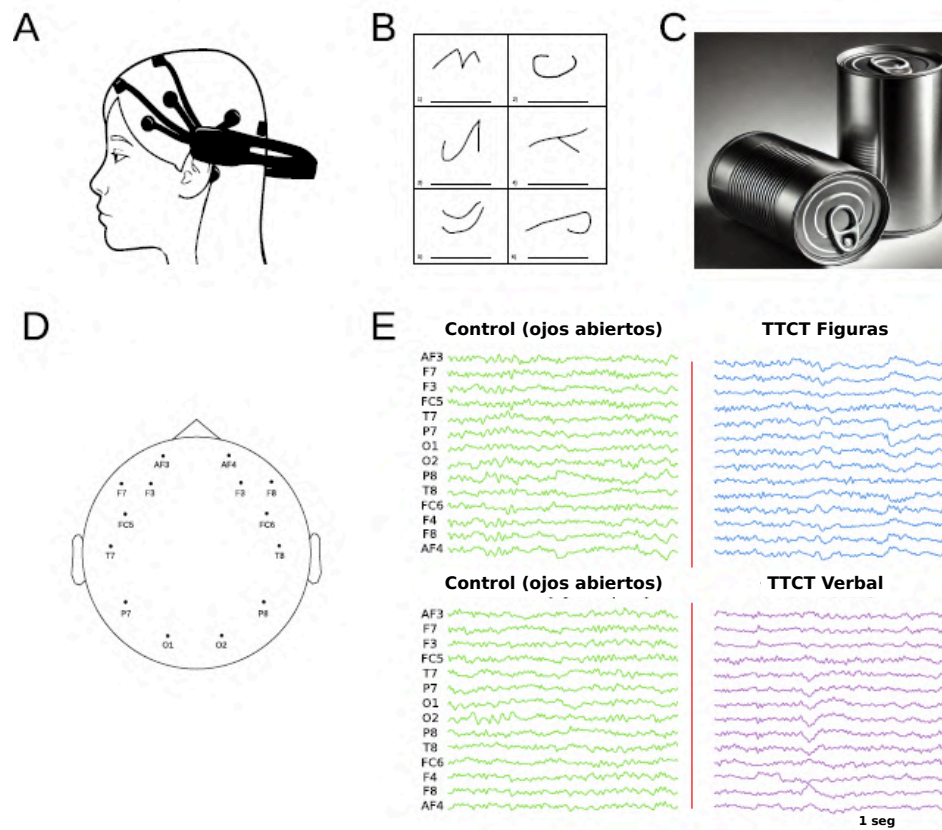


FIGURA 1. Descripción general. (A) Representación del sistema Emotiv. (B) Ejemplo TTCT Figural. (C) Ejemplo TTCT Verbal. (D) Distribución topográfica de electrodos. (E) Señal EEG durante control y tareas.

Registro de EEG. Los datos se obtuvieron con el dispositivo *Emotiv Epoc+* (Figura 1A), con 14 electrodos distribuidos según el sistema internacional 10–20 (*AF3*, *F3*, *F7*, *FC5*, *T7*, *P7*, *O1*, *O2*, *P8*, *T8*, *FC6*, *F8*, *F40* y *AF4*) más dos electrodos de referencia (Figura 1D). La frecuencia de muestreo fue de 128 *Hz*. El registro constó de dos etapas: una primera en condición de reposo con ojos abiertos durante 5 minutos y una segunda correspondiente a la ejecución de las tareas cognitivas durante aproximadamente 15 minutos (Figura 1E).

Tareas cognitivas.

TTCT Figuras. Esta tarea consiste en completar figuras incompletas y asignarles títulos en un tiempo límite (Figura 1B). Evalúa *elaboración*, *resistencia al cierre prematuro*

y *título abstracto*. Estas dimensiones se agrupan en dos factores correlacionados: **Innovativo** (fluidez y originalidad) y **Adaptativo** (elaboración, resistencia al cierre prematuro y abstracción de títulos).

TTCT Verbal. Esta tarea requiere listar usos inusuales de un objeto durante 10 minutos (Figura ??). Evalúa tres dimensiones: *fluidez* (número de respuestas relevantes), *flexibilidad* (diversidad de categorías) y *originalidad* (novedad de ideas).

Preprocesamiento de las señales EEG. El primer paso consistió en el preprocesamiento de las señales de EEG. Se aplicó un filtro pasabanda en el rango de $[0,5-50]$ Hz , y los canales con mala calidad de señal fueron identificados manualmente y reemplazados mediante un algoritmo de interpolación. Posteriormente, la señal fue segmentada en épocas de 5 segundos. Se realizó una inspección visual de los datos con el fin de identificar y eliminar aquellas épocas afectadas por artefactos de movimiento u otros problemas de adquisición. Un participante fue excluido del análisis debido al excesivo nivel de ruido presente en su registro de EEG. Todas las épocas fueron normalizadas utilizando el método de *z-score*. En promedio, cada participante presentó 20 ± 3 épocas limpias en la línea de base y 52 ± 7 en cada tarea. Posteriormente, se aplicó un análisis de componentes independientes (ICA) con el objetivo de identificar y remover componentes asociados a artefactos miográficos, cardíacos y oculares. Finalmente, las épocas resultantes se categorizaron en dos condiciones principales: línea de base (BL) y desempeño en la tarea (figura o verbal). Todos los análisis se realizaron utilizando el paquete de código abierto MNE-Python [81, 82], desarrollado en Python [83, 84].

12.3. Análisis de datos

12.3.1. Espectro de Potencia (PSD).

Preparación de los datos. El primer análisis se centró en la *Densidad Espectral de Potencia Relativa* (rPSD), con el objetivo de caracterizar la actividad oscilatoria cerebral durante las tareas creativas. La potencia relativa representa la proporción de energía que aporta cada banda de frecuencia respecto de la potencia total del espectro, permitiendo comparar de manera normalizada la actividad oscilatoria entre sujetos, condiciones y canales. Se analizaron las siguientes bandas de frecuencia: Delta $[1-4]$, Hz , Theta $[4-8]$, Hz , Alpha $[8-12]$, Hz , Beta $[12-30]$, Hz y Gamma $[30-50]$, Hz . El cálculo del PSD se realizó

mediante el método de Welch, implementado en SciPy [38], con resolución de 0,25, Hz en todo el rango de 0,5 a 50, Hz . La señal se segmentó en ventanas de 6000 puntos con solapamiento del 50 %, y se aplicó un filtro Butterworth de tercer orden para minimizar efectos de aliasing y artefactos de alta frecuencia. Este procedimiento permitió obtener estimaciones robustas de la potencia relativa por canal y por condición experimental (línea de base, TTCT Figuras y TTCT Verbal).

Análisis estadístico. Para evaluar diferencias en la actividad oscilatoria asociada a la creatividad, los valores de rPSD fueron promediados por banda de frecuencia y por participante. Dado que cada niño fue evaluado en las tres condiciones (línea de base, TTCT Figuras y TTCT Verbal), se aplicó la prueba no paramétrica para medidas repetidas, seguida de comparaciones post hoc mediante la prueba de Wilcoxon con corrección de Bonferroni, cuando correspondió. Este enfoque permite detectar incrementos o decrementos de potencia específicos en bandas de frecuencia asociadas a procesos creativos, sin asumir distribución normal de los datos. Los resultados se presentan en la Figura 2, que incluye mapas topográficos y diagramas de violín de la rPSD por banda y condición. En la columna izquierda se muestran los topoplots promedio para cada banda en los tres grupos (Control, TTCT Figuras y TTCT Verbal), mientras que en la columna derecha se representan los diagramas de violín del PSD promedio a través de los canales. Los niveles de significancia ($p < 0,001$) se indican con asteriscos (* * *).

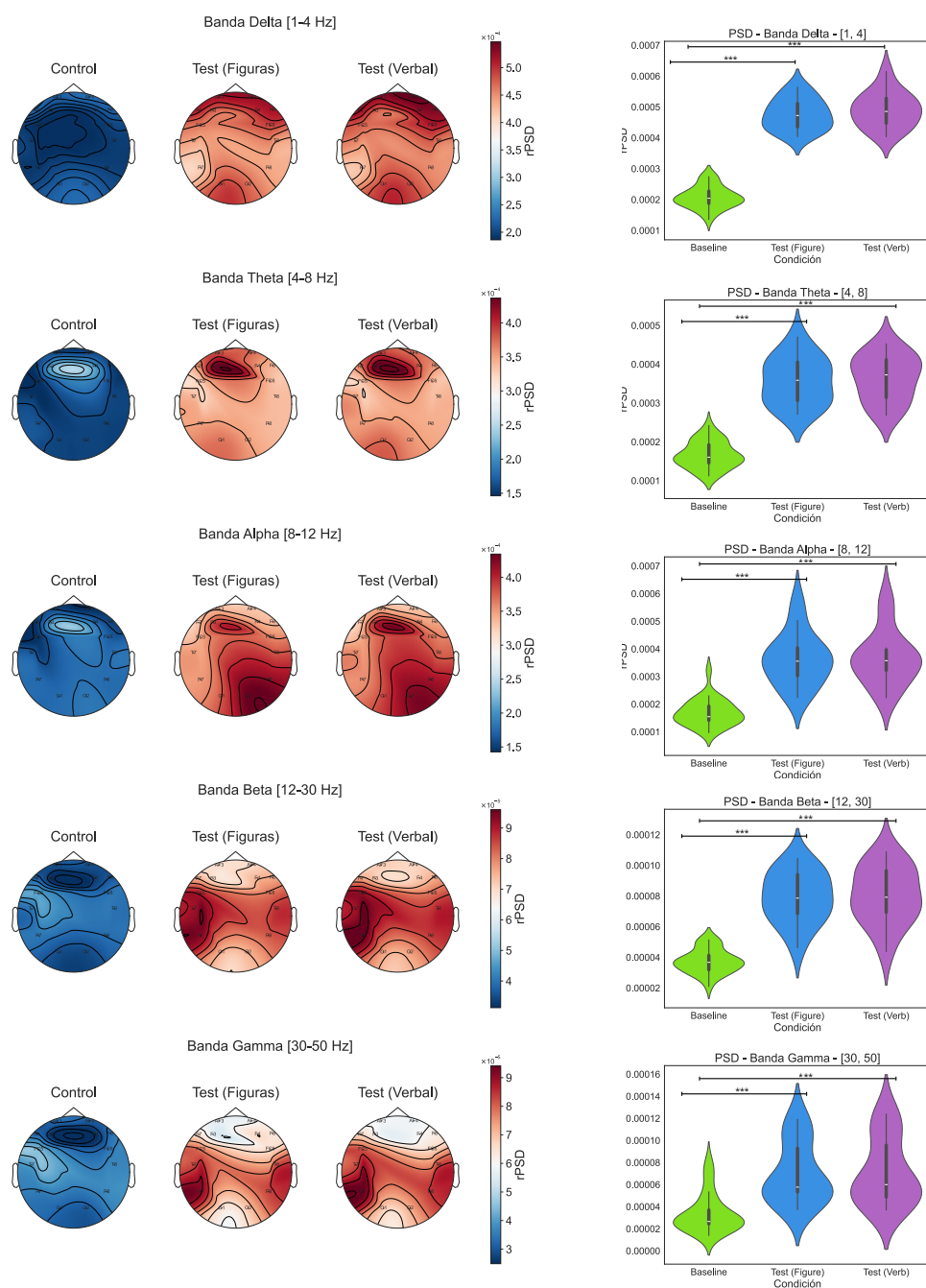


FIGURA 2. Mapas topográficos y diagramas de violín de la rPSD por banda y condición. A la izquierda se muestran los topoplots promedio para cada banda y condición: Grupo Control, TTCT Figuras y TTCT Verbal. A la derecha, los diagramas de violín del PSD promedio a través de los canales. Los niveles de significancia obtenidos ($p < 0,001$) se indican con asteriscos (***)

Conclusiones preliminares. El análisis de la actividad espectral durante las tareas cognitivas reveló cambios consistentes respecto al estado de reposo (Control). En la banda Delta, se observaron incrementos significativos de PSD durante la realización de las tareas en todos los canales, tanto para la tarea verbal como para las figuras, mientras que las comparaciones entre tareas no mostraron diferencias significativas. Esto indica que la activación cortical en frecuencias bajas aumenta con la ejecución de la tarea, independientemente del tipo de estímulo. En la banda Theta, se detectaron aumentos significativos de PSD respecto al grupo Control en la mayoría de los canales, lo que sugiere que la actividad frontal y central se ve potenciada durante el procesamiento cognitivo. Sin embargo, al comparar las tareas entre sí, los resultados no mostraron diferencias significativas, indicando que la modulación de Theta es similar para ambas tareas. La banda Alpha presentó reducciones significativas de PSD en varios canales durante las tareas, especialmente en regiones frontales y occipitales, lo que refleja la típica desinhibición cortical asociada a la atención y la carga cognitiva. Al igual que en las bandas anteriores, no se registraron diferencias significativas entre las tareas verbal y figurativa. En Beta y Gamma, se observaron incrementos locales de PSD durante la ejecución de las tareas, con diferencias significativas respecto al Control en algunos canales frontales y centrales.

12.3.1.1. Coherencia. Los valores de coherencia se calcularon utilizando el método de Welch. El análisis se realizó en Python empleando la función `scipy.signal.coherence`, con una ventana de Hann de 800 *ms* y un solapamiento del 50 %. La coherencia se estimó en el rango de frecuencias de $[2 - 50] \text{ Hz}$ para todos los pares de canales, y posteriormente se agruparon los valores en bandas de frecuencia estándar (Delta, Theta, Alpha, Beta y Gamma). Para cada banda y condición experimental —Grupo control, Test Verbal y Test Figuras— se obtuvo la coherencia promedio considerando todos los *epochs* de cada participante. Finalmente, se representaron los valores medios de coherencia por banda mediante gráficos de líneas, lo que permitió visualizar con claridad las diferencias en los patrones de conectividad funcional entre condiciones. La Figura 3 muestra el análisis de coherencia intrahemisférica e interhemisférica entre canales seleccionados en el rango $[0-50] \text{ Hz}$, con zonas sombreadas donde se observaron diferencias significativas entre las condiciones de prueba y la condición de control ($p < 0.05$; prueba de Kruskal-Wallis con

comparaciones múltiples de Dunn). Dado el elevado número de comparaciones posibles (91 pares), se presenta un conjunto representativo de relaciones.

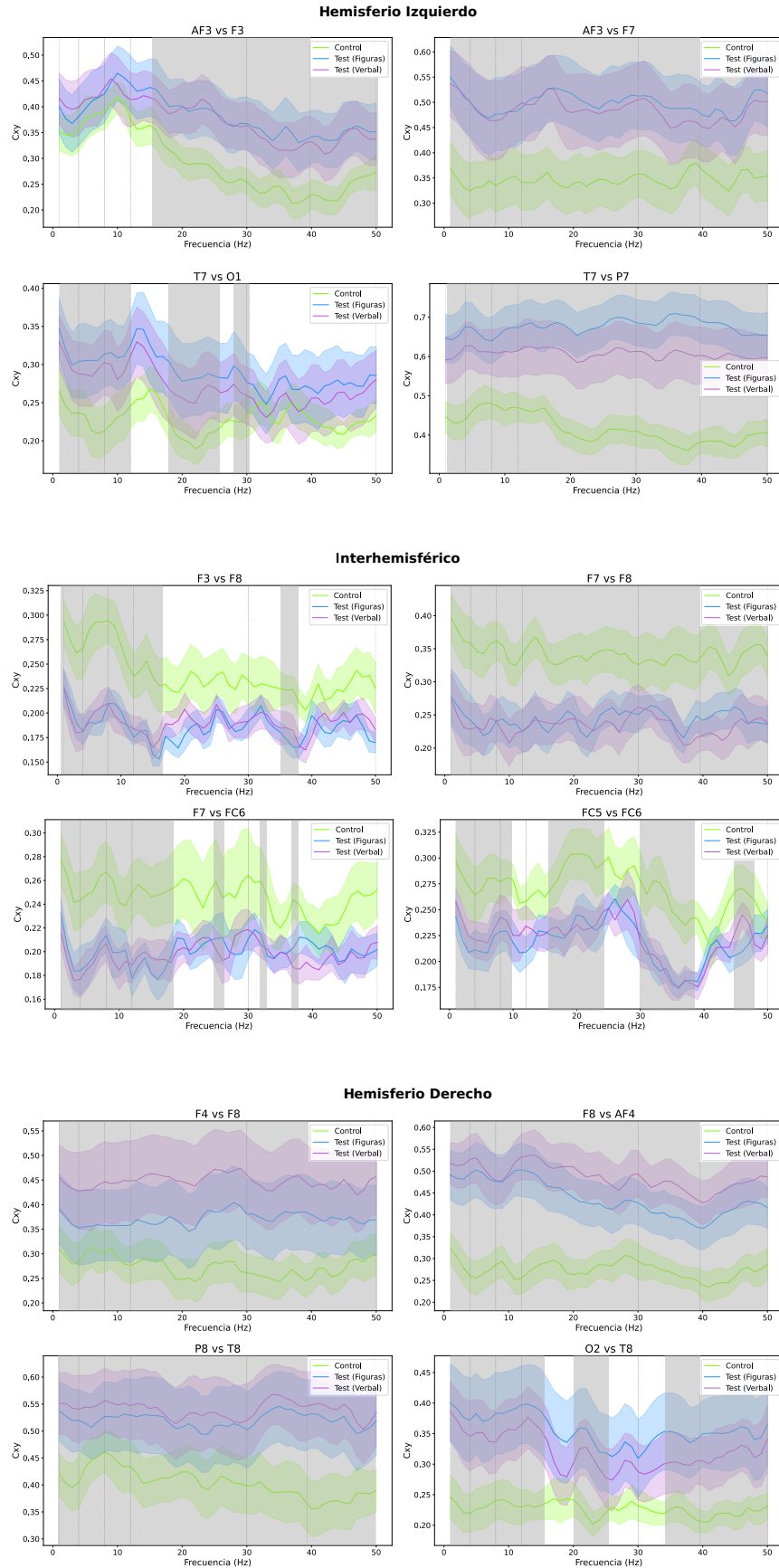


FIGURA 3. Análisis de coherencia intrahemisférica (columnas izquierda y derecha) e interhemisférica (columna central). Cada gráfico muestra la coherencia entre los canales indicados en el rango [0–50] Hz. Las zonas sombreadas indican diferencias significativas entre las condiciones ($p < 0,05$).

Conclusiones preliminares. El análisis de coherencia entre pares de electrodos mostró patrones diferenciales de conectividad funcional tanto a nivel intrahemisférico como interhemisférico. En las conexiones intrahemisféricas, tanto en el hemisferio izquierdo como en el derecho, se observó un incremento marcado de la coherencia durante las tareas (figuras y verbal) en comparación con el estado de control. En el hemisferio izquierdo, los pares frontales ($AF3-F3$) mostraron aumentos significativos en las bandas Beta y Gamma completa, mientras que el par $AF3-F7$ presentó incrementos en todas las bandas de frecuencia. Las conexiones temporo-occipitales ($T7-O1$) evidenciaron aumentos en Delta, Theta, Alpha y gran parte de Beta, y la relación temporo-parietal ($T7-P7$) mostró incrementos generalizados en todas las bandas. Un patrón similar se observó en el hemisferio derecho: los pares frontales ($F4-F8$ y $F8-AF4$) exhibieron aumentos robustos en todas las bandas, al igual que la conexión parieto-temporal ($P8-T8$). La relación temporo-occipital ($O2-T8$) mostró incrementos en Delta, Theta, Alpha, Low-Beta y la mayor parte de Gamma. En contraste, las conexiones interhemisféricas presentaron una tendencia general hacia una disminución de la coherencia durante las tareas. Sin embargo, esta disminución fue estadísticamente significativa únicamente en algunos pares frontales (por ejemplo, $F3-F8$, $F7-F8$, $F7-FC6$, $FC5-FC6$), mientras que en el resto de los pares no se observaron cambios consistentes o significativos.

Discusión general. El análisis de la actividad cortical durante las tareas creativas evidenció un patrón general de aumento en la potencia espectral relativa ($rPSD$) respecto al estado de reposo, consistente con lo reportado previamente en tareas de pensamiento divergente [85, 86, 87, 88, 89]. En las bandas Delta y Theta, el incremento de potencia observado puede interpretarse como un reflejo de una mayor implicación de procesos atencionales internos, memoria de trabajo y recuperación de información, funciones que resultan esenciales para la generación de ideas originales [86, 90].

En la banda Alpha, se observó una reducción de la potencia durante la ejecución de las tareas, especialmente marcada en regiones frontales y occipitales. Esta desincronización alpha ha sido interpretada como un índice de desinhibición cortical, facilitando el procesamiento de información relevante y la supresión de estímulos externos, mecanismos que optimizan el rendimiento creativo [91, 92]. Dicho descenso en Alpha se asocia con

una disminución del control inhibitorio y con un incremento de la flexibilidad cognitiva, favoreciendo la exploración de asociaciones inusuales durante la producción creativa.

Las bandas Beta y Gamma, en cambio, mostraron incrementos focales durante las tareas, particularmente en regiones frontales y centrales, lo que sugiere un mayor involucramiento de procesos de atención sostenida, integración multisensorial y elaboración de la respuesta creativa [88, 89]. En el caso de la tarea verbal, el aumento de Beta y Gamma podría estar vinculado al procesamiento lingüístico y a la manipulación de representaciones semánticas [91, 92].

En relación con la conectividad funcional, el análisis de coherencia reveló un aumento de la sincronización dentro de cada hemisferio, especialmente entre regiones frontotemporales y temporo-occipitales, durante ambas tareas creativas. Este patrón concuerda con lo reportado por [85] y [93], quienes describieron una mayor coordinación funcional entre áreas implicadas en la recuperación de información y la integración perceptual durante la generación de ideas. Según [93], la coherencia incrementada en regiones temporales podría vincularse con procesos asociativos y de memoria, mientras que la observada en zonas occipitales reflejaría una atención interna sostenida y la supresión de la información externa irrelevante.

Además, estudios previos han mostrado que durante la preparación de la tarea creativa existe un flujo de conectividad desde las regiones frontales hacia las temporoparietales, el cual se invierte durante la fase de generación de ideas, indicando un intercambio dinámico entre integración sensorial y producción creativa [94]. Este flujo bidireccional refuerza la idea de que el pensamiento creativo depende no solo de la fuerza de las conexiones, sino también de la dirección del flujo de información entre regiones cerebrales.

De manera complementaria, se observó una disminución en la coherencia interhemisférica, particularmente en la región frontal, lo que sugiere una reducción temporal del control ejecutivo durante la generación creativa [95]. Este patrón podría reflejar un mecanismo neural que facilita la creatividad al disminuir la rigidez cognitiva y permitir una mayor flexibilidad mental. Según [95], un estado mental menos controlado y más libre de restricciones ejecutivas puede potenciar la generación de ideas originales.

Estos resultados se alinean con la concepción contemporánea de la creatividad como un proceso que emerge de la interacción dinámica entre redes cerebrales distribuidas

—incluyendo la red por defecto, la red ejecutiva central y la red de saliencia— que alternan su predominancia según la fase del proceso creativo [96, 97]. Tal reorganización funcional, evidenciada tanto en los patrones de potencia como en las medidas de coherencia, respalda la noción de que la creatividad involucra la cooperación de múltiples sistemas neuronales encargados de la atención, la memoria, la imaginación y el control cognitivo.

En conjunto, los hallazgos del presente estudio aportan evidencia sobre la compleja dinámica cerebral subyacente al pensamiento creativo en niños, destacando el papel coordinado de distintas bandas de frecuencia y la reorganización de la conectividad intra e interhemisférica durante la ejecución de tareas divergentes. Estos resultados complementan observaciones previas [85, 93] y refuerzan la idea de que la creatividad infantil implica la interacción flexible entre regiones frontales, temporales y occipitales, favoreciendo la integración de información y la generación de ideas novedosas.

Aplicaciones VI: Estudio de los ciclos de sueño en recién nacidos prematuros

El presente capítulo se basa en los resultados obtenidos hasta el momento en el marco de un estudio observacional prospectivo en curso, titulado “Maduración del ciclo sueño-vigilia y complejidad EEG en recién nacidos pretérmino”, llevado a cabo en la Unidad de Cuidados Intensivos Neonatales (NICU) del Hospital de Clínicas, Montevideo, Uruguay, entre noviembre de 2019 y marzo de 2024. Este estudio se realiza bajo la coordinación de la Universidad de la República, Facultad de Medicina, y cuenta con la aprobación ética del Comité de Ética en Investigación Clínica del Hospital de Clínicas, Facultad de Medicina, Universidad de la República, Uruguay. Los investigadores principales son los doctores Andrea Devera Pereyra, Pablo Torterolo y Fernanda Blasina Viera, todos afiliados a la Universidad de la República, Facultad de Medicina, y Hospital de Clínicas, Montevideo, Uruguay.

13.1. Introducción

El sueño es un componente crítico en el desarrollo cerebral temprano, contribuyendo a la maduración de las redes neuronales, la consolidación de memoria y el equilibrio funcional del cerebro [98, 99, 100]. En recién nacidos prematuros —también denominados pretérmino—, el ciclo sueño-vigilia se encuentra en pleno proceso de maduración y presenta características distintas según la edad gestacional corregida y la edad postnatal [101, 102].

Se ha observado que los recién nacidos prematuros presentan una mayor proporción de sueño activo, menor de sueño calmo y una mayor fragmentación del ciclo sueño-vigilia en comparación con los recién nacidos a término [103, 104]. A medida que avanza la edad gestacional corregida y los días postnatales, se espera un aumento progresivo de la vigilia y del sueño tranquilo, con menor número de transiciones y mayor duración de los ciclos [105, 106].

El objetivo principal fue cuantificar la complejidad de maduración del ciclo sueño-vigilia y la complejidad del EEG en recién nacidos pretérmino, considerando la edad gestacional corregida y los días postnatales, permitiendo así una caracterización detallada de la evolución del sueño durante las primeras semanas de vida extrauterina.

Los registros polisomnográficos (PSG) permiten caracterizar estos estados conductuales y su relación con la actividad eléctrica cortical mediante EEG, EMG y EOG. Entre las herramientas de análisis de señales aplicadas en este proyecto, presentamos en este capítulo la Complejidad de Lempel-Ziv (*LZC*) y la Complejidad de Lempel-Ziv conjunta (en inglés, Joint Lempel-Ziv Complexity, con siglas *JLZC*) para evaluar la irregularidad y variabilidad temporal de la señal EEG [7, 35].

13.2. Sujetos y metodología

Población de estudio. Se incluyeron recién nacidos pretérmino clínicamente estables, mayores a 30 semanas de edad gestacional, ingresados en la Unidad de Neonatología del Hospital de Clínicas, Montevideo, Uruguay. Se excluyeron aquellos con malformaciones del sistema nervioso central, hemorragia intracraneana, uso de drogas anticonvulsivantes o depresoras del SNC. Los recién nacidos se agruparon por edad gestacional corregida: 30–31, 32–33, 34–35 y 36–37 semanas, y por días postnatales: ≤ 15 días y > 15 días. Cada grupo contó con 10 pacientes, para un total estimado de 40 registros. Se recopilieron datos maternos y neonatales relevantes (condición de salud, medicación previa al parto, Apgar *, necesidad de ventilación, administración de cafeína), para controlar posibles variables de confusión.

Registros polisomnográficos. Se realizaron registros PSG de 90 minutos, sin inducción farmacológica del sueño, incluyendo EEG, EOG, EMG, ECG y saturación de oxígeno, con registro simultáneo de video. Las grabaciones se realizaron con el equipo Nihon Kodan EEG-9100, a una frecuencia de muestreo de 500 Hz, iniciando aproximadamente a la 13:00 horas, tras la alimentación del recién nacido, para favorecer el inicio del sueño espontáneo. Los electrodos EEG desechables de *Ag/AgCl* se colocaron según el sistema 10–20 reducido, adaptado al perímetro cefálico del neonato, incluyendo posiciones frontales (*F3*, *Fz*, *F4*), centrales (*C3*, *Cz*, *C4*), temporales (*T3*, *T4*) y occipitales (*O1*,

*Evaluación clínica rápida del recién nacido que valora frecuencia cardíaca, respiración, tono muscular, respuesta refleja y color de piel durante el primer minuto y a los 5 minutos de vida.

O2). La señal EMG se registró a nivel del mentón, y se colocaron electrodos adicionales para ECG y electrooculografía. Además, se registró el esfuerzo respiratorio mediante pletismografía inductiva [†].

Preprocesamiento de las señales EEG. Los registros se puntuaron manualmente usando el programa PortaViewReview (Nihon Kodan) por dos médicos neurofisiológicos experimentados, entrenados en la observación de registros neonatales. Los estados de sueño y vigilia se clasificaron en Sueño Activo (SA), Sueño Calmo (SQ), Sueño Indeterminado (SI) y Vigilia (V), en épocas de 20 o 30 segundos según la edad gestacional, siguiendo criterios basados en la actividad EEG, observación conductual sincronizada mediante video, electrooculograma y parámetros cardiorrespiratorios [107, 108, 109]. Se definió cada ciclo de sueño desde el inicio del sueño activo hasta el final del sueño calmo, incluyendo posibles interrupciones del sueño [110]. Las señales crudas de EEG se exportaron a MATLAB (*versión 2022b*) y se seleccionaron épocas libres de artefactos. A cada época se aplicó un filtro pasa banda 1–70 Hz y notch a 60 Hz. Se programó el análisis de los tiempos, porcentajes y número de eventos por cada estado de sueño, así como el tiempo total del ciclo sueño-vigilia y el número de transiciones entre estados conductuales. Para los análisis, los recién nacidos pretérmino se agruparon por las edades gestacionales y días postnatales, como se detalló anteriormente.

13.3. Análisis de datos

13.3.1. Complejidad de Lempel-Ziv (LZC).

Preparación de los datos. Se calcularon métricas de complejidad de Lempel-Ziv (LZC) en todas las épocas seleccionadas, para cada estado de sueño y cada electrodo, con el objetivo de evaluar la maduración cortical y la irregularidad temporal de la señal [7, 35]. Los resultados de LZC se analizaron longitudinalmente según la edad gestacional corregida, agrupando a los sujetos en intervalos (30–31, 32–33 y 34–35 semanas) para evaluar cambios en la complejidad cerebral durante las primeras semanas de vida extrauterina. Cada señal fue previamente filtrada mediante un filtro pasabanda Butterworth de tercer orden. Posteriormente, para cada época y canal, la señal filtrada fue discretizada en una secuencia binaria y se calculó el LZC utilizando el método binario de Lempel-Ziv. Los

[†]Técnica no invasiva que mide los cambios en el volumen torácico y abdominal durante la respiración mediante bandas elásticas con sensores inductivos colocadas alrededor del pecho y el abdomen.

valores de LZC obtenidos por canal y estado fueron promediados sobre las épocas para cada sujeto, generando matrices organizadas por épocas y canales. Los resultados se estructuraron según estado de sueño y grupo etario, habilitando un análisis comparativo en doble entrada.

Análisis estadístico. Se aplicó la prueba no paramétrica de Mann–Whitney para muestras independientes para evaluar diferencias significativas entre estados y entre grupos de edad. Los resultados se presentan en la Figura 1. A continuación, una breve explicación de la distribución de los topoplots en el gráfico.

Visualización de topoplots. Los topoplots se presentan siguiendo dos esquemas de organización:

- **Comparación horizontal entre estados dentro de cada grupo de edad:** En cada fila, se muestran los tres estados de sueño (Activo, Indeterminado, Calmo) para un mismo grupo etario (por ejemplo, 30-31 semanas). A la derecha de estos tres topoplots, se presenta el topoplot del p-value resultante de la comparación estadística entre los estados Activo y Calmo para ese grupo.
- **Comparación vertical entre grupos dentro de un mismo estado:** En cada columna, se muestra un mismo estado (por ejemplo, Activo) para distintos grupos de edad (30-31, 32-33, 34-35 semanas). Debajo de estos topoplots, se presenta el topoplot del p-value de la comparación entre los grupos extremos de edad (por ejemplo, Activo 30-31 vs Activo 34-35 semanas).

13.3.2. Complejidad de Lempel-Ziv — Frecuencias Altas y Bajas. Además de la banda completa, se exploró la complejidad de Lempel–Ziv en dos rangos específicos: [1–16] Hz (bajas frecuencias) y [16–60] Hz (altas frecuencias). Si bien estos análisis preliminares permitieron observar patrones interesantes, aún no se ha realizado la estadística correspondiente, con la intención de profundizarla posteriormente mediante modelos multinivel u otros enfoques adecuados que permitan capturar la variabilidad entre sujetos, estados y otros parámetros de interés. Los resultados preliminares pueden visualizarse en la Figura 2. Los gráficos exhiben únicamente las distribuciones espaciales de LZC, sin incluir mapas de significancia estadística.

13.3.3. Complejidad Conjunta de Lempel–Ziv (JLZC).

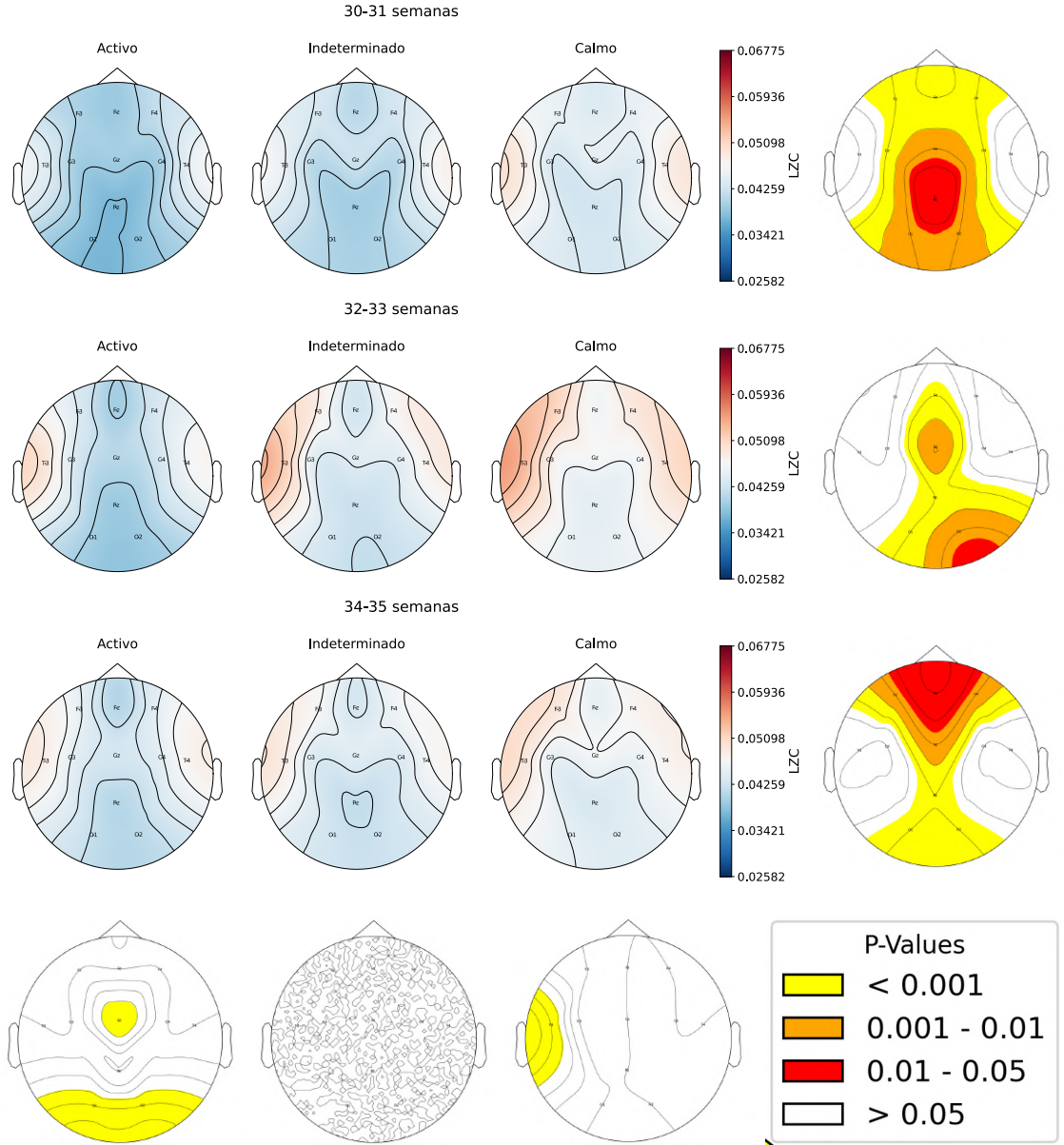


FIGURA 1. Topoplots de LZC organizados por estado de sueño (horizontal) y por grupo etario (vertical). A la derecha de cada fila se muestran los mapas de p-value entre los estados Activo y Calmo, y en la parte inferior los p-values entre los grupos extremos de edad.

Preparación de los datos. La complejidad conjunta de Lempel–Ziv (JLZC) se calculó a partir de las señales multicanales filtradas y segmentadas en épocas libres de artefactos. Cada época fue organizada como una matriz $M \in \mathbb{R}^{C \times T}$ -donde C es el número de canales y T la cantidad de muestras dentro de la época- y posteriormente binarizada canal por canal mediante umbralización por la mediana. A partir de esta matriz binaria se construyó un alfabeto conjunto, combinando los valores binarios de todos los canales en

cada instante temporal y generando así una única secuencia simbólica por época. Sobre esta secuencia se aplicó el algoritmo estándar de Lempel–Ziv para obtener la complejidad conjunta. Finalmente, la medida fue normalizada según el método de Lesne et al. [111], que ajusta por la longitud de la secuencia y el tamaño del alfabeto, obteniendo el valor normalizado $n\text{JLZC}$. Para cada sujeto, estado de sueño y grupo etario, los valores por época fueron promediados. En este análisis se adoptaron dos criterios complementarios para agrupar los canales de EEG: un enfoque *zonal* y un enfoque basado en la *lateralidad*. El primero organiza los electrodos según regiones corticales clásicas: los canales se agruparon en cuatro zonas: frontal (F3, Fz, F4), central (C3, C4, Cz), temporal (T3, T4) y occipital (O1, O2, Pz). El segundo criterio se basa en la lateralidad hemisférica y busca capturar posibles asimetrías funcionales entre el hemisferio izquierdo y el derecho. Para ello se excluyeron los electrodos ubicados en la línea media (Cz y Pz), y se definieron dos conjuntos de análisis: hemisferio izquierdo (C3, F3, T3, O1) y hemisferio derecho (C4, F4, T4, O2). Los resultados del análisis se presentan en la Figuras 3 (agrupamiento zonal) y ?? (agrupamiento por lateralidad). Si bien estos análisis preliminares permitieron observar patrones interesantes, aún no se ha realizado la estadística correspondiente, con la intención de profundizarla posteriormente.

13.3.4. Interpretación preliminar de los resultados. Los análisis realizados sobre las distintas métricas de complejidad revelan patrones consistentes tanto a nivel espacial como entre los grupos etarios evaluados. En primer lugar, los mapas de significancia en doble entrada muestran que, incluso en etapas muy tempranas del desarrollo, existen diferencias significativas entre estados de sueño, especialmente en regiones centrales y frontales. Estas diferencias se mantienen de manera relativamente estable a lo largo de las semanas 30–35, lo que sugiere que ciertos contrastes entre estados ya se encuentran organizados en la primera etapa extrauterina.

Al analizar la complejidad Lempel–Ziv clásica (LZC) dividida por bandas de frecuencia, se observaron comportamientos diferenciados entre actividad de bajas y altas frecuencias. En las bandas bajas, la complejidad tiende a ser menor y presenta patrones topográficos más definidos, mientras que en las bandas altas se evidencia un incremento progresivo de LZC con la edad gestacional corregida, junto con una distribución espacial más homogénea.

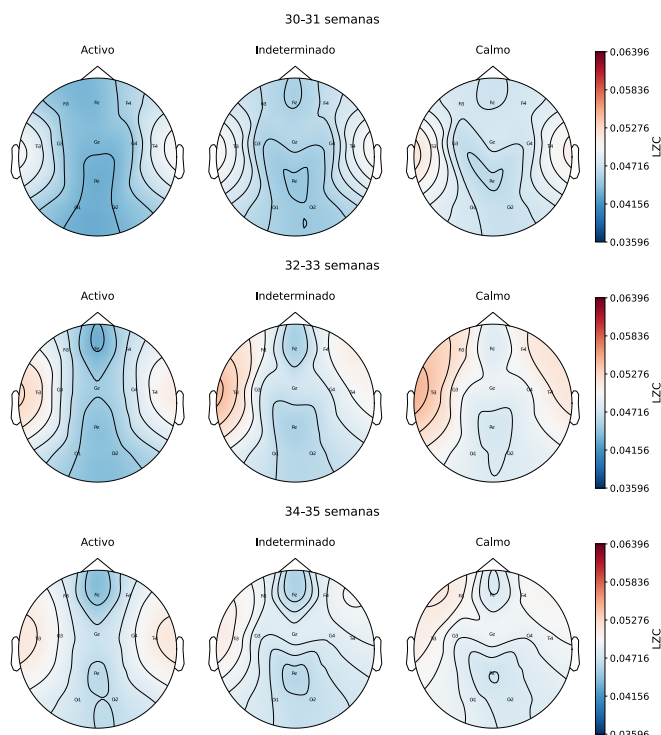
El análisis de la complejidad conjunta (JLZC) aporta una perspectiva más global de la coordinación entre canales. En el agrupamiento por zonas corticales, se destacan diferencias claras entre regiones, particularmente un aumento consistente de JLZC en zonas temporales y, en algunos grupos, en áreas frontales. Este comportamiento aparece en los tres estados, aunque con mayor expresión durante el estado Calmo. A su vez, se observa un incremento gradual de la mediana de JLZC con la edad gestacional en prácticamente todas las zonas.

En cuanto a la lateralidad, los resultados muestran diferencias más sutiles que en el análisis zonal, aunque se aprecia una tendencia recurrente a valores ligeramente mayores en el hemisferio izquierdo, especialmente durante el estado Calmo y en los grupos de mayor edad. Este patrón, si bien preliminar, podría relacionarse con la asimetría funcional temprana [‡].

En conjunto, estos hallazgos muestran que tanto LZC como JLZC capturan cambios organizados y evolutivos durante las semanas 30–35, reflejando transformaciones progresivas en la complejidad temporal y en la coordinación espacial del EEG neonatal. Las interpretaciones fisiológicas y biológicas más profundas serán abordadas en futuros trabajos, donde estos patrones podrán discutirse en mayor detalle.

[‡]Diferencias en la actividad y organización entre los hemisferios cerebrales que aparecen desde etapas muy precoces del desarrollo, incluso en vida fetal, y que reflejan una especialización inicial del procesamiento neuronal.

Frecuencias Bajas



Frecuencias Altas

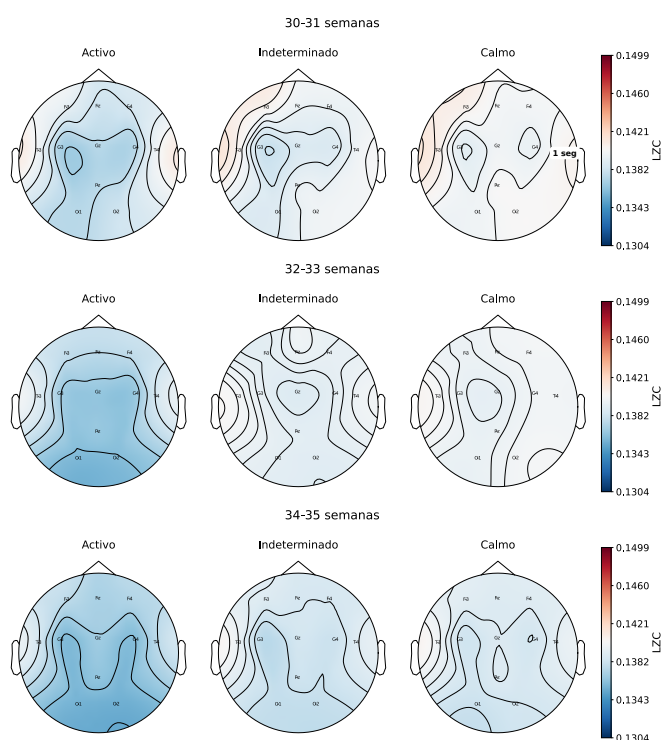


FIGURA 2. Topoplots de LZC organizados por banda de frecuencias y por edad gestacional corregida. En la parte superior se presentan los mapas correspondientes a frecuencias bajas ([1–16] Hz) y, debajo, los de frecuencias altas ([16–60] Hz). Dentro de cada banda, las filas representan los grupos etarios (30–31, 32–33 Y 34–35 semanas), mientras que las columnas muestran los estados de sueño Activo, Indeterminado y Calmo.

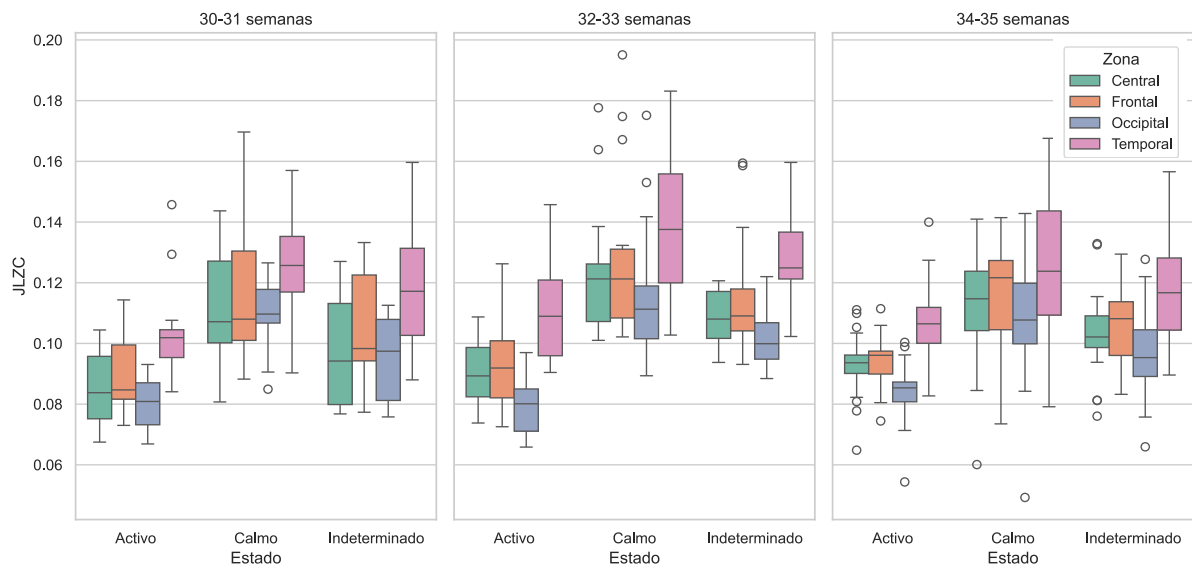


FIGURA 3. Distribución de los valores de JLZC por zona cortical y por estado de sueño (Activo, Indeterminado y Calmo), organizada según la edad gestacional corregida de cada grupo (30–31, 32–33 y 34–35 semanas). Cada color identifica una zona distinta.

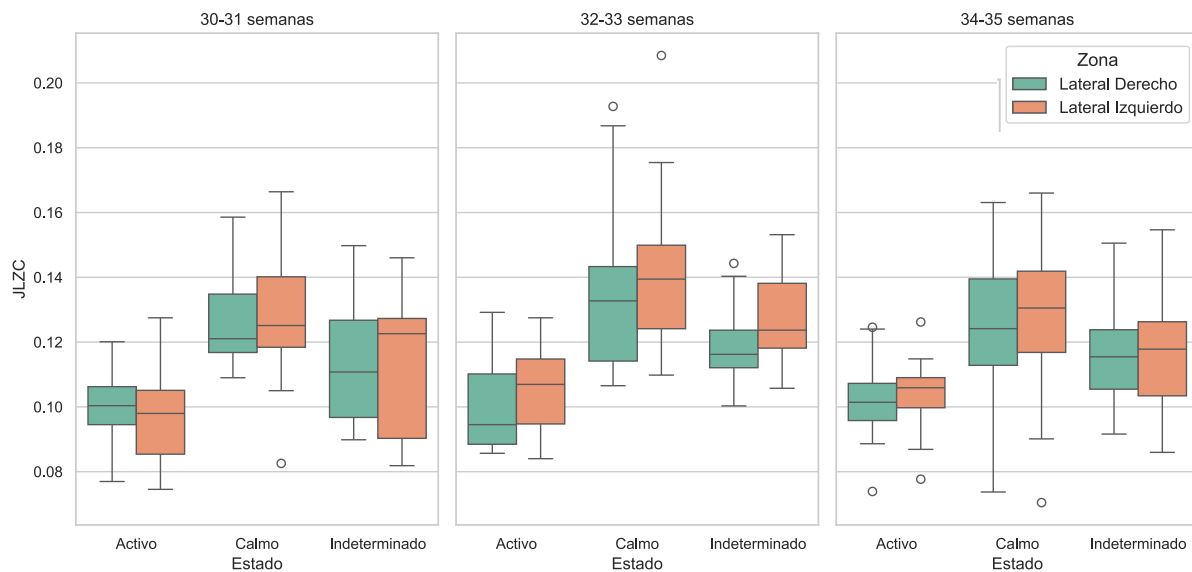


FIGURA 4. Distribución de los valores de JLZC según lateralidad hemisférica (izquierdo vs. derecho) y estado de sueño (Activo, Indeterminado y Calmo), organizada por grupos de edad gestacional corregida (30–31, 32–33 y 34–35 semanas). Cada color corresponde a uno de los hemisferios analizados.

Discusión general

La presente tesis integró herramientas matemáticas y computacionales avanzadas con aplicaciones en neurociencia y procesamiento de imágenes, con el fin de caracterizar propiedades estructurales, dinámicas y funcionales de señales multivariadas. A lo largo del trabajo se desarrolló un marco analítico general basado en operadores de convolución, transformadas continuas y discretas, análisis de fase multidimensional y medidas de complejidad simbólica, aplicados posteriormente al estudio de señales EEG en distintos contextos fisiológicos y poblacionales, así como al análisis de imágenes mediante el *Índice de Diferencias de Fase Espacial* (IDFE). En conjunto, estos aportes permiten una comprensión más amplia y unificada de cómo la variabilidad temporal, la distribución espectral y la conectividad funcional reflejan cambios tanto fisiológicos como patológicos en distintos sistemas biológicos.

En los capítulos iniciales se desarrolló un marco matemático centrado en operadores convolutivos y análisis de fase. Particularmente, se demostró cómo la combinación de transformadas continuas y discretas, junto con representaciones en espacios de Hilbert, habilita el análisis conjunto de frecuencia, tiempo y estructura. A partir de estas bases se introdujo una herramienta clave para la tesis: El **índice IDFE** para imágenes, que cuantifica diferencias locales y globales basadas en estructura de fase.

El índice IDFE permitió comparar imágenes desde una perspectiva estructural basada en información de fase, lo que hizo posible detectar diferencias espaciales sutiles incluso en situaciones donde los métodos tradicionales basados en intensidad no lograban distinguir variaciones relevantes. Además, permitió extraer métricas robustas en contextos con ruido, variabilidad intersujeto o transformaciones geométricas leves, mostrando una notable estabilidad frente a perturbaciones. En conjunto, estos resultados evidencian que la fase contiene información crítica para la percepción visual y que los índices derivados de ella constituyen herramientas más sólidas y consistentes para evaluar similitud estructural que los abordajes puramente energéticos.

A futuro, el uso del IDFE podría ampliarse hacia escenarios más complejos en procesamiento de imágenes y análisis de señales. Por un lado, su integración con modelos multiescala y representaciones orientadas permitiría capturar variaciones estructurales dependientes de la escala o la dirección, enriqueciendo su sensibilidad a patrones locales. Por otro, la combinación con técnicas de aprendizaje automático o métodos basados en deep learning podría habilitar sistemas híbridos donde la fase proporcione un conjunto de descriptores robustos para tareas de clasificación, detección de anomalías o registro de imágenes. Asimismo, explorar su desempeño en dominios biomédicos —como imágenes histológicas, resonancia magnética o video-EEG— ofrecería oportunidades para validar su utilidad en contextos clínicos reales. En conjunto, estas líneas de trabajo abrirían nuevas aplicaciones y permitirían consolidar al IDFE como una herramienta versátil para el análisis estructural en múltiples disciplinas.

Por otra parte, se introdujeron herramientas clave para el desarrollo de la tesis. En primer lugar, la Densidad Espectral de Potencia (PSD) permitió caracterizar la distribución energética de la señal en el dominio de la frecuencia. Complementariamente, la Complejidad de Lempel–Ziv (LZC) y métricas afines se emplearon como cuantificadores de la irregularidad temporal, aportando información independiente de la amplitud y sensible a la estructura interna de la señal. Para el estudio de la conectividad funcional se incorporaron dos enfoques principales: el Phase Lag Index (PLI), que estima la sincronización entre regiones minimizando los efectos de conducción de volumen, y la Coherencia, que describe la estabilidad del acoplamiento oscilatorio en distintas bandas de frecuencia. Adicionalmente, la Entropía de Permutación (PE) se utilizó como medida complementaria de complejidad ordinal, capaz de capturar patrones temporales locales no detectables por métodos lineales. Este cuerpo de herramientas fue aplicado de manera consistente a señales experimentales heterogéneas, mostrando su versatilidad para abordar preguntas neurofisiológicas y computacionales complejas. Un aporte relevante consiste en demostrar que las medidas de complejidad y fase no sólo complementan al análisis espectral, sino que revelan propiedades ocultas cuando las amplitudes no son suficientes para explicar la dinámica subyacente.

La integración de métricas de Potencia Espectral, Complejidad Temporal y Conectividad Funcional ofrece una perspectiva amplia y complementaria para comprender la

organización dinámica del cerebro. Cada una de estas aproximaciones captura dimensiones distintas de la actividad neuronal —la distribución de energía en el espectro, el grado de irregularidad o previsibilidad de la señal, y la coordinación entre regiones corticales—, y su combinación permite obtener descripciones más completas y sensibles que las que proporcionaría cualquier métrica por separado. Este enfoque multimodal resulta especialmente valioso en sistemas biológicos, donde la interacción entre oscilaciones, variabilidad temporal y acoplamiento interregional refleja principios fundamentales del funcionamiento neuronal. Considerar simultáneamente estos aspectos permite caracterizar con mayor precisión cómo se reorganizan las redes corticales ante cambios en el estado fisiológico, el desarrollo, los desafíos cognitivos o las intervenciones experimentales. En conjunto, el uso articulado de potencia, complejidad y conectividad constituye un marco robusto y generalizable para estudiar la dinámica cerebral y sus transformaciones a lo largo de diferentes condiciones y poblaciones.

A futuro, este análisis puede incorporar modelos estadísticos multinivel o basados en estructuras jerárquicas, capaces de capturar de manera más adecuada la dependencia entre épocas, sujetos y estados fisiológicos. Este tipo de herramientas permitiría una caracterización más precisa de la variabilidad intra- e interindividual y fortalecería la identificación de efectos específicos de cada condición experimental. Asimismo, la integración con otros métodos de registro —como video sincronizado, electromiografía o marcadores conductuales— ofrecería una visión más completa de la dinámica neuronal al vincularla con información espacial, funcional y comportamental adicional. En conjunto, estas líneas de trabajo podrían representar oportunidades sólidas para consolidar y expandir el marco metodológico propuesto.

Los resultados de la tesis evidencian dos conclusiones centrales: por un lado, que el índice IDFE confirma que el análisis de fase es una herramienta sólida para detectar diferencias estructurales en imágenes; y por otro, que la combinación de métodos matemáticos rigurosos con el análisis del EEG permite caracterizar con precisión la organización funcional del cerebro en distintas etapas de la vida y bajo diversas condiciones experimentales.

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1930.
- [2] Laurent Schwartz. *Teoría de las distribuciones*. Hermann, París, 1966. Traducción de *Théorie des distributions*.
- [3] Cornelis J. Stam, Guido Nolte, and Andreas Daffertshofer. Phase lag index: Assessment of functional connectivity from multi channel eeg and meg with diminished bias from common sources. *Human Brain Mapping*, 28(11):1178–1193, 2007.
- [4] Christoph Bandt and Bernd Pompe. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters*, 88(17):174102, 2002.
- [5] Martin Riedl, Andreas Müller, and Niels Wessel. Practical considerations of permutation entropy: A tutorial review. *European Physical Journal Special Topics*, 222(2):249–262, 2013.
- [6] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2 edition, 2006.
- [7] A. Lempel and J. Ziv. On the complexity of finite sequences. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(1):75–81, 1976.
- [8] X. Zhang, R.J. Roy, and E.W. Jensen. Complexity analysis of eeg data using multichannel lempel-ziv complexity. *Medical Engineering & Physics*, 23(4):293–299, 2001.
- [9] Y. Bai, Z. Liang, and X. Li. Measures of multivariate lempel–ziv complexity for multichannel physiological signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 62(1):110–117, 2015.
- [10] Henry B. Mann and Donald R. Whitney. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *The Annals of Mathematical Statistics*, 18(1):50–60, 1947.
- [11] Frank Wilcoxon. Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6):80–83, 1945.
- [12] William H. Kruskal and W. Allen Wallis. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 47(260):583–621, 1952.
- [13] Olive Jean Dunn. Multiple comparisons among means. *Journal of the American Statistical Association*, 56(293):52–64, 1961.
- [14] Alejandra Mondino, Magaly Catanzariti, Diego Martin Mateos, Michael Khan, Claire Ludwig, Anna Kis, Margaret E. Gruen, and Natasha J. Olby. Sleep and cognition in aging dogs. a polysomnographic study. *Frontiers in Veterinary Science*, 10:1151266, 2023.

-
- [15] Robert Stickgold. Sleep-dependent memory consolidation. *Nature*, 437:1272–1278, 2005.
 - [16] B. A. Mander, J. R. Winer, and M. P. Walker. Sleep and human aging. *Neuron*, 94:19–36, 2017.
 - [17] E. S. Musiek and D. M. Holtzman. Mechanisms linking circadian clocks, sleep, and neurodegeneration. *Science*, 354:1004–1008, 2016.
 - [18] M. Lafortune, J. F. Gagnon, N. Martin, V. Latreille, J. Dube, M. Bouchard, et al. Sleep spindles and rapid eye movement sleep as predictors of next morning cognitive performance in healthy middle-aged and older participants. *Journal of Sleep Research*, 23:159–167, 2014.
 - [19] R. Bódizs, A. Kis, M. Gácsi, and J. Topál. Sleep in the dog: Comparative, behavioral and translational relevance. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 33:25–33, 2020.
 - [20] Anna Kis, Sára Szakadát, Enikő Kovács, Márta Gácsi, Péter Simor, Ferenc Gombos, József Topál, Ádam Miklósi, and Róbert Bódizs. Development of a non-invasive polysomnography technique for dogs. *Physiology & Behavior*, 130:149–156, 2014.
 - [21] A. Kis, S. Szakadat, M. Gacsi, E. Kovacs, P. Simor, C. Torok, et al. The interrelated effect of sleep and learning in dogs (*canis familiaris*): An eeg and behavioural study. *Scientific Reports*, 7:41873, 2017.
 - [22] T. Takeuchi and E. Harada. Age-related changes in sleep-wake rhythm in dog. *Behavioural Brain Research*, 136:193–199, 2002.
 - [23] C. Cajochen, M. Munch, V. Knoblauch, K. Blatter, and A. Wirz-Justice. Age-related changes in the circadian and homeostatic regulation of human sleep. *Chronobiology International*, 23:461–474, 2006.
 - [24] G. M. Landsberg, T. Deporter, and J. A. Araujo. Clinical signs and management of anxiety, sleeplessness, and cognitive dysfunction in the senior pet. *Veterinary Clinics of North America: Small Animal Practice*, 41:565–590, 2011.
 - [25] S. P. Mihevc and G. Majdic. Canine cognitive dysfunction and alzheimer’s disease—two facets of the same disease? *Frontiers in Neuroscience*, 13:604, 2019.
 - [26] J. E. Rofina, A. M. van Ederen, M. J. Toussaint, M. Secreve, A. van der Spek, I. van der Meer, et al. Cognitive disturbances in old dogs suffering from the canine counterpart of alzheimer’s disease. *Brain Research*, 1069:216–226, 2006.
 - [27] T. Schütt, L. Helboe, L. O. Pedersen, G. Waldemar, M. Berendt, and J. T. Pedersen. Dogs with cognitive dysfunction as a spontaneous model for early alzheimer’s disease: A translational study of neuropathological and inflammatory markers. *Journal of Alzheimer’s Disease*, 52:433–449, 2016.
 - [28] C. W. Dewey, E. S. Davies, H. Xie, and J. J. Wakshlag. Canine cognitive dysfunction: Pathophysiology, diagnosis, and treatment. *Veterinary Clinics of North America: Small Animal Practice*, 49:477–499, 2019.
 - [29] A. Madari, J. Farbakova, S. Katina, T. Smolek, P. Novak, T. Weisssova, et al. Assessment of severity and progression of canine cognitive dysfunction syndrome using the canine dementia scale (cades). *Applied Animal Behaviour Science*, 171:138–145, 2015.

-
- [30] H. E. Salvin, P. D. McGreevy, P. S. Sachdev, and M. J. Valenzuela. The canine cognitive dysfunction rating scale (ccdr): A data-driven and ecologically relevant assessment tool. *The Veterinary Journal*, 188:331–336, 2011.
- [31] S. Denenberg, F. Liebel, and J. Rose. Behavioural and medical differentials of cognitive decline and dementia in dogs and cats. In G. Landsberg, A. Madari, and N. Zilka, editors, *Canine and Feline Dementia: Molecular Basis, Diagnostics and Therapy*, pages 13–58. Springer International Publishing, 2017.
- [32] P. Torterolo, J. González, S. Castro-Zaballa, M. Cavelli, A. Mondino, C. Pascovich, et al. Polysomnography in humans and animal models: Basic procedures and analysis. In E. Murillo-Rodríguez, editor, *Methodological Approaches for Sleep and Vigilance Research*, pages 17–32. Academic Press, Cambridge, MA, 2022.
- [33] A. Mondino, P. Torterolo, and G. Vanini. Definitions and measurements of the states of vigilance. In *Methodological Approaches for Sleep and Vigilance Research*, pages 1–16. Academic Press; Elsevier, 2022.
- [34] C. J. Stam. Nonlinear dynamical analysis of eeg and meg: Review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116:2266–2301, 2005.
- [35] M. M. Schartner, A. K. Seth, and Q. Noirhomme. Complexity of multi-dimensional spontaneous eeg decreases during propofol induced general anaesthesia. *PLoS ONE*, 12(3):e0171807, 2017.
- [36] Viktoria Reicher, Anna Kis, Peter Simor, Renáta Bódizs, Ferenc Gombos, and Mark Gácsi. Repeated afternoon sleep recordings indicate first-night-effect-like adaptation process in family dogs. *Journal of Sleep Research*, 29(6):e12998, 2020.
- [37] Peter Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2):70–73, 1967.
- [38] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, and others. Scipy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature Methods*, 17(3):261–272, 2020.
- [39] Marco G. Ravetti and Osvaldo A. Rosso. ordpy: A python package for permutation entropy and ordinal analysis. <https://github.com/arthur-e/ordpy>, 2021. Accessed: 2025-10-27.
- [40] W. A. Van Gool and M. Mirmiran. Age-related changes in the sleep pattern of male adult rats. *Brain Research*, 279:394–398, 1983.
- [41] S. S. Bowersox, T. L. Baker, and W. C. Dement. Sleep-wakefulness patterns in the aged cat. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 58:240–252, 1984.
- [42] A. G. Hudetz, X. Liu, S. Pillay, M. Boly, and G. Tononi. Propofol anesthesia reduces lempel-ziv complexity of spontaneous brain activity in rats. *Neuroscience Letters*, 628:132–135, 2016.

-
- [43] S. Simons and D. Abásolo. Distance-based lempel–ziv complexity for the analysis of electroencephalograms in patients with alzheimer’s disease. *Entropy*, 19:129, 2017.
- [44] S. Kubicki, W. M. Herrmann, K. Fitch, and G. Freund. Reflections on the topics: Eeg frequency bands and regulation of vigilance. *Pharmakopsychiatrie, Neuro-Psychopharmakologie*, 12:237–245, 1979.
- [45] Alejandra Mondino, Luis Delucchi, Adam Moeser, Sofia Cerda-Gonzalez, and Giancarlo Vanini. Sleep disorders in dogs: A pathophysiological and clinical review. *Topics in Companion Animal Medicine*, 43:100516, 2021.
- [46] Jerome M. Siegel. Clues to the functions of mammalian sleep. *Nature*, 437(7063):1264–1271, 2005.
- [47] Samson Z Assefa, Montserrat Diaz-Abad, Emerson M Wickwire, and Steven M Scharf. The functions of sleep. *AIMS Neuroscience*, 2(3), 2015.
- [48] Svenja Brodt, Marion Inostroza, Niels Niethard, and Jan Born. Sleep—a brain-state serving systems memory consolidation. *Neuron*, 111(7):1050–1075, 2023.
- [49] Yusuf Patrick, Alice Lee, Oishik Raha, Kavya Pillai, Shubham Gupta, Sonika Sethi, Felicite Mukeshimana, Lothaire Gerard, Mohammad U Moghal, and Sohag N Saleh. Effects of sleep deprivation on cognitive and physical performance in university students. *Sleep and Biological Rhythms*, 15:217–225, 2017.
- [50] William DS Killgore. Effects of sleep deprivation on cognition. *Progress in Brain Research*, 185:105–129, 2010.
- [51] Wallace B. Mendelson. A review of the evidence for the efficacy and safety of trazodone in insomnia. *Journal of Clinical Psychiatry*, 66(4):469–476, 2005.
- [52] Karim Yahia Jaffer et al. Trazodone for insomnia: a systematic review. *Innovations in Clinical Neuroscience*, 14(7-8):24, 2017.
- [53] Bunna Chea and Mario Giorgi. Trazodone: A review of its pharmacological properties and its off-label use in dogs and cats. *American Journal of Animal and Veterinary Sciences*, 12(4):188–194, 2017.
- [54] Margaret E. Gruen and Barbara L. Sherman. Use of trazodone as an adjunctive agent in the treatment of canine anxiety disorders. *Journal of the American Veterinary Medical Association*, 233(12):1902–1907, 2008.
- [55] Shana E. Gilbert-Gregory, Jason W. Stull, Mary Rose Rice, and Meghan E. Herron. Effects of trazodone on behavioral signs of stress in hospitalized dogs. *Journal of the American Veterinary Medical Association*, 249(11):1281–1291, 2016.
- [56] Margaret E. Gruen et al. Use of trazodone to facilitate postsurgical confinement in dogs. *Journal of the American Veterinary Medical Association*, 245(3):296–301, 2014.
- [57] F. Kaspar and H. G. Schuster. Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns. *Physical Review A*, 36(2):842–848, 1987.

-
- [58] Massimiliano Zanin et al. Permutation entropy and its main biomedical and econophysics applications: A review. *Entropy*, 14(8):1553–1577, 2012.
 - [59] Petre Stoica and Randolph L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Pearson Prentice Hall, 2005.
 - [60] Stephen M Stahl. Mechanism of action of trazodone: a multifunctional drug. *CNS Spectrums*, 14(10):536–546, 2009.
 - [61] A. L. Van Bommel, R. G. Havermans, and R. Van Diest. Effects of trazodone on eeg sleep and clinical state in major depression. *Psychopharmacology*, 107:569–574, 1992.
 - [62] Diego M. Mateos, Jaime Gómez-Ramírez, and Osvaldo A. Rosso. Using time causal quantifiers to characterize sleep stages. *Chaos, Solitons & Fractals*, 146:110798, 2021.
 - [63] Pinar Deniz Tosun, Daniel Abásolo, Gillian Stenson, and Raphaele Winsky-Sommerer. Characterisation of the effects of sleep deprivation on the electroencephalogram using permutation lempel–ziv complexity, a non-linear analysis tool. *Entropy*, 19(12):673, 2017.
 - [64] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001.
 - [65] Joaquín González, Diego Mateos, Matias Cavelli, Alejandra Mondino, Claudia Pascovich, Pablo Torterolo, and Nicolás Rubido. Low frequency oscillations drive eeg’s complexity changes during wakefulness and sleep. *Neuroscience*, 494:1–11, 2022.
 - [66] E. Pereda, A. Gamundi, R. Rial, and J. González. Non-linear behaviour of human eeg: fractal exponent versus correlation dimension in awake and sleep stages. *Neuroscience Letters*, 250(2):91–94, 1998.
 - [67] Z. Lelkes, F. Obal Jr, P. Alföldi, A. Erd, G. Rubicsek, G. Benedek, et al. Effects of acute and chronic treatment with trazodone, an antidepressant, on the sleep-wake activity in rats. *Pharmacological Research*, 30(2):105–115, 1994.
 - [68] Jihui Wang, Sanxin Liu, Hongying Han, Jiong Tao, and Zhengqi Lu. Effects of trazodone on sleep quality and cognitive function in arteriosclerotic cerebral small vessel disease comorbid with chronic insomnia. *Frontiers in Psychiatry*, 11:541264, 2020.
 - [69] G. Krumm, V. Arán Filippetti, M. Catanzariti, and D. M. Mateos. Exploring the neural basis of creativity: Eeg analysis of power spectrum and functional connectivity during creative tasks in school-aged children. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 19:1548620, 2025.
 - [70] Mark A. Runco and Garrett J. Jaeger. *Creativity: Theories and Themes: Research, Development, and Practice*. Academic Press, 2012.
 - [71] Robert J. Sternberg. *Handbook of Creativity*. Cambridge University Press, 2005.
 - [72] Arne Dietrich. The cognitive neuroscience of creativity. *Psychonomic Bulletin & Review*, 11(6):1011–1026, 2004.
 - [73] Roger E. Beaty, Mathias Benedek, Paul J. Silvia, and Daniel L. Schacter. Creative cognition and brain network dynamics. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(2):87–95, 2016.

-
- [74] Rex E. Jung and Richard J. Haier. The parieto-frontal integration theory (p-fit) of intelligence: converging neuroimaging evidence. *Behavioral and Brain Sciences*, 33(2-3):135–187, 2010.
 - [75] Andreas Fink, Mathias Benedek, Roland H. Grabner, Bettina Staudt, and Aljoscha C. Neubauer. The creative brain: Investigation of brain activity during creative problem solving by means of eeg and fmri. *Human Brain Mapping*, 30(3):734–748, 2009.
 - [76] Olga M. Bazanova and Liubov I. Aftanas. Individual alpha activity predicts learning ability and creative performance. *Neuropsychologia*, 99:246–255, 2017.
 - [77] Rosalind Arden, Robert S. Chavez, Rebecca Grazioplene, and Rex E. Jung. Neuroimaging creativity: a psychometric view. *Behavioural Brain Research*, 214(2):143–156, 2010.
 - [78] Ellis Paul Torrance. *Torrance Tests of Creative Thinking*. Personnel Press, Princeton, NJ, 1966.
 - [79] Mark A. Runco and Selcuk Acar. *Creativity and Education*. Elsevier, 2014.
 - [80] Andreas Fink and Mathias Benedek. Eeg alpha power and creative ideation. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 34(3):365–373, 2010.
 - [81] Alexandre Gramfort, Martin Luessi, Eric Larson, Denis A. Engemann, Daniel Strohmeier, Christian Brodbeck, Roman Goj, Mainak Jas, Teon Brooks, Lauri Parkkonen, and Matti Hämäläinen. Meg and eeg data analysis with mne-python. *Frontiers in Neuroscience*, 7:267, 2013.
 - [82] Alexandre Gramfort, Martin Luessi, Eric Larson, Denis A. Engemann, Daniel Strohmeier, Christian Brodbeck, Lauri Parkkonen, and Matti S. Hämäläinen. Mne software for processing meg and eeg data. *NeuroImage*, 86:446–460, 2014.
 - [83] Guido Van Rossum. *Python Reference Manual*. CWI (Centre for Mathematics and Computer Science), Amsterdam, 1995.
 - [84] Guido Van Rossum and Fred L. Drake. *Python 3 Reference Manual*. CreateSpace, Scotts Valley, CA, 2009.
 - [85] A. Fink, R. H. Grabner, M. Benedek, G. Reishofer, V. Hauswirth, M. Fally, C. Neuper, F. Ebner, and A. C. Neubauer. The creative brain: Investigation of brain activity during creative problem solving by means of eeg and fmri. *Human Brain Mapping*, 30:734–748, 2009.
 - [86] S. Danko, N. Shemyakina, Z. Nagornova, and M. Starchenko. Eeg alpha and theta power during creative thinking: Evidence of sex differences. *International Journal of Psychophysiology*, 48:123–133, 2003.
 - [87] C. Y. Jin, G. Xu, and B. Zhang. Eeg correlates of creative thinking during divergent and convergent tasks. *Neuropsychologia*, 44:282–291, 2006.
 - [88] O. M. Razumnikova. Functional organization of different brain areas during convergent and divergent thinking: An eeg investigation. *Cognitive Brain Research*, 25:212–223, 2007.
 - [89] M. Jung-Beeman, E. M. Bowden, J. Haberman, J. L. Frymiare, S. Arambel-Liu, R. Greenblatt, P. J. Reber, and J. Kounios. Neural activity when people solve verbal problems with insight. *PLoS Biology*, 2(4):e97, 2004.

-
- [90] M. E. Wokke, A. Cleeremans, and K. R. Ridderinkhof. Delta-band oscillations reflect the temporal integration of neural activity underlying perceptual decision making. *NeuroImage*, 185:508–518, 2019.
 - [91] H. A. ElShafei, R. Bouet, O. Bertrand, and A. Bidet-Calet. Frontal alpha oscillations support the temporal control of attention in children and adults. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 54:101072, 2022.
 - [92] F. van Ede, O. Jensen, and E. Maris. Supramodal theta, alpha, and beta oscillations support selective attention to auditory and visual stimuli. *eLife*, 6:e20045, 2017.
 - [93] C. Rominger, I. Papousek, A. Fink, and E. M. Weiss. Neural correlates of creative cognition: The importance of functional brain connectivity and synchronization. *Frontiers in Human Neuroscience*, 16:893450, 2022.
 - [94] J. G. Cruz-Garza, Z. R. Hernandez, S. Nepaul, K. K. Bradley, and J. L. Contreras-Vidal. Neural decoding of expressive human movement from eeg using lstm and gru networks. *Frontiers in Neuroscience*, 14:509, 2020.
 - [95] P. L. Pearl. The neurology of creativity: 2023 howe lecture. *Annals of the Child Neurology Society*, 2:6–14, 2024.
 - [96] A. Dietrich. Where in the brain is creativity? the fallacy of a creativity faculty in the brain. *Frontiers in Psychology*, 15:1373299, 2024.
 - [97] A. Dietrich and R. Kanso. A review of eeg, erp, and neuroimaging studies of creativity and insight. *Psychological Bulletin*, 136:822–848, 2010.
 - [98] M. Mirmiran, R. L. Ariagno, and M. Billeci. Development of sleep-wake states in preterm infants. *Clinics in Perinatology*, 30(2):205–222, 2003.
 - [99] M. André, M. D. Lamblin, A. M. d’Allest, and L. Curzi-Dascalova. Electroencephalography in premature and full-term infants: Review of normal features. *Neurophysiologie Clinique*, 40(2):59–124, 2010.
 - [100] S. N. Graven. Sleep and brain development: The critical role of sleep in fetal and early neonatal brain development. *Newborn and Infant Nursing Reviews*, 6(4):173–179, 2006.
 - [101] A. Dereymaeker, V. Matic, and J. Vervisch. Eeg for the assessment of brain maturation in preterm infants. *Clinical Neurophysiology*, 128(6):1087–1096, 2017.
 - [102] M. S. Scher. Ontogeny of eeg-sleep from neonatal through infancy periods. *Sleep Medicine*, 9(6):615–620, 2008.
 - [103] M. S. Scher. Developmental aspects of sleep in premature infants. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 34(12):1053–1061, 1992.
 - [104] J. O’Toole, S. Boyd, and F. Hwang. Sleep architecture in preterm infants: Longitudinal psg study. *Journal of Perinatology*, 39(6):750–758, 2019.
 - [105] H. J. Niemarkt, J. M. Fock, and H. Bouwstra. Maturation of sleep-wake patterns in preterm infants. *Early Human Development*, 87(6):391–397, 2011.

-
- [106] M. S. Scher and D. A. Steppe. The effect of postnatal age on sleep-wake organization in preterm infants. *Pediatric Neurology*, 13(5):377–383, 1995.
- [107] L. Curzi-Dascalova and M. Mirmiran. *Manual des techniques d’enregistrement et d’analyse du sommeil du nouveau-né*. Masson, Paris, France, 1996. Manual de técnicas para la estadificación del sueño neonatal.
- [108] L. Curzi-Dascalova, F. Giganti, and P. Salzarulo. Neurophysiological basis and behavior of early sleep development in preterm and term newborns. *Developmental Psychobiology*, 50(5):469–478, 2008.
- [109] L. Curzi-Dascalova, P. Peirano, and F. Morel-Khan. Development of sleep states in normal premature and full term newborns. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 69(2):123–136, 1988.
- [110] E. Bourel-Ponchel and Colleagues. Sleep interruptions and the definition of sleep cycles in premature neonates. *Journal of Sleep Research*, 30(e13215), 2021.
- [111] Annick Lesne, Jean-Luc Blanc, and Laurent Pezard. Entropy estimation of very short symbolic sequences. *Physical Review E*, 79(4):046208, 2009.
- [112] Luciano Zunino, Miguel C Soriano, and Osvaldo A Rosso. Permutation entropy and its main biomedical and econophysics applications: a review. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 369(1956):436–463, 2011.
- [113] Ke Li, Peng Li, Ruqiang Yan, and Xiaoyan Sun. Epileptic seizure detection using permutation entropy. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 9:1–10, 2015.
- [114] Daniel Jordan, Wolfgang Förstner, Julia Barth, Alexander J Casson, Julia Gross, Claudia Hochmann, Carsten Hütch, and Gerhard Schneider. Permutation entropy in the eeg: a measure of anesthetic drug effect. *British Journal of Anaesthesia*, 110(5):825–832, 2013.
- [115] Ruqiang Yan, Ke Li, and Xiaoyan Sun. Permutation entropy reveals cardiac irregularities in heart rate variability. *Physica A*, 512:875–885, 2018.
- [116] Abdul G. Dulloo and Yves Schutz. *Energy balance and body weight regulation*. Oxford University Press, 2023.
- [117] Blair C Sutton and Mark R Opp. Sleep fragmentation exacerbates mechanical hypersensitivity and alters subsequent sleep-wake behavior in a mouse model of musculoskeletal sensitization. *Sleep*, 37(3):515–524, 2014.
- [118] Giancarlo Vanini, Kriste Nemanis, Helen A Baghdoyan, and Ralph Lydic. Gabaergic transmission in rat pontine reticular formation regulates the induction phase of anesthesia and modulates hyperalgesia caused by sleep deprivation. *European Journal of Neuroscience*, 40(1):2264–2273, 2014.
- [119] Roger Ratcliff and Hans Van Dongen. The effects of sleep deprivation on item and associative recognition memory. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 44(2):193–202, 2018.

-
- [120] Behrouz Jafari and Vahid Mohsenin. Polysomnography. *Clinics in Chest Medicine*, 31(2):287–297, 2010.
- [121] Nicoletta Nicolaou and Julius Georgiou. The use of permutation entropy to characterize sleep electroencephalograms. *Clinical EEG and Neuroscience*, 42(1):24–28, 2011.
- [122] G. Fefer, W. K. Panek, M. Z. Khan, M. Singer, H. Westermeyer, F. M. Mowat, et al. Use of cognitive testing, questionnaires, and plasma biomarkers to quantify cognitive impairment in an aging pet dog population. *Journal of Alzheimer’s Disease*, page 215562, 2022.
- [123] A. Mondino, J. González, D. Li, D. Mateos, L. Osorio, M. Cavelli, et al. Urethane anesthesia exhibits neurophysiological correlates of unconsciousness and is distinct from sleep. *bioRxiv*, pages 1–43, 2021.
- [124] W.J. Conover. *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley, 1999.
- [125] J.D. Gibbons and S. Chakraborti. *Nonparametric Statistical Inference*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [126] H. Zhang, Q. Q. Zhou, H. Chen, X. Q. Hu, W. G. Li, Y. Bai, J. X. Han, Y. Wang, Z. H. Liang, D. Chen, F. Y. Cong, J. Q. Yan, and X. L. Li. The applied principles of eeg analysis methods in neuroscience and clinical neurology. *Military Medical Research*, 10(1):67, Dec 2023.